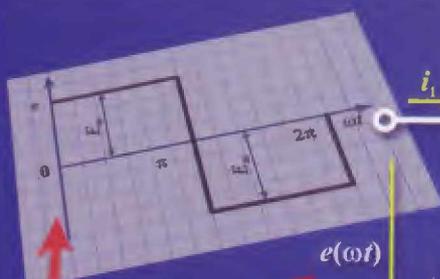


Л. И. Фуфаева

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

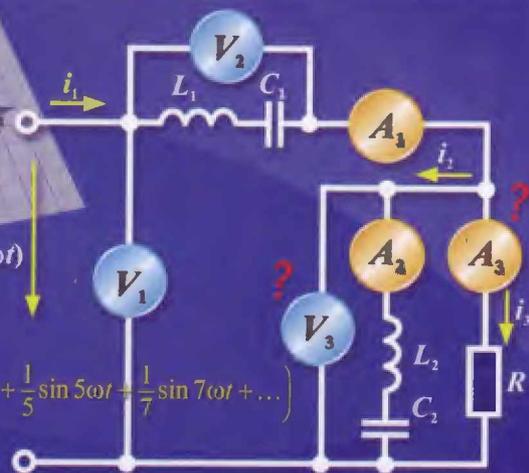
2-е издание

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА



$$e(\omega t) = \frac{4E_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$$

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1}; \quad 3\omega L_2 = \frac{1}{3\omega C_2}$$



Л. И. ФУФАЕВА

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

4/50/14

*Рекомендовано
Федеральным государственным учреждением
«Федеральный институт развития образования»
в качестве учебного пособия для использования
в учебном процессе образовательных учреждений,
реализующих программы среднего профессионального образования*

*Регистрационный номер рецензии 136
от 28 апреля 2009 г. ФГУ «ФИРО»*

2-е издание, стереотипное



Москва

Издательский центр «Академия»

600000

УДК 621.3(075.32)

ББК 31.2я723

Ф964

Рецензенты:

зам. главного конструктора Московского института электромеханики
и автоматики (МИЭА) *Е.А. Измайлов*;

вед. специалист ОАО «Московский металлургический завод «Серп и молот»
А.П. Филатов

Фуфаева Л.И.

Ф964

Сборник практических задач по электротехнике : учеб.
пособие для студ. учреждений сред. проф. образования /
Л. И. Фуфаева. — 2-е изд., стер. — М. : Издательский
центр «Академия», 2012. — 288 с.

ISBN 978-5-7695-8916-4

Содержит типовые задачи с подробными решениями по учебному материалу дисциплины «Электротехника». Является практическим приложением к учебнику Л. И. Фуфаевой «Электротехника», выпущенному Издательским центром «Академия».

В сборник включены задачи, имеющие практическое значение в электромеханике, электронике, радиотехнике и автоматике, а также задачи, связанные с поиском неисправностей, надежностью устройств, их регулировкой и другими видами практической деятельности.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 621.3(075.32)

ББК 31.2я723

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение
любым способом без согласия правообладателя запрещается*

© Фуфаева Л.И., 2010

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2010

ISBN 978-5-7695-8916-4

© Оформление. Издательский центр «Академия», 2010

Данное учебное пособие составлено в соответствии с программой дисциплины «Электротехника» для специальностей технического профиля среднего профессионального образования (СПО), рекомендованной научно-методическим центром среднего профессионального образования (НМЦ СПО) Федерального агентства по образованию Российской Федерации.

Предлагаемый сборник задач имеет своей целью помочь студентам в овладении теорией и методами решения электротехнических задач.

Сборник состоит из четырнадцати глав, содержащих задачи, при решении которых используются методы расчета электрических и магнитных полей, основные методы анализа и расчета линейных и нелинейных электрических и магнитных цепей постоянного и переменного токов, а также переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного токов.

Каждая глава пособия начинается с подробного решения задач, которые помогают глубже понять теорию дисциплины, особенности использования соответствующего математического аппарата и приобрести навыки применения на практике теоретических положений. Затем следуют задачи для самостоятельного решения и ответы к этим задачам.

Расчеты в учебном пособии выполнены с использованием Международной системы единиц (СИ) (приложение 1).

Применяемые в сборнике обозначения элементов цепей в схемах и величин в формулах соответствуют Единой системе конструкторской документации и стандартам ISO (Международной организации по стандартизации).

Значительное внимание в сборнике уделено практической направленности задач. В сборник включе-

ны задачи из электромеханики, электроники, радиотехники, автоматики, а также задачи, связанные с поиском неисправностей, надежностью устройств и их регулировкой.

Учебное пособие предназначено для студентов средних профессиональных учебных заведений, обучающихся по специальностям технического профиля, и может быть полезно специалистам в области проектирования и эксплуатации электротехнических устройств электромеханики, электроники, радиотехники, автоматики и других электротехнических направлений.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

1.1. Электрическое поле точечного заряда

Задача 1.1. Объяснить, почему заряженная стеклянная палочка притягивает незаряженные кусочки бумаги. Будет ли наблюдаться это явление, если стеклянную палочку заменить предметом, имеющим заряд, противоположный по знаку заряду стекла?

Решение. Известно, что все тела, находящиеся вблизи заряженного тела, электризуются через влияние — индукцию, в результате которой имеющиеся в этих телах свободные заряженные частицы перераспределяются следующим образом: в одной части электризуемых тел накапливаются избыточные заряды одного знака, а в другой части — другого знака.

Ближе к влияющему заряженному телу оказываются заряды со знаком, противоположным знаку заряда этого тела. Одноименные же заряды скапливаются в избытке на отдаленном конце электризуемого тела. Следовательно, каждое тело с наведенными зарядами одновременно и притягивается, и отталкивается заряженным телом.

Сила взаимодействия зарядов (здесь заряженного тела и наведенных зарядов) в соответствии с законом Кулона обратно пропорциональна квадрату расстояния r между зарядами:

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \quad (1.1)$$

Так как разноименные заряды оказываются ближе к заряженному телу, силы притяжения преобладают над силами отталкивания. В результате «незаряженные» тела притягиваются заряженным телом.

Это явление наблюдается в любом случае, т. е. оно не зависит от знака заряда влияющего заряженного тела.

Задача 1.2. В сосуд больших размеров поместили положительно заряженный металлический шарик радиусом $R_{ш} = 1$ см.

Заряд шарика $Q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл (кулон). После этого из сосуда откачали воздух, т. е. создали вакуум (относительная диэлектрическая проницаемость вакуума $\epsilon = 1$).

Вычислить напряженность электрического поля ξ и потенциал ϕ в точках А, Б и В, находящихся внутри сосуда (рис. 1.1, а) и удаленных от центра шарика (точки М) на расстояния r , равные соответственно $r_A = 20$ см, $r_B = 40$ см; $r_B = 60$ см, а также силу F , с которой поле действует на точечный заряд $q = 5 \cdot 10^{-12}$ Кл, помещаемый поочередно в указанные точки. Построить графики зависимостей напряженности поля ξ и силы F от расстояния r .

Определить, как влияет на напряженность, потенциал и силу поля заряженного шарика изменение знака его заряда. Найти напряженности поля в точке М ($r = 0$) и на поверхности заряженного шарика. Определить, как изменятся напряженность, потенциал и сила поля шарика в указанных точках, если сосуд заполнить минеральным маслом, относительная диэлектрическая проницаемость которого $\epsilon = 2,25$.

Решение. 1. Определение напряженности поля шарика в вакууме. В рассматриваемом случае при расчете характеристик поля шарик можно считать точечным зарядом, так как его линейные размеры малы по сравнению с расстояниями до точек А, Б, В (ближайшая точка А расположена на расстоянии $r_A = 20$ см $= 20R_{ш}$). Следовательно, напряженность поля в заданных точках можно рассчитать по известной формуле напряженности точечного заряда, получаемой из формулы (1.1):

$$\xi = \frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad (1.2)$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума (электрическая постоянная), $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Тогда согласно (1.2) напряженность поля в точке А

$$\xi_A = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2^2} = 1124 \text{ В/м} = 1,124 \text{ кВ/м}.$$

Так как для остальных точек все величины, кроме расстояния, остаются такими же, как и для точки А, запишем:

$$\xi_B = \frac{\xi_A}{(r_B/r_A)^2} = \frac{1124}{(0,4/0,2)^2} = 281 \text{ В/м} = 0,281 \text{ кВ/м};$$

$$\xi_B = \frac{\xi_A}{(r_B/r_A)^2} = \frac{1124}{(0,6/0,2)^2} = 125 \text{ В/м} = 0,125 \text{ кВ/м}.$$

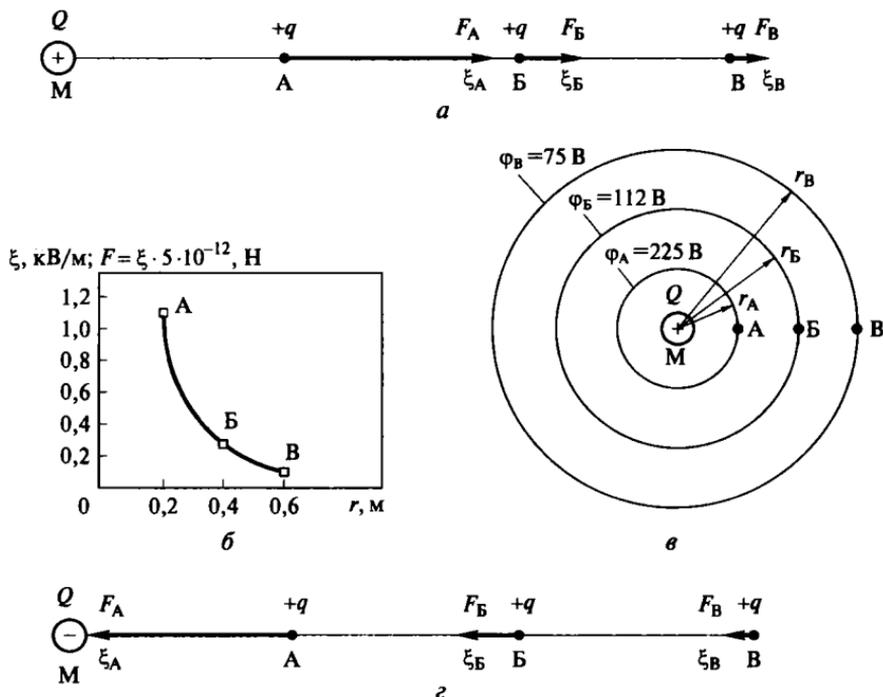


Рис. 1.1. Поле точечного заряда Q :

a — картина поля при положительном знаке заряда Q ; b — график зависимости напряженности и силы поля заряда Q от расстояния r ; c — равнопотенциальные линии, проходящие через точки A , B , B ; d — картина поля при отрицательном знаке заряда Q

График зависимости напряженности от расстояния представлен на рис. 1.1, b .

2. Вычисление силы поля заряда Q , действующей на заряд q . Поскольку напряженность ξ в какой-либо точке поля заряда Q — это сила, действующая на единичный пробный заряд, то силу F , действующую на заряд q , можно найти из формулы (1.2):

$$F = \xi q. \quad (1.3)$$

Таким образом, значения силы поля в точках A , B , B найдем по формуле (1.3):

$$F_A = \xi_A q = 1124 \cdot 5 \cdot 10^{-12} = 5,62 \cdot 10^{-9} \text{ Н};$$

$$F_B = \xi_B q = 281 \cdot 5 \cdot 10^{-12} = 1,4 \cdot 10^{-9} \text{ Н};$$

$$F_B = \xi_B q = 125 \cdot 5 \cdot 10^{-12} = 0,62 \cdot 10^{-9} \text{ Н}.$$

Так как коэффициент пропорциональности между силой и напряженностью в разных точках одинаков (он равен q), то график зависимости $F(r)$, построенный в масштабе $m_F = m_\xi q$, совпадает с графиком зависимости $\xi(r)$.

На рис. 1.1, *a* показаны векторы напряженностей и сил (в соответствующих масштабах) в различных точках поля заряда Q . Направления векторов напряженностей совпадают с направлением векторов сил, действующих на положительный пробный заряд, мысленно помещаемый в исследуемые точки. А так как знак заряда q по условию задачи положительный, то направления векторов сил, действующих на точечный заряд q в исследуемых точках, совпадают с направлениями векторов напряженностей поля заряда Q .

Прямая МАБВ является одной из линий векторов напряженностей или силовых линий поля заряда Q . Можно построить и другие силовые линии поля шарика по направлениям его радиусов. Так как заряд Q положительный, все линии векторов напряженностей (силовые линии поля) начинаются в точке расположения заряда и направлены в бесконечность.

3. Определение потенциалов и напряжений. Построение линий равного потенциала. Упростим поставленную задачу, приняв следующие допущения: будем считать сосуд и поле заряда безграничными и примем равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки. При таких условиях потенциал φ любой точки поля заряда Q можно определить по формуле

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.4)$$

Из сравнения формул (1.2) и (1.4) следует, что

$$\varphi = \xi r. \quad (1.5)$$

Используя формулу (1.5), получим:

$$\begin{aligned} \varphi_A = \xi_A r_A = 1124 \cdot 0,2 = 225 \text{ В}; \quad \varphi_B = \xi_B r_B = 281 \cdot 0,4 = 112 \text{ В}; \\ \varphi_B = \xi_B r_B = 125 \cdot 0,6 = 75 \text{ В}. \end{aligned}$$

В силу сферической симметрии заряда Q и создаваемого им поля эквипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности заряженного шарика, проходящие через точки А, Б, В, имеют форму шаров с центром в точке М и с радиусами соответственно $R_A = r_A$, $R_B = r_B$, $R_B = r_B$.

В плоскости на рис. 1.1, *б* получим равнопотенциальные линии — окружности с центром в точке М и с радиусами R_A , R_B и R_B .

Напряжение между любыми двумя точками поля определяется как разность потенциалов рассматриваемых точек, например:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 225 - 112 = 113 \text{ В};$$

$$U_{BB} = \varphi_B - \varphi_B = 112 - 75 = 37 \text{ В};$$

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 225 - 75 = 150 \text{ В}.$$

4. Оценка влияния знака заряда Q на направления напряженности и силы поля. При изменении заданного знака заряда Q изменится картина поля (рис. 1.1, з). Так как для определения направления напряженности в рассматриваемую точку поля мысленно помещают пробный заряд с положительным знаком, направления векторов напряженностей и, следовательно, силовых линий поля изменятся на противоположные: линии напряженностей будут начинаться в бесконечности и заканчиваться в точке расположения отрицательного заряда $-Q$. Направления векторов сил поля заряда $-Q$, действующих на точечный заряд q , помещаемый поочередно в указанные точки, будут совпадать с направлениями векторов напряженностей, так как знак заряда q по условию задачи также положительный.

Потенциал, характеризующий запас энергии в точке, не имеет направления, но имеет знак. Потенциалы всех указанных точек по отношению к потенциалу бесконечно удаленной точки изменят знак на противоположный.

При этом абсолютные значения всех рассчитанных ранее величин не изменятся.

5. Определение напряженностей поля шарика в точке M и на его поверхности. У металлического шарика, как бы ни был мал его радиус, заряды размещаются на поверхности, поэтому в центре шарика (в точке M) заряд равен нулю и не создает поля, т. е. $\xi_M = 0$.

Для определения напряженности поля на поверхности шарика в случае его симметрии и равномерного распределения заряда по поверхности можно использовать формулу (1.2), применяемую для определения напряженности поля точечного заряда при $r = R_{ш}$:

$$\xi_M = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 1,8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01^2} = 450 \text{ кВ/м}.$$

6. Оценка влияния среды на характеристики поля. Как известно, диэлектрик ослабляет поле. Степень уменьшения напряженности, силы и потенциала поля точечного за-

ряда, находящегося в диэлектрике, по сравнению с находящимся в вакууме учитывается в формулах (1.1)...(1.5) с помощью электрической характеристики диэлектрика — относительной диэлектрической проницаемости ϵ .

В рассматриваемой задаче при заполнении сосуда минеральным маслом, диэлектрическая проницаемость которого в 2,25 раза больше диэлектрической проницаемости вакуума, все рассчитанные значения уменьшатся в 2,25 раза.

1.2. Электрическое поле нескольких точечных зарядов

Задача 1.3. В воздухе на расстоянии $r_1 = 5$ см друг от друга находятся два точечных положительных заряда: $Q_1 = 2 \cdot 10^{-11}$ Кл и $Q_2 = 3 \cdot 10^{-11}$ Кл.

Определить напряженность электрического поля системы зарядов в точке А, отстоящей от заряда Q_1 на расстояние $r_2 = 3$ см, а от заряда Q_2 — на расстояние $r_3 = 4$ см (рис. 1.2, а).

Вычислить потенциал электрического поля системы зарядов в точке А и запас энергии совместного поля, если пробный заряд, помещенный в исследуемую точку, $q = 2 \cdot 10^{-12}$ Кл.

Оценить, как изменятся значения напряженности, потенциала и запаса энергии в точке А при изменении знака заряда Q_2 (рис. 1.2, б).

Решение. 1. Определение напряженности электрического поля системы зарядов в точке А (см. рис. 1.2, а). Найдем значения напряженностей электрических полей каждого из зарядов Q_1 и Q_2 соответственно по формуле (1.2):

$$\xi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2^2} = \frac{2 \cdot 10^{-11}}{4 \cdot \pi \cdot 1,8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,03^2} = 199,818 \text{ В/м};$$

$$\xi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_3^2} = \frac{3 \cdot 10^{-11}}{4 \cdot \pi \cdot 1,8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,04^2} = 168,596 \text{ В/м}.$$

Векторы напряженностей ξ_1 и ξ_2 расположены на прямых, соединяющих заряды Q_1 и Q_2 с точкой А, и имеют направления, показанные на рис. 1.2, а, т. е. направления напряженностей каждого из зарядов в точке А совпадают с направлениями сил, действующих на положительный пробный заряд, мысленно помещаемый в точку А.

Значение напряженности ξ_A результирующего электрического поля системы зарядов Q_1 и Q_2 в точке А определим методом на-

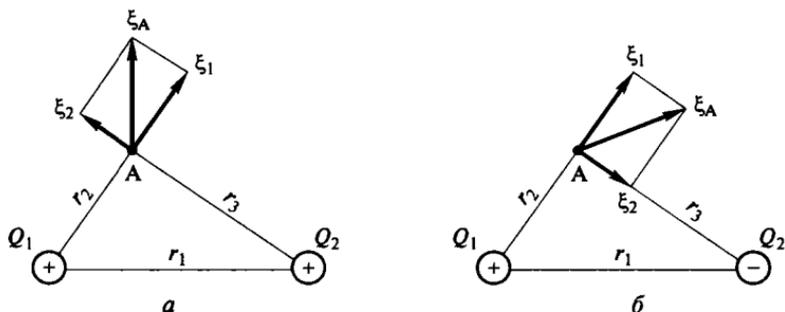


Рис. 1.2. Напряженности полей двух точечных зарядов:

a — положительных Q_1 и Q_2 ; *б* — положительного Q_1 и отрицательного Q_2

ложения как геометрическую сумму векторов напряженностей ξ_1 и ξ_2 , создаваемых каждым зарядом в отдельности.

В общем случае значение ξ_A можно определить по известной из тригонометрии теореме косинусов, применив ее к треугольнику, образованному векторами ξ_1 , ξ_2 и ξ_A :

$$\xi_A = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos A},$$

где A — угол, заключенный между векторами ξ_1 и ξ_2 , равный углу между сторонами r_2 и r_3 треугольника Q_1AQ_2 .

В соответствии с исходными данными треугольник Q_1AQ_2 на рис. 1.2, *a* имеет соотношение сторон $r_2:r_3:r_1 = 3:4:5$, следовательно, является треугольником Пифагора с прямым углом в вершине A . Угол между векторами ξ_1 и ξ_2 также является прямым вследствие смежности углов, поэтому

$$\xi_A = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \sqrt{199,818^2 + 168,596^2} = 260,674 \text{ В/м.}$$

2. Вычисление потенциала электрического поля системы зарядов в точке A . Рассмотрим особенности электрического поля отдельного точечного заряда. Если в точку N электрического поля положительного точечного заряда Q поместить положительный пробный заряд q , то на него (как и на заряд Q) будет действовать сила, определяемая по формуле (1.1):

$$F_N = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_N^2},$$

где r_N — расстояние от заряда Q до точки N .

Под действием этой силы пробный заряд удаляется на бесконечно большое расстояние. При этом сила поля F_N производит работу A за счет энергии W_N поля точечного заряда Q , которая

при удалении от заряда убывает. Работа A равна изменению запаса энергии поля заряда Q , т.е. $A = W_N - W_\infty$. Считаем, что $W_\infty = 0$. Тогда $A = W_N - W_\infty = W_N$. Таким образом,

$$W_N = \int_{r=r_N}^{r=\infty} F_N dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_N^2} \int_{r=r_N}^{r=\infty} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_N}. \quad (1.6)$$

Потенциал электрического поля заряда Q в любой произвольной точке N по определению связан с энергией W_N соотношением

$$\varphi_N = \frac{W_N}{q}. \quad (1.7)$$

Из формулы (1.7) с учетом формул (1.2) и (1.6) можно получить выражение, аналогичное выражению (1.5) для расчета потенциала:

$$\varphi_N = \frac{W_N}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_N} = \xi_N r_N, \quad (1.8)$$

где ξ_N — напряженность поля заряда Q в точке N .

Потенциал бесконечно удаленной точки поля равен нулю, так как при $r = \infty$ из формулы (1.8) следует, что $\varphi_\infty = 0$.

Если электрическое поле создается не одним, а несколькими (например, m) точечными зарядами, то в соответствии с методом наложения потенциал произвольной точки N можно представить в виде алгебраической суммы потенциалов, созданных в данной точке каждым зарядом в отдельности:

$$\varphi_N = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_m. \quad (1.9)$$

Поскольку алгебраическая сумма величины — это сумма величины с учетом ее алгебраического знака, то алгебраическая сумма потенциалов — это сумма потенциалов, создаваемых зарядами, с учетом их алгебраического знака. При этом потенциал положительный, если работа по перемещению пробного заряда из исследуемой точки в бесконечность положительная, т.е. если работа совершается силами поля и направление перемещения совпадает с направлением напряженности в исследуемой точке. В противном случае потенциал считается отрицательным.

Из сказанного следует, что положительным потенциалом обладают точки поля положительного заряда, а отрицательным — точки поля отрицательного заряда.

Запишем в соответствии с выражением (1.8) соответственно потенциалы электрических полей зарядов Q_1 и Q_2 в точке A (см. рис. 1.2, a):

$$\varphi_1 = \xi_1 r_2 = 199,818 \cdot 0,03 = 5,99 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \xi_2 r_3 = 168,596 \cdot 0,04 = 6,74 \text{ В.}$$

Потенциалы φ_1 и φ_2 положительные, так как в обоих случаях работа совершается силами поля. Тогда согласно выражению (1.9) потенциал в точке А системы зарядов

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 = 5,99 + 6,74 = 12,73 \text{ В.}$$

При этом запас энергии W_A совместного электрического поля зарядов Q_1 , Q_2 и q в точке А в соответствии с методом наложения и формулой (1.7) можно записать в виде

$$W_A = \varphi_1 q + \varphi_2 q = \varphi_A q = 12,73 \cdot 2 \cdot 10^{-12} = 25,46 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

3. Влияние знака заряда Q_2 на характеристики электрического поля системы зарядов Q_1 и Q_2 в точке А. Изменение знака заряда Q_2 повлечет за собой изменение направлений напряженностей ξ_2 и ξ_A (см. рис. 1.2, б). При этом значения величин ξ_1 и ξ_2 не изменятся. Значение напряженности ξ_A также останется прежним, поскольку угол между ξ_1 и ξ_2 по-прежнему равен 90° ($180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$), т. е.

$$\xi_A = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Потенциал φ_2 в этом случае изменит знак, так как для перемещения пробного заряда в бесконечно удаленную точку требуется совершать работу против сил поля заряда Q_2 . Таким образом, $\varphi_2 = -6,74 \text{ В}$.

При отрицательном знаке заряда Q_2 потенциал в точке А

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 = 5,99 + (-6,74) = -0,75 \text{ В.}$$

Запас потенциальной энергии в исследуемой точке в этом случае

$$W_A = \varphi_A q = -0,75 \cdot 2 \cdot 10^{-12} = -1,5 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

1.3. Однородное электрическое поле

Задача 1.4. Две плоские тонкие параллельные металлические пластины А и Б (электроды), находящиеся в воздухе, подсоединены к источнику энергии (рис. 1.3, а). Расстояние d между электродами мало по сравнению с их линейными размерами и составляет 2 мм. Площадь каждой пластины $5 \times 5 \text{ см}^2$. При замкнутом ключе S напряжение между электродами $U_{AB} = 300 \text{ В}$.

Вычислить напряженность поля между электродами, заряд на каждом из них и запас прочности диэлектрика (воздуха). Постро-

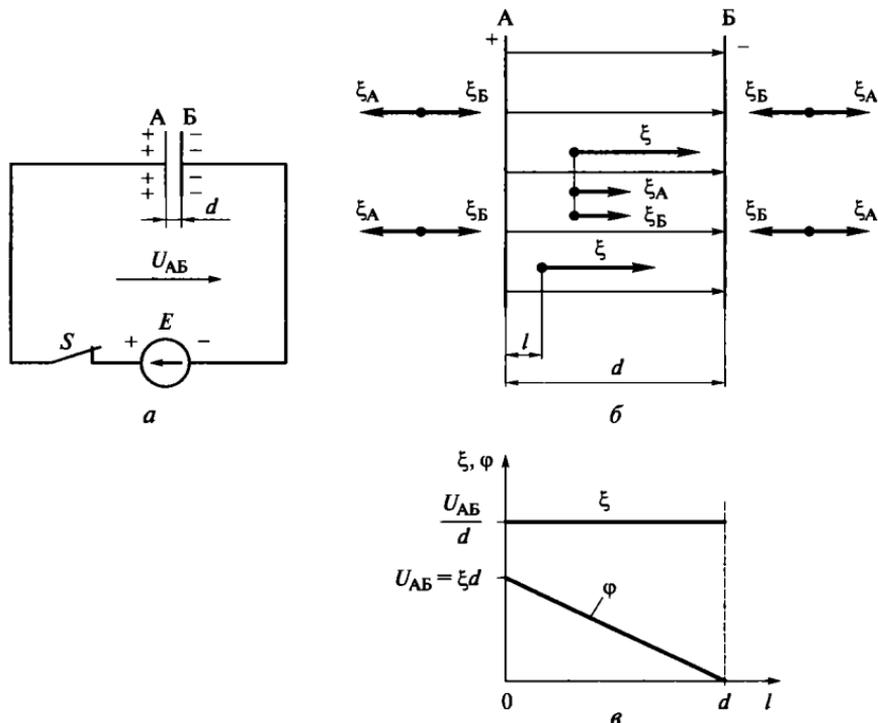


Рис. 1.3. Электрическое поле двух разноименно заряженных пластин: *а* — электрическая схема зарядки пластин; *б* — векторы напряженности поля; *в* — графики зависимостей напряженности поля ξ и потенциала φ от расстояния l

ить графики изменения напряженности и потенциала между электродами в зависимости от расстояния l (рис. 1.3, б).

Определить, как изменится электрическое поле между электродами при размыкании ключа S . Оценить, как повлияют на характеристики электрического поля (напряженность ξ , заряд Q на каждом электроде и напряжение U_{AB}): изменение расстояния между электродами; заполнение пространства между электродами диэлектриком с большей относительной проницаемостью, чем у воздуха; размещение проводящей пластины между электродами.

Решение. 1. Вычисление напряженности поля между пластинами, зарядов пластин и запаса прочности диэлектрика. После замыкания ключа S (см. рис. 1.3, *а*) пластины А и Б заряжаются: на пластине А, присоединенной к положительному выводу источника энергии, накапливается заряд $+Q_A$, а на пластине Б, присоединенной к отрицательному выводу, — заряд $-Q_B$, причем $|Q_A| = |Q_B| = Q$. Заряды пластин создают в окружающем пространстве электрическое поле.

По условию задачи расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, поэтому пластины можно считать бесконечными. Известно, что между двумя бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскими проводящими пластинами образуется однородное поле. Однородным является поле, в каждой точке которого напряженности имеют равные значения и одинаковые направления. Электрическое поле двух параллельных бесконечных плоскостей, несущих разноименные заряды одинаковой плотности, определяется наложением полей положительной и отрицательной пластин.

Согласно теореме Остроградского — Гаусса напряженности ξ_A и ξ_B полей заряженных пластин А и Б имеют одинаковые значения во всех точках окружающего их пространства на любом расстоянии от пластин. Следовательно, во всех точках наружного пространства (на рис. 1.3, б слева от пластины А и справа от пластины Б) напряженности этих разноименно заряженных пластин (ξ_A и ξ_B) взаимно скомпенсированы и их результирующая напряженность равна нулю: $\xi = \xi_A - \xi_B = 0$.

В пространстве между пластинами их поля складываются. При этом результирующая напряженность, равная сумме двух одинаковых по значению и одинаково направленных напряженностей ξ_A и ξ_B , одинакова в каждой точке пространства между пластинами:

$$\xi = \xi_A + \xi_B = 2\xi_A = 2\xi_B = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \text{const}, \quad (1.10)$$

где $\sigma = dQ/dS$ — поверхностная плотность заряда; S — площадь поверхности пластины.

При условии, что заряд Q распределяется по поверхности пластин равномерно, $\sigma = dQ/dS = Q/S$.

Напряжение между пластинами А и Б (см. рис. 1.3, б) связано с напряженностью простым соотношением

$$U_{AB} = \xi d. \quad (1.11)$$

Согласно формуле (1.11) для рассматриваемой задачи напряженность

$$\xi = U_{AB}/d = 300/2 = 150 \text{ В/мм} = 150 \text{ кВ/м}.$$

Заряд Q можно выразить через напряженность ξ из формулы (1.10):

$$Q = \sigma S = \xi S \epsilon \epsilon_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, заряд пластин Q пропорционален напряженности поля ξ и площади пластин S и зависит от диэлектрической проницаемости среды, окружающей пластины.

Для рассматриваемой задачи согласно формуле (1.12) заряд

$$\begin{aligned} Q &= Q_A = -Q_B = \xi S \varepsilon \varepsilon_0 = \\ &= 150\,000 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} = 3,32 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.} \end{aligned}$$

Согласно определению запас прочности диэлектрика

$$k_{\text{пр}} = \xi_{\text{пр}} / \xi. \quad (1.13)$$

Так как воздух «пробивается» при напряженности $\xi_{\text{пр}} = 3 \text{ кВ/мм}$, а в рассматриваемом случае $\xi = 150 \text{ В/мм}$, то запас прочности диэлектрика

$$k_{\text{пр}} = \xi_{\text{пр}} / \xi = 3\,000 / 150 = 20.$$

2. Определение характера изменения напряженности ξ и потенциала φ электростатического поля в пространстве между заряженными пластинами в зависимости от расстояния l при удалении от положительно заряженной пластины А. Согласно теореме Остроградского — Гаусса напряженность поля ξ одинакова ($\xi = \text{const}$) на любом расстоянии l (от 0 до d) от положительно заряженной пластины. В соответствии с формулой (1.11) напряженность поля ξ равна отношению напряжения между точками поля к расстоянию между ними. Так как напряжение равно разности потенциалов между соответствующими точками поля, с учетом формулы (1.11) можно записать:

$$\varphi_A - \varphi_B = \xi d;$$

$$\varphi_A - \varphi = \xi l.$$

Вычитая полученные уравнения, определим зависимость потенциала φ точки поля (находящейся на расстоянии l от пластины А) от расстояния l :

$$\varphi - \varphi_B = \xi d - \xi l = \xi(d - l).$$

Приняв потенциал пластины Б за начало отсчета потенциалов ($\varphi_B = 0$), получим

$$\varphi = \xi(d - l). \quad (1.14)$$

Самый высокий потенциал имеет положительно заряженная пластина А. Так как для нее расстояние $l = 0$, согласно формуле (1.14) получим потенциал

$$\varphi_A = \xi d,$$

что соответствует формуле (1.11).

На рис. 1.3, в представлены графики изменения напряженности ξ и потенциала ϕ при удалении от положительно заряженной пластины А (см. рис. 1.3, б).

Таким образом, по мере приближения точек к пластине Б, т. е. по мере увеличения расстояния l , потенциал ϕ уменьшается по линейному закону.

3. Оценка влияния отключения источника энергии на электрическое поле между электродами. Если считать среду, окружающую электроды, абсолютным изолятором, то электрическое поле заряженных пластин — электродов — не исчезнет и после размыкания ключа S , т. е. заряды Q на электродах и напряженность поля ξ между электродами сохранят прежние значения. В действительности всякая среда (в данном случае — воздух) обладает определенной проводимостью. Следовательно, заряды электродов Q_A и $-Q_B$ будут постепенно нейтрализовать друг друга, а напряженность электрического поля будет медленно уменьшаться. Для подзарядки электродов источник энергии должен быть подключен к электродам, т. е. ключ S должен быть замкнут.

4. Оценка влияния расстояния между электродами на характеристики электрического поля электродов. Электрическое поле между заряженными электродами характеризуется значениями напряженности ξ , заряда Q на каждом электроде и напряжения U_{AB} . Изменение расстояния между электродами по-разному влияет на характеристики электрического поля: в зависимости от того, подключен источник питания к электродам или отключен. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Ключ S замкнут. В случае идеального источника E , изображенного на рис. 1.3, а, т. е. когда его внутренним сопротивлением можно пренебречь, $U_{AB} = E = \text{const}$ (где E — ЭДС источника). Очевидно, что при подключенном источнике изменение расстояния между электродами не влияет на напряжение U_{AB} . При этом напряженность ξ поля и заряды Q электродов изменятся, так как согласно формуле (1.11) напряженность ξ обратно пропорциональна расстоянию d между электродами, а заряд Q согласно формуле (1.12) прямо пропорционален напряженности ξ . В частности, уменьшение расстояния d в n раз повлечет за собой увеличение напряженности поля ξ и заряда Q во столько же раз (дополнительный заряд поступит от источника).

Ключ S разомкнут. При изменении расстояния между заряженными электродами при условии, что окружающая среда является идеальным диэлектриком (абсолютным изолятором), заряды Q электродов останутся неизменными. Следовательно, на напряженность ξ поля тоже не изменится, так как $\xi = Q / (S \epsilon_0 \epsilon)$

Напряжение между электродами U_{AB} изменится прямо пропорционально расстоянию d , так как $U_{AB} = \xi d$. В частности, при уменьшении расстояния между заряженными электродами в n раз напряжение на них уменьшится также в n раз. Уменьшение напряжения свидетельствует об уменьшении энергии электрического поля и преобразовании ее в энергию другого вида, например в тепло.

5. Оценка влияния относительной проницаемости диэлектрика, заполняющего пространство между электродами, на характеристики электрического поля. Здесь также необходимо рассмотреть два случая: ключ S замкнут и ключ S разомкнут.

Ключ S замкнут. В этом случае напряженность $\xi = U_{AB}/d$ постоянна (так как напряжение источника $U_{AB} = E$ постоянно, а расстояние d неизменно) независимо от относительной проницаемости диэлектрика. Заряды электродов ($Q_A = -Q_B = Q = \xi S \epsilon \epsilon_0$) находятся в прямой пропорциональной зависимости от относительной проницаемости диэлектрика ϵ , т. е. чем больше ϵ , тем больше заряд на электродах. В частности, при замкнутом ключе и заполнении пространства между электродами диэлектриком, имеющим бóльшую относительную проницаемость, чем воздух, заряд Q на электродах будет больше в ϵ_2/ϵ_1 раз, чем в воздушной среде (здесь ϵ_2 — относительная проницаемость нового диэлектрика; $\epsilon_1 = 1$ — относительная проницаемость воздуха; $\epsilon_2 > \epsilon_1$).

Ключ S разомкнут. При размыкании ключа заряд Q на электродах останется прежним. Напряженность поля $\xi = Q/(S \epsilon \epsilon_0)$ находится в обратной пропорциональной зависимости от относительной проницаемости ϵ диэлектрика. В частности, при разомкнутом ключе и заполнении пространства между электродами диэлектриком, имеющим бóльшую относительную проницаемость, чем воздух, напряженность ξ поля будет меньше в ϵ_2/ϵ_1 раз, чем в воздушной среде.

6. Влияние на характеристики поля (ξ , Q и U_{AB}) проводящей пластины, помещенной между электродами. Если в электрическое поле с напряженностью ξ , существующее между электродами А и Б (рис. 1.4, а), поместить проводящую пластину В, в силу явления электростатической индукции в этой пластине произойдет разделение зарядов. Индуцированные на пластине В заряды создадут внутреннее поле с напряженностью $\xi_{вн}$, направленное навстречу полю электродов. Поскольку зарядов в проводнике всегда достаточно для компенсации любого по размеру внешнего поля, то $\xi_{вн} = \xi$ и результирующая напряженность поля внутри проводника равна нулю:

$$\xi_{рез} = \xi - \xi_{вн} = 0.$$

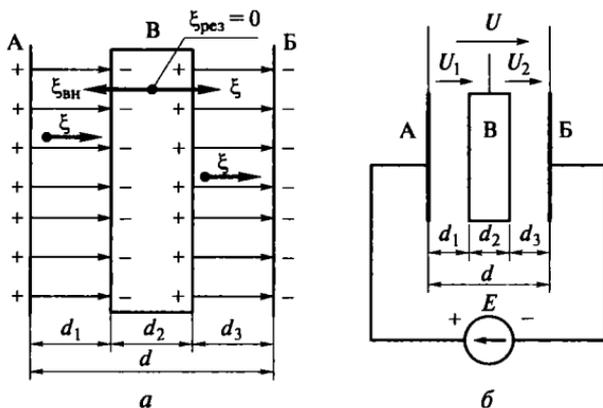


Рис. 1.4. Размещение металлической пластины между электродами:
a — картина электрического поля; *б* — схема зарядки пластин

Вследствие этого внутри проводника происходит разрыв линий напряженности.

Представим напряжения U_{AB} и U_{BB} на участках d_1 и d_3 силовых линий как разность соответствующих потенциалов. Тогда согласно формуле (1.11) получим

$$\varphi_A - \varphi_B = \xi d_1;$$

$$\varphi_B - \varphi_B = \xi d_3.$$

Сложив полученные уравнения, найдем напряжение между электродами

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \xi(d_1 + d_3). \quad (1.15)$$

Так как $d_1 + d_3 = d - d_2$, то из выражения (1.15) получим

$$U_{AB} = \xi(d - d_2). \quad (1.16)$$

Итак, из выражения (1.16) следует, что введение в пространство между электродами проводящей пластины равносильно сближению электродов на ширину этой пластины.

1.4. Плоский конденсатор

Задача 1.5. Определить расстояние d между пластинами и запас прочности $k_{гр}$ плоского конденсатора (см. рис. 1.3, *a*) емкостью $C = 1770$ пФ (1 пФ $= 1 \cdot 10^{-12}$ Ф), если рабочее напряжение $U = 380$ В, площадь каждой пластины $S = 5$ см² и в качестве ди-

электрика применена слюда, относительная диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon = 6$, а электрическая прочность (напряженность пробоя) $\xi_{\text{пр}} = 88 \cdot 10^6$ В/м (приложение 2).

Определить размеры конденсатора (d и S), обеспечивающие ту же емкость C и запас прочности $k_{\text{пр}}$ конденсатора при неизменном рабочем напряжении U , если заменить слюду между пластинами конденсатора парафинированной бумагой ($\varepsilon = 4,3$; $\xi_{\text{пр}} = 15 \cdot 10^6$ В/м). Оценить, как повлияет на размеры конденсатора увеличение его запаса прочности при неизменной емкости.

Решение. 1. Определение расстояния d между пластинами и запаса прочности $k_{\text{пр}}$ плоского конденсатора при использовании в качестве диэлектрика слюды. Известно, что емкость плоского конденсатора определяется его параметрами:

$$C = \frac{S\varepsilon\varepsilon_0}{d}, \quad (1.17)$$

откуда расстояние между пластинами

$$d = \frac{S\varepsilon\varepsilon_0}{C} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{1770 \cdot 10^{-12}} = 0,015 \text{ мм.}$$

Напряженность поля между пластинами плоского конденсатора согласно формуле (1.11)

$$\xi = \frac{U}{d} = \frac{380}{0,015 \cdot 10^{-3}} = 25,3 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

Запас электрической прочности диэлектрика согласно формуле (1.13)

$$k_{\text{пр}} = \frac{\xi_{\text{пр}}}{\xi} = \frac{88 \cdot 10^6}{25,3 \cdot 10^6} = 3,5.$$

2. Определение размеров конденсатора при замене диэлектрика. Электрическая прочность при замене диэлектрика уменьшится в m раз, $m = \xi_{\text{пр. слюды}} / \xi_{\text{пр. бумаги}}$.

Сохранение запаса электрической прочности $k_{\text{пр}}$ согласно формуле (1.13) может быть обеспечено уменьшением во столько же раз напряженности поля: $\xi' = \xi / m$ (здесь и далее штрихом обозначаются новые значения величин).

Уменьшение напряженности поля при неизменном напряжении питания согласно выражению (1.11) можно обеспечить увеличением расстояния d в m раз: $d' = dm$.

При этом для обеспечения неизменной емкости конденсатора согласно формуле (1.17) требуется увеличить произведение $S\varepsilon$ в m раз: $S'\varepsilon' = S\varepsilon m$, откуда $S' = S\varepsilon m/\varepsilon'$.

Тогда необходимые размеры конденсатора при замене слюды ($\varepsilon = 6$) парафинированной бумагой ($\varepsilon' = 4,3$) определяются следующим образом:

$$m = \frac{\xi_{\text{пр.слюды}}}{\xi_{\text{пр.бумаги}}} = \frac{88 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} = 5,87;$$

$$d' = dm = 0,015 \cdot 5,87 = 0,088 \text{ мм};$$

$$S' = S \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} m = 5 \frac{6}{4,3} 5,87 = 40,93 \text{ см}^2.$$

Таким образом, для обеспечения заданных условий при замене диэлектрика в конденсаторе необходимо увеличить толщину диэлектрика в 5,87 раз и площадь пластин в $S'/S = 40,93/5 = 8,186$ раза.

3. Оценка влияния размеров конденсатора на его запас прочности. Как видно из выражения (1.13), запас прочности $k_{\text{пр}}$ определяется пробивной напряженностью диэлектрика $\xi_{\text{пр}}$ и напряженностью поля ξ между обкладками конденсатора. Следовательно, при неизменном диэлектрике увеличение $k_{\text{пр}}$ достигается уменьшением напряженности ξ поля во столько же раз.

При неизменном напряжении источника энергии согласно выражению (1.11) уменьшить напряженность ξ можно увеличением расстояния d между пластинами (обкладками) конденсатора во столько же раз.

При увеличении расстояния d между пластинами конденсатора при неизменном диэлектрике согласно формуле (1.17) емкость может сохранить свое прежнее значение при увеличении площади каждой из пластин во столько же раз.

Например, в рассматриваемой задаче при использовании слюдяного диэлектрика увеличить $k_{\text{пр}}$ в 2 раза (т. е. с 3,5 до 7) можно, соответственно увеличив расстояние d с 0,015 до 0,03 мм и площадь S с 5 до 10 см².

На практике конденсаторы выполняются в большинстве случаев с запасом прочности $k_{\text{пр}} = 2 \dots 3$. В редких случаях $1,5 \leq k_{\text{пр}} < 2,0$ или $3 < k_{\text{пр}} \leq 10$.

Как мы убедились, увеличение запаса прочности приводит к увеличению размеров и, следовательно, стоимости конденсаторов, т. е. без особой необходимости не следует стремиться к увеличению запаса прочности конденсатора.

1.5. Цилиндрический конденсатор

Задача 1.6. Медная жила освинцованного одножильного кабеля отделена от свинцовой оболочки резиновой изоляцией. Сечение жилы 16 мм^2 . К кабелю подведено напряжение $U = 10 \text{ кВ}$.

Определить, при какой толщине a резиновой изоляции ($\epsilon = 4$; $\xi_{\text{пр}} = 18 \cdot 10^6 \text{ В/м}$) напряженность электрического поля в ней не превышает $6 \cdot 10^6 \text{ В/м}$, и каковы при этом прочности и емкость одножильного кабеля длиной 1 м .

Решение. 1. Вычисление необходимой толщины резиновой изоляции. Представим кабель как цилиндрический конденсатор (рис. 1.5) и воспользуемся известным выражением, связывающим напряженность поля ξ в некоторой точке между обкладками цилиндрического конденсатора, находящейся на расстоянии r от центра, и напряжением U , подведенным к обкладкам:

$$\xi = \frac{U}{r \ln(R_2/R_1)}. \quad (1.18)$$

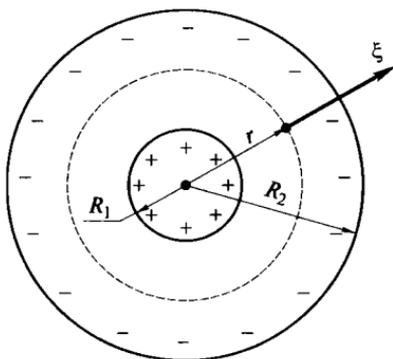
Из формулы (1.18) следует, что напряженность поля внутри кабеля имеет максимальное значение на поверхности жилы, т.е. при $r = R_1$

$$\xi_{\text{max}} = \frac{U}{R_1 \ln(R_2/R_1)}. \quad (1.19)$$

Так как по условию задачи напряженность не должна превышать заданного значения, то $\xi_{\text{max}} = 6 \cdot 10^6 \text{ В/м}$.

Радиус медной жилы

$$R_1 = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 2,26 \text{ мм.}$$



Радиус свинцовой оболочки R_2 определим из выражения (1.19):

$$\begin{aligned} \ln \frac{R_2}{R_1} &= \frac{U}{\xi_{\text{max}} R_1} = \\ &= \frac{10\,000}{6 \cdot 10^6 \cdot 2,26 \cdot 10^{-3}} = 0,74, \end{aligned}$$

Рис. 1.5. Цилиндрический конденсатор

откуда

$$R_2 = R_1 e^{0,74} = 2,26 e^{0,74} = 2,26 \cdot 2,1 = 4,75 \text{ мм.}$$

Толщина изоляции $a = R_2 - R_1 = 4,75 - 2,26 = 2,49 \text{ мм.}$

2. Определение запаса прочности кабеля. Согласно формуле (1.13) запас прочности резиновой изоляции

$$k_{\text{пр}} = \frac{\xi_{\text{пр}}}{\xi} = \frac{18 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^6} = 3.$$

3. Вычисление емкости кабеля. Емкость цилиндрического конденсатора зависит от параметров кабеля и определяется по формуле

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (1.20)$$

где l — длина кабеля.

Согласно формуле (1.20) емкость одного метра кабеля

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{\ln(4,75/2,26)} = 300 \text{ пФ.}$$

1.6. Расчет емкостей проводников

Задача 1.7. Рассчитать емкость Земли, если ее радиус R составляет 6 357 км.

Решение. 1. Выражение емкости уединенной сферы через ее параметры. Емкость Земли определим как емкость уединенной сферы (рис. 1.6). Для этого представим уединенную сферу как одну из обкладок (внутреннюю) сферического конденсатора с радиусом R , наружная сферическая поверхность которого отнесена в бесконечность.

Согласно теореме Остроградского — Гаусса напряженность ξ электрического поля между обкладками конденсатора в точках, расположенных на

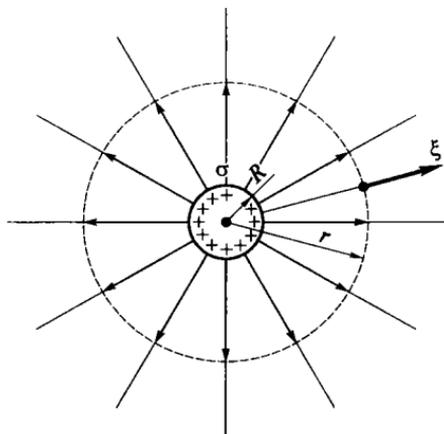


Рис. 1.6. Электрическое поле заряженной сферы

эквипотенциальной поверхности с радиусом $r > R$, определяется только зарядом внутренней сферы конденсатора.

Заряд сферы создает поле, напряженность которого вычисляется по формуле

$$\xi = \frac{\sigma R^2}{\epsilon \epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{R^2}{\epsilon \epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2}. \quad (1.21)$$

Поскольку поле между обкладками сферического конденсатора неоднородно, представим расстояние $(r - R)$ состоящим из бесконечно малых отрезков, в пределах которых напряженность заметно не изменяется. Тогда напряжение между обкладками сферического конденсатора в соответствии с формулой (1.11)

$$U = \int_R^{\infty} \xi dr. \quad (1.22)$$

Подставив выражение (1.21) в формулу (1.22), получим

$$\begin{aligned} U &= \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_R^{\infty} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 R}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Согласно определению емкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (1.24)$$

Подставив выражение (1.23) в выражение (1.24), получим формулу для расчета емкости уединенной сферы:

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi \epsilon \epsilon_0 R. \quad (1.25)$$

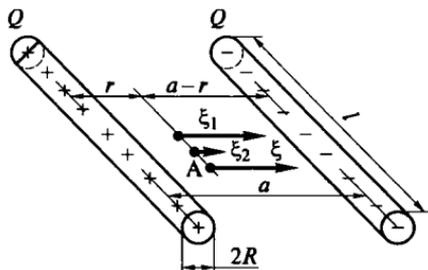
2. Расчет емкости Земли. По формуле (1.25), учитывая, что Землю окружает воздух ($\epsilon = 1$), найдем емкость Земли:

$$C = 4\pi \epsilon \epsilon_0 R = 4\pi \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 357 \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Ф.}$$

Задача 1.8. Определить емкость воздушной двухпроводной линии (рис. 1.7), длина которой $l = 1$ км, а диаметр $2R = 9$ мм, если расстояние a между проводами составляет 60 см.

Решение. Емкость двухпроводной линии определяется по формуле

Рис. 1.7. Двухпроводная линия



$$C = \frac{\pi \epsilon \epsilon_0 l}{\ln(a/R)}, \quad (1.26)$$

при заданных условиях:

$$C = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3}{\ln(60 \cdot 10^{-2} / 4,5 \cdot 10^{-3})} = 5,685 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 5685 \text{ пФ}.$$

1.7. Задачи для самостоятельного решения

1.9. Напряженность поля точечного заряда, находящегося в вакууме на расстоянии 40 мм от заряда, равна 75 кВ/м. Определить этот заряд.

1.10. Точечный заряд $+Q$, находящийся в воздухе на расстоянии $r_1 = 2$ см от заряда, создает потенциал $\phi_1 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ В. Определить заряд Q , а также потенциал ϕ_2 и напряженность ξ_2 поля на расстоянии $r_2 = 1$ см от заряда.

1.11. Металлический шарик диаметром 2 см находится в воздухе и имеет заряд $3 \cdot 10^{-10}$ Кл. Вычислить радиусы всех равнопотенциальных поверхностей заряженного шарика, потенциалы которых отличаются на 50 В, приняв потенциал бесконечно удаленной точки равным нулю.

1.12. На расстоянии 15 см справа от точечного заряда $+4q$ находится точечный заряд $+q$. Найти положение точки поля, в которой напряженность равна нулю, и оценить, как изменится положение искомой точки при изменении знака заряда q .

1.13. Точечный заряд Q в воздухе на расстоянии r создает потенциал электрического поля ϕ . Определить заряд, который создаст такой же потенциал в дистиллированной воде ($\epsilon = 80$).

1.14. Точечный заряд $Q = -3 \cdot 10^{-5}$ Кл находится в масле ($\epsilon = 2,25$). Определить значения и направления напряженности ξ поля заряда Q в точке А, находящейся на расстоянии 50 см от заряда, и силы F , действующей на пробный заряд $q = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл, внесенный в точку А. Определить, как повлияет на величины ξ и F изменение знака пробного заряда q .

1.15. Напряжение между двумя точками А и Б электрического поля точечного заряда $U_{AB} = 7,2$ В. Заряд находится в воде ($\epsilon = 60$), а точки удалены от заряда соответственно на 10 и 50 см. Определить значение заряда.

1.16. Точечный заряд $Q = 2 \cdot 10^{-11}$ Кл находится в центре шарообразного воздушного пузырька диаметром 20 мм, образовавшегося в масле ($\epsilon = 2,26$). Определить напряженность электрического поля на внутренней и наружной поверхностях пузырька и напряжение электрического поля на границе двух сред (разность потенциалов между внутренней и наружной поверхностями пузырька).

1.17. Положительные точечные заряды Q_1 и $Q_2 = 2Q_1$ находятся в воздухе на расстоянии 5 см друг от друга. Сила их взаимодействия $F = 2,9 \cdot 10^{-5}$ Н. Определить значения зарядов, а также значения и направления напряженностей полей каждого из этих зарядов в отдельности в точке расположения другого заряда. Построить векторы сил, действующих на каждый заряд.

1.18. Два точечных заряда $Q_1 = 1 \cdot 10^{-7}$ Кл и $Q_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл находятся на расстоянии 50 см друг от друга в минеральном масле ($\epsilon = 2,25$). Вычислить напряженность и потенциал в точке, расположенной посередине между этими зарядами, и определить направление напряженности в указанной точке.

1.19. Три расположенных на одной прямой точечных заряда $Q_1 = Q_3 = -4 \cdot 10^{-6}$ Кл и $Q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся в вакууме. Заряд Q_2 размещен посередине между зарядами Q_1 и Q_3 на расстоянии 0,35 м от каждого из них. Определить силы, действующие на каждый из зарядов.

1.20. Определить разность потенциалов между двумя разноименно заряженными пластинами, разделенными воздушным промежутком длиной 5 мм, если поверхностная плотность заряда $\sigma = 1 \cdot 10^{-11}$ Кл/см².

1.21. Две плоские тонкие параллельные пластины подключили к источнику энергии (см. рис. 1.3, а). После зарядки, когда напряженность поля между пластинами составила $\xi = 200$ В/мм, отключили источник энергии и изменили расстояние между ними с 1 до 0,5 мм. Найти напряжения между пластинами до и после изменения расстояния между ними.

1.22. Пространство между металлическими плоскими пластинами заполнено парафинированной бумагой, имеющей электрическую прочность $\xi_{\text{пр}} = 15 \cdot 10^3$ В/мм. Расстояние между пластинами 0,3 мм. Определить максимально допустимое напряжение, которое можно подвести к пластинам при запасе прочности диэлектрика, равном 10.

1.23. В пространство между плоскими проводящими пластинами А и Б ввели металлический лист В (рис. 1.4, б). Вычислить напряженность поля ξ пластин и напряжения U_1 , U_2 , если $d_1 = d_3 = 1$ мм, $d_2 = 2$ мм, а напряжение между пластинами А и Б $U = 450$ В. Найти потенциалы пластин А и Б (ϕ_A и ϕ_B) при условии, что потенциал пластины В равен нулю ($\phi_B = 0$).

1.24. Напряжение между обкладками плоского воздушного конденсатора 220 В, расстояние между ними 1 мм, площадь каждой пластины 72 см^2 . Найти заряд каждой обкладки конденсатора.

1.25. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафинированной бумагой ($\epsilon = 4,3$) толщиной 2 мм. Площадь каждой пластины 20 см^2 . Определить, какое напряжение необходимо подвести к обкладкам конденсатора, чтобы заряд каждой из них составил $2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$.

1.26. Определить, как изменится напряженность электрического поля плоского конденсатора, если между его пластинами, находящимися на расстоянии 10 мм друг от друга, параллельно пластинам ввести металлический лист толщиной 2 мм.

1.27. Расстояние d между пластинами А и Б плоского конденсатора (см. рис. 1.4, б) равно 15 мм. В пространстве между пластинами на расстоянии $d_1 = 7 \text{ мм}$ от пластины А размещена металлическая пластина В толщиной $d_2 = 1 \text{ мм}$. Определить потенциал пластины В, если потенциалы пластин А и Б составляют соответственно: $\varphi_A = +65 \text{ В}$, $\varphi_B = -45 \text{ В}$.

1.28. Две пластины плоского конденсатора площадью 82 см^2 каждая изолированы друг от друга сухой кабельной бумагой толщиной 0,15 мм с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3,14$. Определить емкость конденсатора.

1.29. Плоский конденсатор со слюдяным диэлектриком ($\epsilon = 6$; $\xi_{\text{пр}} = 880 \text{ кВ/см}$) должен иметь емкость 200 пФ. Определить толщину диэлектрика и площадь пластины, обеспечивающие при напряжении 5 кВ трехкратный запас прочности.

1.30. В конденсаторе переменной емкости $C = 50 \dots 200 \text{ пФ}$ поворотом подвижных пластин 1, 2 (рис. 1.8) установили максимальную емкость и зарядили его от источника питания с напряжением 6,3 В. После зарядки конденсатор отключили от источника питания и установили в нем минимальную емкость. Определить, как при этом изменились напряжение на конденсаторе и энергия электрического поля конденсатора.

1.31. Найти емкость двух коаксиальных цилиндров длиной 0,5 м, разделенных слоем воздуха, если внешний диаметр внутреннего цилиндра 30 мм, а внутренний диаметр внешнего цилиндра 40 мм.

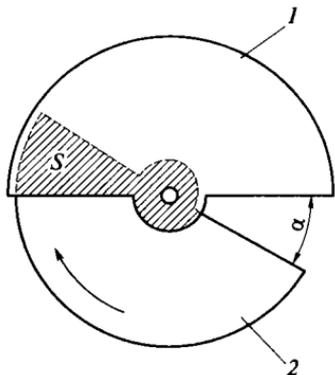


Рис. 1.8. Конденсатор переменной емкости:

1, 2 — подвижные пластины

1.32. Одножильный кабель (см. рис. 1.5) с изоляцией из парафинированной бумаги ($\epsilon = 4$; $\xi_{\text{пр}} = 18 \cdot 10^6$ В/м) имеет медную жилу с радиусом $R_1 = 3$ мм. Определить радиус свинцовой оболочки R_2 , одетой на бумажную изоляцию, если при запасе прочности $k_{\text{пр}} = 2$ между жилой и свинцовой оболочкой может быть приложено напряжение $U = 20$ кВ. Найти емкость C_0 кабеля, приходящуюся на 1 м его длины.

1.33. Найти толщину бумажной изоляции ($\epsilon = 2,5$; $\xi_{\text{пр}} = 14 \cdot 10^6$ В/м), которую необходимо нанести на медную жилу кабеля диаметром 10 мм, чтобы он выдерживал напряжение 18,5 кВ.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.9. $1,33 \cdot 10^{-8}$ Кл.

1.10. $1,1 \cdot 10^{-18}$ Кл; $1 \cdot 10^{-6}$ В; $1 \cdot 10^{-4}$ В/м.

1.11.

φ , В	0	50	100	150	200	250
r , мм	∞	54	27	18	13,5	10,8

1.12. 5 см от заряда $+q$ и 10 см от заряда $+4q$; 15 см от заряда $-q$ и 30 см от заряда $+4q$.

1.13. 80 Q.

1.14. 479 кВ/м; 0,144 Н; если знак заряда q положительный, векторы ξ_A и F_A направлены к заряду; при изменении знака заряда q изменится только направление вектора F_A .

1.15. $6 \cdot 10^{-9}$ Кл.

1.16. 1,8 кВ/м; 0,8 кВ/м; 10 В.

1.17. $2 \cdot 10^{-9}$ Кл; $4 \cdot 10^{-9}$ Кл; 7,22 кВ/м; 14,44 кВ/м.

1.18. 6,39 кВ/м; 4,8 кВ. Напряженность направлена к заряду Q_1 .

1.19. 0,29 Н; 0; 0,29 Н.

1.20. 56,5 В.

1.21. 200 В; 100 В.

1.22. 450 В.

1.23. 225 В/мм; 225 В; 225 В; 225 В; -225 В.

1.24. $1,4 \cdot 10^{-8}$ Кл.

1.25. 530 В.

1.26. Увеличится в 1,25 раза.

1.27. 10 В.

1.28. $1,5 \cdot 10^{-3}$ мкФ.

1.29. 0,17 мм; 6,42 см².

1.30. Напряжение увеличилось с 6,3 до 25,2 В, а энергия с $4 \cdot 10^{-9}$ до $16 \cdot 10^{-9}$ Дж.

1.31. 97 пФ.

1.32. 6,3 мм; 300 пФ/м.

1.33. 1,5 мм.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2.1. Электрический ток. Сопротивление. Закон Ома для участка цепи. Работа и тепловое действие тока

Задача 2.1. Потребитель получает электроэнергию от источника питания по двухпроводной линии электропередачи, выполненной из алюминиевого провода с сечением $S = 6 \text{ мм}^2$. Расстояние от источника до потребителя 300 м. Сила тока I в линии непосредственно после включения равна 50 А.

Определить сопротивление линии R , потерю напряжения U в линии при температуре окружающего воздуха 20°C и диапазон изменения сопротивления алюминиевого провода линии при изменении температуры окружающей среды t в пределах от $+30$ до -30°C .

Решение. 1. Расчет сопротивления линии и потери напряжения в линии при $t = 20^\circ\text{C}$. Так как линия двухпроводная, то длина провода

$$l = 2 \cdot 300 = 600 \text{ м.}$$

Сопротивление линейного протяженного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.1)$$

где ρ — удельное сопротивление проводника.

Так как при температуре 20°C удельное сопротивление алюминия $\rho_{20} = 0,028 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ (приложение 3), согласно формуле (2.1) сопротивление линии при 20°C

$$R_{20} = \rho_{20} \frac{l}{S} = 0,028 \cdot 600/6 = 2,8 \text{ Ом.}$$

Потери напряжения в линии определим по закону Ома для участка цепи:

$$U = R_{20}I = 2,8 \cdot 50 = 140 \text{ В.}$$

2. Расчет диапазона изменения сопротивления линии при изменении температуры окружающей среды. Сопротивление проводника при любой температуре определяется выражением

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)], \quad (2.2)$$

где R_1 и R_2 — сопротивления соответственно при начальном t_1 и конечном t_2 значениях температуры; α — температурный коэффициент сопротивления.

При $t_1 = 20^\circ\text{C}$ сопротивление $R_1 = R_{20} = 2,8$ Ом.

Сопротивления R_2 алюминиевого провода при значениях t_2 , равных $+30^\circ\text{C}$ и -30°C , найдем по формуле (2.2), учитывая при этом, что температурный коэффициент алюминия $\alpha = 0,005^\circ\text{C}^{-1}$ (приложение 3):

$$R_{+30} = R_{20}[1 + \alpha(t_2 - t_1)] = 2,8(1 + 0,005(30 - 20)) = 2,94 \text{ Ом.}$$

$$R_{-30} = R_{20}[1 + \alpha(t_2 - t_1)] = 2,8(1 + 0,005(-30 - 20)) = 2,1 \text{ Ом.}$$

Следовательно, диапазон изменения сопротивления алюминиевого провода

$$\Delta R = R_{+30} - R_{-30} = 2,94 - 2,1 = 0,84 \text{ Ом.}$$

Задача 2.2. Обмотка возбуждения электрической машины включена на напряжение $U = 120$ В. Температура воздуха в помещении $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Сразу после включения сила тока I_1 в цепи составляла 2 А.

Определить, до какой температуры нагревается обмотка возбуждения машины, намотанная медным проводом, если в рабочем режиме сила тока в ней $I_2 = 1,5$ А, и чему при этом равны относительное и абсолютное изменения сопротивления провода обмотки.

Решение. 1. Расчет температуры нагрева обмотки возбуждения машины. По закону Ома для участка цепи определим сопротивления обмотки возбуждения непосредственно после включения (R_1) и в рабочем режиме (R_2):

$$R_1 = U/I_1 = 120/2 = 60 \text{ Ом}; R_2 = U/I_2 = 120/1,5 = 80 \text{ Ом.}$$

Выражение для вычисления температуры нагрева обмотки возбуждения получим из формулы (2.2):

$$t_2 = t_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1 \alpha}. \quad (2.3)$$

Учитывая, что температурный коэффициент меди $\alpha = 0,004^\circ\text{C}^{-1}$ (приложение 3), согласно формуле (2.3), найдем

$$t_2 = t_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1 \alpha} = 20 + \frac{80 - 60}{60 \cdot 0,004} = 103,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

2. Расчет относительного и абсолютного изменений сопротивления провода обмотки. Из формулы (2.2) следует, что относительное приращение сопротивления пропорционально абсолютному приращению температуры:

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} = \alpha(t_2 - t_1). \quad (2.4)$$

Согласно формуле (2.4) относительное приращение сопротивления провода обмотки

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} = \alpha(t_2 - t_1) = 0,004(103,3 - 20) \cdot 100 = 33 \text{ } \%$$

Абсолютное изменение сопротивления

$$\Delta R = R_2 - R_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1} R_1 = 0,33 \cdot 60 = 20 \text{ Ом}.$$

Задача 2.3. Нагревательный элемент электрической печи выполнен из стальной проволоки длиной $l = 10$ м с диаметром $d = 0,15$ мм.

Определить, до какой температуры нагрелась проволока, если нагревательный элемент при включении на напряжение $U = 220$ В в рабочем режиме потребляет ток $I = 1,82$ А. Найти, чему при этом равно удельное сопротивление проволоки нагревательного элемента и сколько электроэнергии израсходует нагревательный элемент за сутки непрерывной работы. Оценить, какая проволока при одинаковом сечении должна быть короче — стальная, никелиновая или нихромовая — для обеспечения одинакового режима работы нагревательного элемента.

Решение. 1. Расчет температуры нагрева элемента. Определим площадь поперечного сечения проволоки:

$$S = \pi d^2/4 = \pi \cdot 0,15^2/4 = 0,018 \text{ мм}^2.$$

Определим сопротивление нагревательного элемента $R_1 = R_{20}$ при температуре $t_1 = 20$ °С по формуле (2.1), считая, что удельное сопротивление стали $\rho_{20} = 0,13$ Ом·мм²/м (приложение 3):

$$R_1 = R_{20} = \rho_{20} \frac{l}{S} = 0,13 \cdot 10/0,018 = 73,6 \text{ Ом}.$$

Сопротивление проволоки в горячем состоянии (в рабочем режиме) согласно закону Ома

$$R_2 = U/I = 220/1,82 = 120,9 \text{ Ом.}$$

По формуле (2.3) определим температуру нагрева проволоки t_2 , учитывая, что температурный коэффициент стали $\alpha = 0,005 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ (приложение 3):

$$t_2 = t_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1 \alpha} = 20 + \frac{120,9 - 73,6}{73,6 \cdot 0,005} = 148,5 \text{ }^\circ\text{C.}$$

2. Определение удельного сопротивления нагретой проволоки. Если изменения длины и площади поперечного сечения провода незначительны и ими можно пренебречь, то согласно формуле (2.1) удельное сопротивление ρ_r горячей проволоки увеличится пропорционально увеличению сопротивления:

$$\rho_r/\rho_{20} = R_2/R_{20} = 120,9/73,6 = 1,64.$$

Тогда

$$\rho_r = \rho_{20} \cdot 1,64 = 0,13 \cdot 1,64 = 0,214 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м.}$$

3. Расчет электроэнергии, израсходованной нагревательным элементом. Потребляемая нагревательным элементом электроэнергия определяется выражением

$$A_{\text{потр}} = P_{\text{потр}} t, \quad (2.5)$$

где $P_{\text{потр}} = UI$ — потребляемая элементом мощность; t — время непрерывной работы нагревательного элемента.

Подставив выражение $P_{\text{потр}} = UI$ в формулу (2.5), получим

$$A_{\text{потр}} = UIt. \quad (2.6)$$

Таким образом, согласно формуле (2.6) потребляемая нагревательным элементом электроэнергия

$$A_{\text{потр}} = UIt = 220 \cdot 1,82 \cdot 24 = 9,6 \text{ кВт} \cdot \text{ч.}$$

4. Сопоставление необходимых длин различных проволок для нагревательного элемента. Для обеспечения одинакового режима работы нагревательного элемента эти проволоки должны иметь одинаковое сопротивление. Поскольку по условию задачи сечение сравниваемых проволок одинаковое, то для двух сравниваемых проволок согласно формуле (2.1)

$$\rho_1 l_1 = \rho_2 l_2.$$

Из полученного соотношения следует, что при заданных условиях длины проволок обратно пропорциональны удельным сопротивлениям заданных материалов независимо от температурного режима работы:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (2.7)$$

Пусть индекс «1» соответствует никелину, а индекс «2» — нихрому.

Значения удельных сопротивлений рассматриваемых материалов при $t = 20^\circ\text{C}$ известны (приложение 3):

$$\rho_1 = 0,42 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}; \quad \rho_2 = 1,1 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}.$$

Тогда согласно формуле (2.7)

$$l_1/l_2 = \rho_2/\rho_1 = 1,1/0,42 = 2,6.$$

Пусть теперь индекс «1» соответствует стальной проволоке ($\rho_1 = 0,13 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$), а индекс «2» — нихромовой. Тогда

$$l_1/l_2 = \rho_2/\rho_1 = 1,1/0,13 = 8,5.$$

Таким образом, нихромовая проволока должна быть в 2,6 раза короче никелиновой и в 8,5 раз короче стальной.

2.2. Схемы и виды электрических цепей

Задача 2.4. Пояснить назначение элементов в схемах электрических цепей, показанных на рис. 2.1, и особенности использования разных принятых обозначений источников питания. Дать классификацию цепей и определить, к какому виду относится каждая из заданных цепей. Пояснить, как распределяются токи и напряжения в простых и сложных электрических цепях.

Решение. 1. Схема и элементы электрической цепи. На рис. 2.1 электрические цепи задачи представлены в виде *схем* — графических изображений элементов цепей (устройств) и их соединений с помощью условно-графических обозначений, установленных ГОСТами.

Все рассматриваемые цепи содержат *активные элементы* (источники энергии — аккумуляторы, генераторы) и *пассивные элементы* (потребители энергии), соединенные *проводами*. *Эксплуатационные устройства* в схемах задачи — нормально разомкнутый ключ S (рис. 2.1, а) и нормально замкнутый ключ S (рис. 2.1, б) — предназначены для включения и выключения цепей.

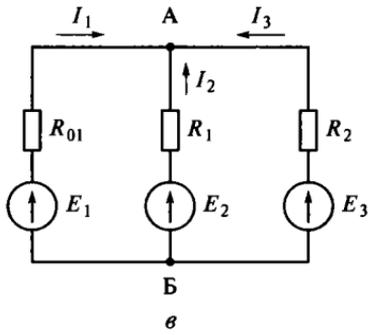
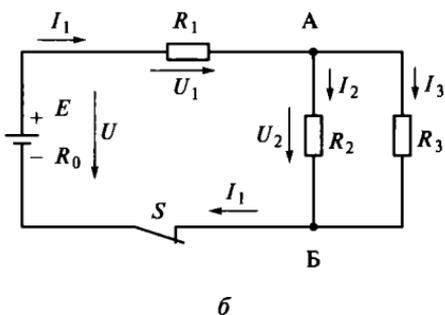
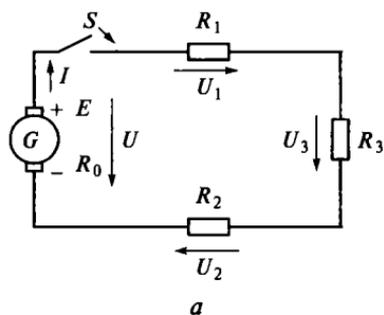


Рис. 2.1. Виды цепей:

а — неразветвленная цепь; *б* — простая разветвленная цепь с одним источником питания; *в* — сложная разветвленная цепь с несколькими источниками питания, включенными в разные ветви

Далее при анализе цепей данной задачи будем считать, что ключи в схемах находятся в замкнутом состоянии и в элементах цепи протекают токи.

Для изображения источников энергии в схемах заданных цепей использованы три разных принятых обозначения: генератора постоянного тока (см. рис. 2.1, *а*), аккумулятора (см. рис. 2.1, *б*) и произвольного источника ЭДС (рис. 2.1, *в*).

Произвольный источник энергии изображается в виде кружка со стрелкой внутри, указывающей направление ЭДС, принятое для идеального источника, т. е. источника, не обладающего внутренним сопротивлением. Отдельно в виде последовательного соединения с ЭДС изображается внутреннее сопротивление этого источника (левая ветвь схемы на рис. 2.1, *в*). В идеальном источнике (средняя и правая ветви схемы на рис. 2.1, *в*) внутреннее сопротивление или мало, а значит, им можно пренебречь, или учитывается в других сопротивлениях цепи.

Все схемы в рассматриваемой задаче можно считать *схемами замещения*, т. е. электрическими схемами, в которых реальные устройства цепи заменены эквивалентными элементами, отра-

жающими физические свойства реальных устройств.

Каждой из схем на рис. 2.1 может соответствовать целый ряд реальных цепей.

Например, если в качестве потребителей цепи (см. рис. 2.1, б) использованы резисторы с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 , то схема отображает реальную цепь. Такую же схему получим, если в схеме на рис. 2.2 заменим провода (линию) и потребители (осветительные лампы $H1$ и $H2$) цепи резисторами с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 , эквивалентными сопротивлениям линии и ламп. В этом случае схема на рис. 2.1, б будет схемой замещения реальной цепи, показанной на рис. 2.2.

Сопротивление считается эквивалентным, если за одно и то же время потребляет столько же энергии, сколько и заменяемое им устройство, т.е. потребляет такую же мощность, как и заменяемый потребитель.

2. Виды цепей и методы расчета токов и напряжений в электрических цепях. В соответствии с возможным методом расчета электрические цепи подразделяются на *простые* и *сложные*.

К *простым* относятся неразветвленные цепи и разветвленные цепи с одним источником питания.

Цепь, в которой нет разветвлений между элементами и во всех элементах которой протекает один и тот же ток, называется *неразветвленной*. Для расчета простой цепи применяется закон Ома.

В рассматриваемой задаче неразветвленной является цепь, показанная на рис. 2.1, а. Во всех элементах данной цепи при замкнутом ключе S протекает один и тот же ток, направленный от положительного полюса источника к отрицательному. При заданных ЭДС и сопротивлениях сила тока в цепи определяется по закону Ома для полной цепи:

Падения напряжений на сопротивлениях определяются по закону Ома для участка цепи:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_0}.$$

(Разновидности неразветвленных цепей постоянного и переменного токов, методы расчета режимов работы электрических цепей и их элементов рассматриваются в гл. 3 и 9.)

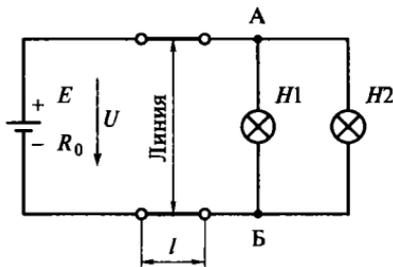


Рис. 2.2. Простая разветвленная цепь

Разветвленная цепь характеризуется наличием *узлов* (точек разделения или разветвления тока) и *ветвей* (участков без узлов с одинаковой силой тока).

Разветвленная цепь с одним источником питания посредством упрощения схемы (замены сопротивлений, соединенных последовательно и параллельно, эквивалентными сопротивлениями) сводится при расчете к неразветвленной, т. е. простой цепи.

Например, разветвленная цепь, показанная на рис. 2.1, б, имеет два узла (точки А и Б) и три ветви с токами I_1, I_2, I_3 . Она содержит один источник питания и относится к простым цепям.

(Методика расчета простых разветвленных цепей рассматривается в гл. 4.)

К *сложным* цепям относятся разветвленные цепи с несколькими источниками питания, включенными в разные ветви. В таких цепях число различных токов известно (оно равно числу ветвей), но направления этих токов заранее установить невозможно, они определяются в процессе расчета. Данные цепи при расчете не требуют преобразования схемы. Для расчета сложных цепей применяются законы Кирхгофа.

К сложным относится цепь, приведенная на рис. 2.1, в, которая имеет два узла (точки А и Б), три ветви с токами I_1, I_2, I_3 , направления которых показаны на схеме произвольно, и три источника энергии, включенные в разные ветви.

(Методы расчета сложных цепей рассматриваются в гл. 5.)

2.3. Задачи для самостоятельного решения

2.5. Определить количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за 5 мин, если в течение этого времени в нем поддерживалась сила тока, равная 2 А.

2.6. Амперметр имеет пределы измерения 0,25 А, 0,5 А и 1 А. Выбрать предел измерения силы тока и определить, на сколько делений отклонится стрелка прибора при значении силы тока 0,75 А, если шкала прибора имеет 100 делений.

2.7. В обмотке электрической машины протекает ток $I = 18$ А. Обмотка намотана проводом диаметром $d = 3$ мм. Определить плотность тока в обмотке.

2.8. Для оголенной проволоки из нихрома диаметром $d = 0,8$ мм допустимая сила тока $I = 3$ А. Определить допустимую плотность тока.

2.9. Для линии электропередачи использован алюминиевый провод сечением $S = 95$ мм² и длиной $l = 120$ км. Определить сопротивление линии при температуре 20 °С.

2.10. Провод длиной $l = 1,2$ км и сечением $S = 12,5$ мм² при температуре $t = 20$ °С имеет сопротивление $R_{20} = 12,5$ Ом. Определить удельное сопротивление материала провода и по справочным данным (приложение 3) установить, из какого материала изготовлен провод.

2.11. Определить, сколько потребуется метров никелиновой проволоки диаметром 0,05 мм для изготовления катушки с сопротивлением 10^5 Ом.

2.12. Электрическая лампочка при температуре $t_1 = 20$ °С имеет сопротивление $R_1 = 40$ Ом. Определить сопротивление лампочки в рабочем режиме после включения ее в цепь с напряжением 220 В, если вольфрамовая нить накалилась до температуры t_2 , равной 2020 °С. Определить, как изменится ток с момента включения лампочки до момента накала нити.

2.13. Резистор с номинальным сопротивлением 100 Ом при температуре 20 °С может быть намотан как из никелиновой, так и из манганиновой проволоки. Сравнить абсолютные и относительные изменения сопротивлений резисторов при изменении их температуры от 20 до 60 °С.

2.14. Определить диапазон изменения сопротивления алюминиевого провода линии электропередачи, если площадь поперечного сечения провода $S = 120$ мм², длина линии $l = 100$ км, а температура окружающей среды t изменяется в пределах от +30 до -30 °С.

2.15. Определить, как изменится проводимость проводника, если его сечение увеличить вдвое, и как при этом изменится удельная проводимость его материала.

2.16. Расход приемником электроэнергии за 5 сут непрерывной работы при напряжении 220 В составил 25 кВт·ч. Определить силу тока и сопротивление приемника.

2.17. Объяснить, почему провода, подводящие ток к электрической лампочке, практически не нагреваются, в то время как нить лампочки раскаляется добела.

2.18. Определить, какое количество теплоты в каждую секунду выделяет 75-ваттная лампочка при напряжении сети 220 В, если из всего количества потребляемой лампочкой энергии в световую энергию преобразуется только 2 %, и ею можно пренебречь.

2.19. Пояснить, можно ли при помощи контактной сварки соединить медные или серебряные детали.

2.20. Определить, к какому виду (к простой или сложной) относится цепь, показанная на рис. 2.3, при следующих условиях: а) ключ S разомкнут; б) ключ S замкнут; в) ключ S замкнут, источник E_2 отключен, а точки его подключения соединены проводником.

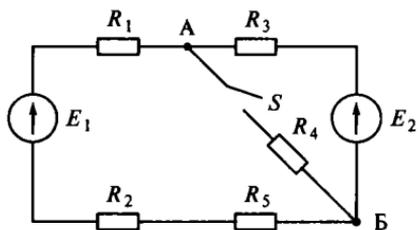


Рис. 2.3. Схема электрической цепи к задаче 2.20

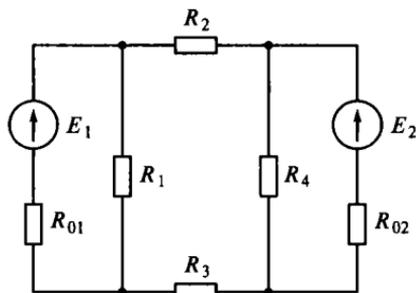


Рис. 2.4. Схема электрической цепи к задаче 2.21

2.21. Определить число узлов, ветвей и токов в цепи, показанной на рис. 2.4, и установить вид этой цепи.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.5. $1,5 \cdot 10^3$ Кл.

2.6. 1 А; 75 дел.

2.7. $2,55 \text{ А/мм}^2$.

2.8. 6 А/мм^2 .

2.9. 35,4 Ом.

2.10. $0,13 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$; сталь.

2.11. 467,5 м.

2.12. 400 Ом; уменьшится в 10 раз (с 5,5 до 0,55 А).

2.13. При повышении температуры на 40°C у резистора из никелиновой проволоки относительное (1,2 %) и абсолютное (1,2 Ом) изменения сопротивления на порядок выше, чем у резистора из манганиновой проволоки (соответственно 0,12 % и 0,12 Ом).

2.14. 7 Ом.

2.15. Проводимость увеличится в 2 раза; удельная проводимость не изменится.

2.16. 0,945 А; 233 Ом.

2.17. Провода и лампочка образуют замкнутую цепь, во всех элементах которой протекает один и тот же ток. Как известно, количество выделяющейся на участке цепи теплоты пропорционально квадрату тока и сопротивлению этого участка цепи. Сопротивление же проводов в сотни раз меньше сопротивления лампочки.

2.18. 18 кал.

2.19. Нельзя. Сопротивление деталей (медных или серебряных) сопоставимо с сопротивлением проводов. Следовательно, общее сопротивление внешнего участка цепи мало. При этом возникает недопустимо большой ток (перегрузка цепи), а следовательно, перегрев и возгорание проводов, т. е. аварийная ситуация.

2.20. а) простая неразветвленная цепь с двумя источниками;
б) сложная цепь с двумя источниками в разных ветвях, с двумя узлами, тремя ветвями и соответственно тремя токами; в) простая разветвленная цепь с одним источником, с двумя узлами, тремя ветвями и соответственно тремя токами.

2.21. 4 узла, 6 ветвей и соответственно 6 токов; цепь сложная с двумя источниками в разных ветвях.

НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА**3.1. Неразветвленная цепь с одним источником энергии**

Задача 3.1. В электрической цепи, показанной на рис. 3.1, *a*, протекает ток $I = 1,5$ А. Резисторы цепи имеют следующие сопротивления: $R_1 = 3,3$ Ом; $R_2 = 4,7$ Ом; $R_3 = 8,2$ Ом. Внутреннее сопротивление источника питания $R_0 = 0,5$ Ом.

Найти эквивалентное сопротивление внешнего участка рассматриваемой цепи, напряжения на выводах ее отдельных сопротивлений и напряжение на участке БД. Определить ЭДС источника питания и напряжение на его выводах. Найти мощность источника энергии, его КПД и мощности всех потребителей. Составить баланс мощностей цепи. Провести анализ показаний вольтметров на выводах источника и сопротивлениях цепи при возникновении неисправностей: обрыве одного из сопротивлений цепи и его коротком замыкании.

Решение. 1. Участки электрической цепи. Цепи с одним источником энергии принято разделять на два принципиально разных участка: внутренний и внешний.

Внутренний участок включает в себя источник энергии, а *внешний* — всю остальную цепь, т. е. все потребители (приемники энергии). Так, внутренний участок цепи на рис. 3.1, *a* представляет собой последовательное соединение ЭДС источника и его внутреннего сопротивления (левая часть схемы между точками А и З), а внешний участок — последовательное соединение сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 (правая часть схемы между точками А и З).

В общем случае понятие *участок* (без уточнения внутренний или внешний) используется для названия любой части цепи. Например, участок БД цепи на рис. 3.1, *a* представляет собой последовательное соединение сопротивлений R_1 и R_3 .

2. Определение эквивалентного сопротивления внешнего участка рассматриваемой цепи. Так как внешний участок цепи представляет собой последовательное

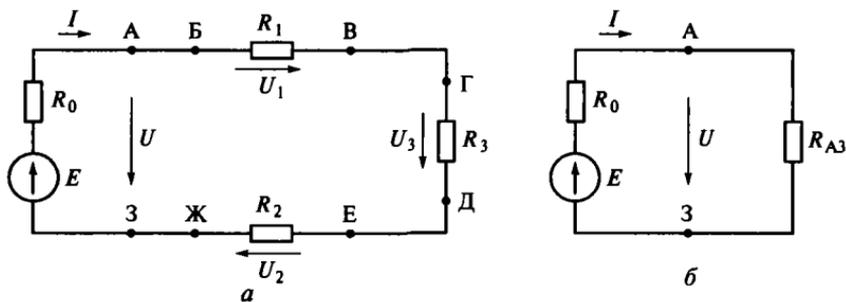


Рис. 3.1. Неразветвленная цепь:

а — схема с одним источником и несколькими потребителями; *б* — упрощенная схема цепи

соединение сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 , то их эквивалентное сопротивление относительно выводов А и 3 источника питания

$$R_{A3} = R_1 + R_2 + R_3. \quad (3.1)$$

Подставив числовые данные задачи в выражение (3.1), получим

$$R_{A3} = 3,3 + 4,7 + 8,2 = 16,2 \text{ Ом.}$$

Заменив последовательное соединение сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 сопротивлением R_{A3} , получим упрощенную эквивалентную схему (рис. 3.1, *б*) заданной цепи с таким же значением силы тока: $I = 1,5 \text{ А}$.

3. Определение напряжений на выводах отдельных сопротивлений, всего внешнего участка и участка БД. Напряжения или падения напряжений на участках цепи определяются по закону Ома для участка цепи:

$$U_1 = R_1 I = 3,3 \cdot 1,5 = 4,95 \text{ В}; \quad U_2 = R_2 I = 4,7 \cdot 1,5 = 7,05 \text{ В};$$

$$U_3 = R_3 I = 8,2 \cdot 1,5 = 12,3 \text{ В}; \quad U_{A3} = R_{A3} I = 16,2 \cdot 1,5 = 24,3 \text{ В.}$$

Напряжение на внешнем участке цепи U_{A3} можно определить и как сумму напряжений на отдельных сопротивлениях этого участка:

$$U_{A3} = R_{A3} I = (R_1 + R_2 + R_3) I = U_1 + U_2 + U_3. \quad (3.2)$$

Подставив числовые данные задачи в выражение (3.2), получим

$$U_{A3} = 4,95 + 7,05 + 12,3 = 24,3 \text{ В.}$$

Аналогично вычисляется напряжение на участке БД:

$$U_{БД} = U_1 + U_3 = 4,95 + 12,3 = 17,25 \text{ В}$$

или

$$U_{\text{БД}} = R_{\text{БД}} = (R_1 + R_3) I = (3,3 + 8,2)1,5 = 17,25 \text{ В.}$$

4. Определение ЭДС источника энергии и напряжения на его выводах. Выражение для ЭДС источника энергии неразветвленной цепи (см. рис. 3.1, а) найдем из закона Ома для полной цепи:

$$I = \frac{E}{R_{\text{АЗ}} + R_0}, \quad (3.3)$$

откуда

$$E = I(R_{\text{АЗ}} + R_0). \quad (3.4)$$

Согласно выражению (3.4) ЭДС источника энергии равна произведению силы тока в цепи на общее сопротивление этой цепи, т. е. ЭДС источника заданной цепи

$$E = 1,5(16,2 + 0,5) = 25,05 \text{ В.}$$

Напряжение U на выводах источника энергии равно напряжению на внешнем участке цепи $U_{\text{АЗ}}$:

$$U = U_{\text{АЗ}} = (R_1 + R_2 + R_3)I = 24,3 \text{ В,}$$

т. е. напряжение на выводах источника энергии определяется как произведение силы тока на общее сопротивление внешнего участка цепи.

Напряжение U можно найти и другим способом. Из выражения (3.3) следует, что

$$U = E - IR_0, \quad (3.5)$$

т. е. напряжение на выводах источника энергии можно определить как разность его ЭДС и падения напряжения на внутреннем сопротивлении.

Подставив числовые данные задачи в формулу (3.5), получим

$$U = 25,05 - 1,5 \cdot 0,5 = 24,3 \text{ В.}$$

5. Вычисление мощностей и КПД. Составление баланса мощностей. Мощность, развиваемая источником энергии,

$$P_{\text{ист}} = EI = 25,05 \cdot 1,5 = 37,575 \text{ Вт.}$$

Мощность, расходуемая на внутреннем сопротивлении источника,

$$P_0 = I^2 R_0 = 1,5^2 \cdot 0,5 = 1,125 \text{ Вт.}$$

Мощность, отдаваемая источником во внешнюю цепь,

$$P_{\text{потр}} = P_{\text{ист}} - P_0 = 37,575 - 1,125 = 36,45 \text{ Вт.}$$

Однако мощность, потребляемую внешним участком цепи, можно определить по другой формуле:

$$P_{\text{потр}} = U_{A3}I = 24,3 \cdot 1,5 = 36,45 \text{ Вт.}$$

КПД источника энергии

$$\eta = P_{\text{потр}}/P_{\text{ист}} = 36,45/37,575 = 0,97 = 97 \text{ \%}.$$

Вырабатываемая источником энергии мощность затрачивается в сопротивлениях пропорционально значениям сопротивлений участков цепи или падений напряжений на них:

$$P_1 = I^2 R_1 = U_1 I = 4,95 \cdot 1,5 = 7,425 \text{ Вт;}$$

$$P_2 = U_2 I = 7,05 \cdot 1,5 = 10,575 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = I^2 R_3 = U_3 I = 12,3 \cdot 1,5 = 18,45 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей для цепи на рис. 3.1, *a* запишем в виде

$$P_{\text{ист}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_0. \quad (3.6)$$

Убедимся в выполнении баланса мощностей. Мощность источника энергии, рассчитанная по формуле (3.6),

$$P_{\text{ист}} = 7,425 + 10,575 + 18,45 + 1,125 = 37,575 \text{ Вт,}$$

т.е. соответствует мощности источника, рассчитанной по формуле $P_{\text{ист}} = EI$.

6. Показания вольтметров при обрыве в сопротивлении R_3 . На рис. 3.2, *a* представлена схема измерения напряжений в цепи, приведенной на рис. 3.1, *a*. При обрыве сопротивления R_3 цепь остается замкнутой через вольтметр V_4 . Однако ток в цепи при этом незначителен и им можно пренебречь ($I = 0$), так как обеспечиваемые на практике сопротивления вольтметров весьма велики по сравнению с сопротивлениями цепи.

Вольтметры V_2 и V_3 измеряют соответственно напряжения U_1 и U_2 и при отсутствии тока в цепи согласно закону Ома для участка цепи покажут нуль: $U_1 = 0$; $U_2 = 0$.

Вольтметр V_1 измеряет напряжение U на выводах источника, которое при обрыве в цепи, т.е. при отсутствии в ней тока, согласно формуле (3.5) будет равно ЭДС источника:

$$U = E - IR_0 = E - 0 \cdot R_0 = E.$$

Вольтметр V_4 показывает напряжение U_3 , равное ЭДС:

$$U_3 = U - U_1 - U_2 = E - 0 - 0 = E.$$

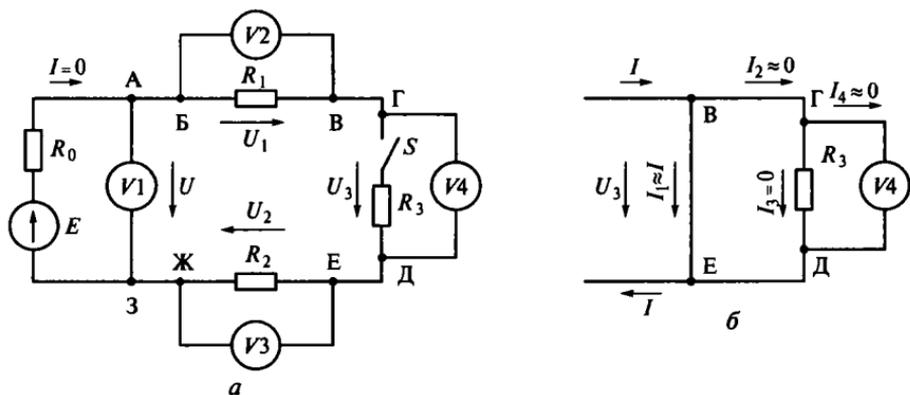


Рис. 3.2. Схемы измерения напряжений в цепи:

а — при обрыве сопротивления R_3 ; *б* — при коротком замыкании сопротивления R_3

В этом можно убедиться и следующим образом. Так как напряжения U_1 и U_2 равны нулю и на сопротивлениях R_1 и R_2 не происходит изменения потенциалов, потенциал точки Γ равен потенциалу точки A ($\varphi_\Gamma = \varphi_A$), а потенциал точки $Д$ равен потенциалу точки $З$ ($\varphi_Д = \varphi_З$). Следовательно, $\varphi_\Gamma - \varphi_Д = \varphi_A - \varphi_З$, или $U_3 = U = E$.

7. Показания вольтметров при коротком замыкании выводов B и E . Короткое замыкание участка цепи может произойти либо при непосредственном замыкании, т.е. при касании металлических выводов участка, либо при соединении этих выводов проводником. При коротком замыкании сопротивления R_3 (рис. 3.2, *б*) ток в цепи проходит через практически нулевое сопротивление перемычки BE , минуя сопротивление R_3 и подключенный к нему вольтметр V_4 , т.е. $I_1 \approx I$; $I_2 = I_3 = I_4 \approx 0$. При этом общее сопротивление короткозамкнутого участка $R_{BE} \approx 0$, а значит, падение напряжения на нем $U_3 = 0$ и вольтметр V_4 покажет нуль.

В результате короткого замыкания сила тока в цепи увеличится:

$$I = \frac{E}{R_0 + R_{A3}} = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_{BE} + R_2} = \frac{25,05}{0,5 + 3,3 + 0 + 4,7} = 2,95 \text{ А,}$$

напряжения U_1 и U_2 (а соответственно и показания вольтметров V_2 и V_3) возрастут почти в 2 раза, а напряжение U на выводах источника (и соответственно показание вольтметра V_1) уменьшится:

$$U_1 = R_1 I = 3,3 \cdot 2,95 = 9,73 \text{ В; } U_2 = R_2 I = 4,7 \cdot 2,95 = 13,86 \text{ В;}$$

$$U = E - IR_0 = 25,05 - 2,95 \cdot 0,5 = 23,6 \text{ В.}$$

8. Практическое применение последовательных соединений. Любая электрическая цепь с одним источником представляет собой последовательное соединение источника и внешнего участка цепи. С этой точки зрения последовательные соединения имеют широкое распространение.

Однако последовательный способ соединения потребителей во внешнем участке цепи имеет серьезный недостаток, который наглядно демонстрируют результаты анализа, представленные в п. 6 и 7 задачи.

Недостаток последовательного соединения заключается в зависимости работы каждого потребителя от исправности любого из потребителей. При повреждении одного из потребителей нарушается работа всех потребителей: при обрыве одного из потребителей обесточиваются все остальные потребители, при коротком замыкании одного из потребителей резко возрастает напряжение на остальных. Поэтому потребители энергии, образующие внешний участок цепи, редко соединяются последовательно. Исключения составляют те случаи, когда напряжение используемого источника превышает номинальное (рабочее) напряжение потребителей.

3.2. Источник ЭДС при переменной нагрузке. Режимы работы электрической цепи

Задача 3.2. Питание двигателей станков механического цеха производственного объекта осуществляется от генератора постоянного тока с ЭДС $E = 230 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $R_0 = 20 \text{ Ом}$. Число работающих двигателей — потребителей энергии в разное время суток различное, поэтому сила тока в цепи генератора во времени изменяется в широких пределах.

Составить схему замещения электрической цепи питания рассматриваемых потребителей энергии. Провести вычислительный эксперимент: выполнить расчет рабочих параметров исследуемой электрической цепи при изменении сопротивления нагрузки от 0 до 150 Ом. Построить графики зависимости рабочих параметров цепи от сопротивления нагрузки R и проанализировать режимы работы исследуемой цепи.

Решение. 1. Составление схемы замещения рассматриваемой в задаче электрической цепи. Используемый в задаче источник энергии (генератор) характеризуется ЭДС и внутренним сопротивлением, которое на порядок

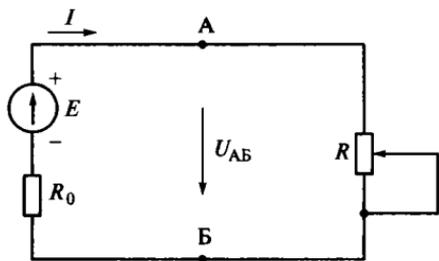


Рис. 3.3. Схема замещения электрической цепи с переменным сопротивлением внешнего участка

ниже общего сопротивления подключаемых потребителей. Такой источник энергии принято считать источником ЭДС. Таким образом, на схеме генератор можно представить в виде последовательного соединения идеальной ЭДС E и внутреннего сопротивления R_0 .

К генератору подсоединены потребители — обмотки двигателей станков. Провода, из которых выполнены обмотки двигателей, характеризуются сопротивлением. Следовательно, все потребители энергии рассматриваемой электрической цепи на схеме можно представить одним сопротивлением, эквивалентным общему сопротивлению подключаемых потребителей. Так как в разное время суток работает разное число станков, сопротивление потребителей изменяется в течение суток в широких пределах, а значит, потребителей энергии целесообразно представить в виде переменного сопротивления R .

Схема замещения, отражающая свойства исследуемой электрической цепи, показана на рис. 3.3.

2. Расчет рабочих параметров исследуемой электрической цепи. Электрическая цепь, изображенная на рис. 3.3, представляет собой неразветвленную цепь с одним источником энергии. Рассчитаем рабочие параметры этой электрической цепи по методике, рассмотренной в подразд. 3.1.

$$\text{Сила тока в цепи } I = \frac{E}{R + R_0}.$$

$$\text{Мощность источника } P_{\text{ист}} = EI.$$

$$\text{Мощность потребителя } P_{\text{потр}} = UI = I^2 R.$$

$$\text{Мощность потерь } P_0 = P_{\text{ист}} - P_{\text{потр}}.$$

$$\text{КПД источника } \eta = \frac{P_{\text{потр}}}{P_{\text{ист}}}.$$

Результаты такого расчета представлены в табл. 3.1.

3. Построение графиков и анализ режимов работы цепи при переменной нагрузке. По результатам расчета, представленным в табл. 3.1, на рис. 3.4 построены графики, демонстрирующие характер изменения силы тока I и мощностей $P_{\text{ист}}$, $P_{\text{потр}}$ и P_0 в зависимости от сопротивления R внешнего участка электрической цепи, показанной на рис. 3.3.

Изменение рабочих параметров в зависимости от сопротивления внешнего участка цепи

Исходные данные: $E = 230 \text{ В}; R_0 = 20 \text{ Ом}$								
$R, \text{ Ом}$	0	10	20	30	40	50	60	70
$I, \text{ А}$	11,5	7,7	5,8	4,6	3,8	3,3	2,9	2,6
$P_{\text{ист}}, \text{ Вт}$	2645	1763	1323	1058	882	756	661	588
$P_{\text{потр}}, \text{ Вт}$	0	588	661	635	588	540	496	457
$P_0, \text{ Вт}$	2645	1176	661	423	294	216	165	131
$\eta, \%$	0	33	50	60	67	71	75	78
$R, \text{ Ом}$	80	90	100	110	120	130	140	150
$I, \text{ А}$	2,3	2,1	1,9	1,8	1,6	1,5	1,4	1,4
$P_{\text{ист}}, \text{ Вт}$	529	481	441	407	378	353	331	311
$P_{\text{потр}}, \text{ Вт}$	423	394	367	344	324	306	289	275
$P_0, \text{ Вт}$	105,8	87,4	73,5	62,6	54,0	47,0	41,3	36,6
$\eta, \%$	80	82	83	85	86	87	88	88

Отрезки вертикальных прямых между кривыми $P_{\text{ист}}$ и $P_{\text{потр}}$ на рис. 3.4 (разности ординат $P_{\text{ист}}$ и $P_{\text{потр}}$) представляют собой мощности потерь энергии на внутреннем сопротивлении источника (P_0) для конкретных значений сопротивления R . Таким образом,

$$P_0 = P_{\text{ист}} - P_{\text{потр}}$$

В общем случае в цепи с изменяющимся в широких пределах сопротивлением внешнего участка можно установить три режима работы: два предельных — *режим холостого хода* (ХХ), в котором при включенном источнике внешняя цепь разомкнута, и *режим короткого замыкания* (КЗ), наблюдаемый при авариях,

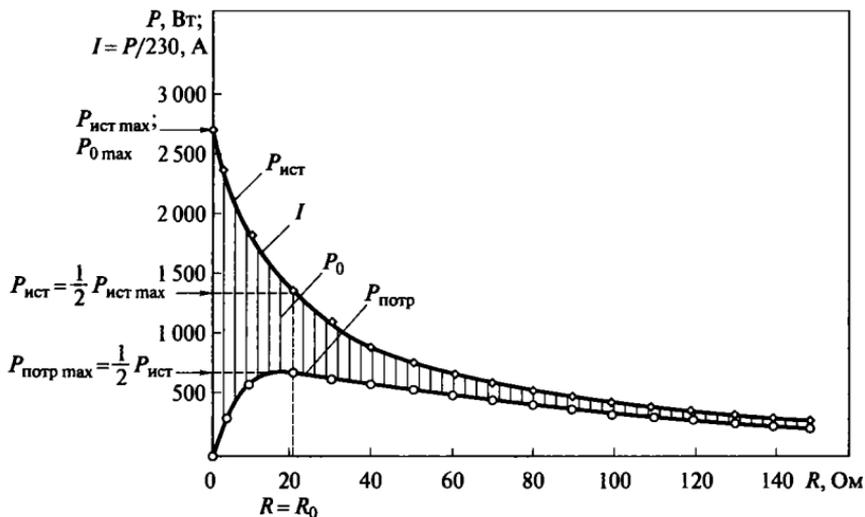


Рис. 3.4. Графики изменения тока и мощностей в цепи с переменным сопротивлением внешнего участка в зависимости от сопротивления этого участка

т. е. при замыкании выводов внешней цепи, а также режим, промежуточный между предельными режимами, называемый *рабочим* (РР).

Режим короткого замыкания ($R_{КЗ} = 0$). Данный режим характеризуется тем, что в нем сила тока в цепи и мощность, развиваемая источником, достигают максимальных значений. Так, в исследуемой цепи (см. табл. 3.1)

$$I_{КЗ} = I_{\max} = 11,5 \text{ А}; P_{\text{ист } КЗ} = P_{\text{ист } \max} = 2,645 \text{ кВт.}$$

При этом мощность потребителя $P_{\text{потр } КЗ} = 0$. Вся мощность генератора рассеивается на его внутреннем сопротивлении R_0 и соединительных проводах (которые также обладают сопротивлением, хотя и малым, которое не учитывается при расчете силы тока):

$$P_0 \text{ КЗ} = P_{\text{ист } КЗ} = 2,645 \text{ кВт.}$$

При токах короткого замыкания могут перегреться провода или может выйти из строя генератор.

В рассматриваемом режиме КПД генератора $\eta_{КЗ} = 0$.

Режим холостого хода ($R_{ХХ} \rightarrow \infty$). При сопротивлении потребителей $R = 150 \text{ Ом}$ в исследуемой цепи наблюдается режим, близкий к режиму холостого хода. При работе в режиме холостого хода сила тока и мощность, развиваемые генератором, имеют

минимальные значения, на порядок меньше, чем в режиме короткого замыкания (см. табл. 3.1):

$$I_{XX} = I_{\min} = 1,4 \text{ А}; P_{\text{ист } XX} = P_{\text{ист } \min} = 311 \text{ Вт} \approx 0,3 \text{ кВт.}$$

Однако при этом мощность потребителя $P_{\text{потр } XX}$ практически равна мощности генератора $P_{\text{ист } XX}$, а мощность $P_{0 \text{ } XX}$, рассеиваемая на внутреннем сопротивлении генератора, незначительна (практически равна нулю):

$$P_{\text{потр } XX} = 275 \text{ Вт} \approx 0,3 \text{ кВт} = P_{\text{ист } XX}; P_{0 \text{ } XX} = 37 \text{ Вт} = 0,037 \text{ кВт} \approx 0.$$

Несмотря на то, что генератор в рассматриваемом режиме развивает минимальную мощность, его КПД высок: при $R \rightarrow \infty$ значение КПД стремится к 100%. Так, в исследуемой цепи уже при $R = 150 \text{ Ом}$ КПД составляет 88%.

Рабочий режим. В промежутке между режимами короткого замыкания и холостого хода сила тока I в цепи и мощность источника $P_{\text{ист}}$ при изменении сопротивления потребителей изменяются по одному и тому же закону, так как мощность источника пропорциональна силе тока ($P_{\text{ист}} = EI$, где $E = \text{const}$). Следовательно, графики тока и мощности источника можно совместить, согласовав их масштабы. В исследуемой цепи $P_{\text{ист}} = 230I \text{ Вт}$, поэтому соотношение масштабов силы тока (m_I) и мощности (m_P) следующее: $m_P/m_I = 230 \text{ В}$.

При увеличении сопротивления потребителя R сила тока I и мощность источника $P_{\text{ист}}$ уменьшаются по гиперболическому закону от максимального значения при коротком замыкании до минимального значения в режиме холостого хода.

Мощность P_0 , рассеиваемая на внутреннем сопротивлении источника, также уменьшается, что видно по изменению длины отрезков между графиками $P_{\text{ист}}$ и $P_{\text{потр}}$ на рис. 3.4.

Из результатов расчета параметров (см. табл. 3.1) следует, что мощность потребителя $P_{\text{потр}}$ растет при увеличении сопротивления R потребителя от 0 (при КЗ) до определенного значения $R_{PP} = 20 \text{ Ом}$, равного внутреннему сопротивлению источника R_0 , после чего уменьшается. Следовательно, $P_{\text{потр}}$ имеет максимум при сопротивлении потребителя $R_{PP} = R_0$. Режим работы при $R_{PP} = R_0$ выделяют из диапазона рабочего режима и называют *режимом согласованной нагрузки* (СН).

Режим согласованной нагрузки. В режиме СН источник (генератор) вырабатывает половину максимальной мощности, вырабатываемой им в режиме короткого замыкания:

$$P_{\text{ист СН}} = \frac{1}{2} P_{\text{ист КЗ}} = \frac{2 \cdot 645}{2} = 1 \, 322,5 \text{ Вт.}$$

При этом в потребителе расходуется только половина мощности $P_{\text{ист СН}}$, вырабатываемой источником, а вторая половина этой мощности расходуется на внутреннем сопротивлении источника:

$$P_{\text{потр СН}} = P_{0 \text{ СН}} = \frac{1}{2} P_{\text{ист СН}} = \frac{1322,5}{2} = 661,3 \text{ Вт.}$$

Коэффициент полезного действия генератора в этом режиме $\eta_{\text{СН}} = 50 \%$.

Из проведенного анализа режимов работы цепи при переменной нагрузке следует:

- во-первых, при возрастании сопротивления нагрузки R (от 0 до ∞) мощность $P_{\text{ист}}$, вырабатываемая источником, падает от максимального значения практически до нуля. При этом КПД источника растет от 0 до 100 %. Это означает, что, вырабатывая максимальную мощность (при коротком замыкании), источник никакой полезной работы не производит, т. е. вся мощность рассеивается во внутреннем сопротивлении источника. В режиме, близком к холостому ходу, источник вырабатывает незначительную мощность, однако вся она используется потребителем;

- во-вторых, максимальную мощность потребитель получает от источника в режиме согласованной нагрузки. Причем эта мощность составляет только половину мощности, вырабатываемой источником в этом режиме, вторая половина которой рассеивается на его внутреннем сопротивлении ($\eta_{\text{СН}} = 50 \%$). При этом в режиме согласованной нагрузки источник вырабатывает только половину своей максимальной мощности.

4. Выбор рационального режима работы источника. Результаты анализа режимов работы цепи при переменной нагрузке учитываются при проектировании электротехнических устройств.

Так, для цепей малой мощности (в устройствах электроники, электроизмерений и др.) выбирают $R = (1 \dots 3) R_0$. При этом их КПД равен 50...75 %. Таким образом обеспечивается режим, близкий к режиму согласованной нагрузки, т. е. когда в сопротивлении нагрузки выделяется максимальная мощность. Такая же мощность в этом случае выделяется во внутреннем сопротивлении источника, но такая незначительная потеря энергии несущественна.

Для цепей средней и большой мощности (в устройствах электроэнергетики и электромеханики, в усилителях тока и мощности в электронике), где нельзя допустить большую потерю энергии, выбирают $R = (5 \dots 20) R_0$ и более, обеспечивая высокий КПД (более 90 %). В этом случае источник вырабатывает мощность,

в несколько раз меньшую, чем максимально возможная, однако почти вся вырабатываемая мощность расходуется в потребителе и только незначительная часть ее — во внутреннем сопротивлении источника. Например, при $\eta = 90\%$ $P_{\text{потр}} \text{pp} = 90\% P_{\text{ист}} \text{pp}$, а $P_0 \text{pp} = 10\% P_{\text{ист}} \text{pp}$.

3.3. Источник тока при переменной нагрузке. Эквивалентное преобразование источника тока и источника ЭДС

Задача 3.3. К полупроводниковому источнику тока, имеющему силу тока $J = 25$ мА и собственную (внутреннюю) проводимость $G_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ См, подключен реостат R (рис. 3.5).

Определить напряжение U на выводах А и Б источника тока и развиваемую им мощность, а также силу тока и мощность внешней цепи для трех режимов нагрузки: холостого хода ($R = R_{\text{ХХ}} \rightarrow \infty$), короткого замыкания ($R = R_{\text{КЗ}} \approx 0$) и номинального рабочего ($R = R_{\text{ном}} = 100$ Ом). Найти параметры источника ЭДС (схему замещения электрической цепи источника ЭДС см. на рис. 3.3), эквивалентного рассматриваемому источнику тока. Сделать проверку эквивалентности источника тока и источника ЭДС.

Решение. 1. Расчет токов, напряжений и мощностей в цепи источника тока для трех режимов ее работы. При холостом ходе сопротивление внешнего участка цепи (нагрузки) $R = R_{\text{ХХ}} \rightarrow \infty$, а сила тока в нагрузке $I_{\text{ХХ}} \approx 0$ (обрыв ветви с сопротивлением R). Сила тока в ветви с внутренней проводимостью источника

$$I_{0\text{ХХ}} = J - I_{\text{ХХ}} = J = 25 \text{ мА.}$$

Напряжение $U_{\text{ХХ}}$ на выводах источника А и Б при холостом ходе равно напряжению на внешнем участке $U_{\text{АБ ХХ}}$:

$$U_{\text{ХХ}} = U_{\text{АБ ХХ}} = I_{\text{ХХ}} R_{\text{ХХ}} = 0 \cdot \infty,$$

что представляет собой неопределенность, которую необходимо раскрыть, представив напряжение $U_{\text{ХХ}}$ другим возможным способом:

$$U_{\text{ХХ}} = \frac{1}{G_0} I_{0\text{ХХ}} = 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = 25 \text{ В.}$$

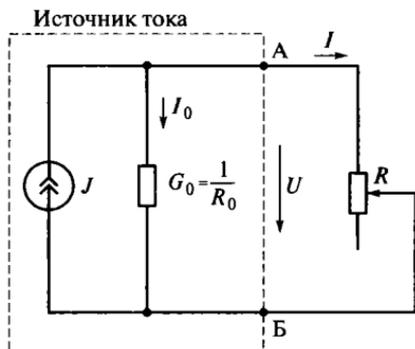


Рис. 3.5. Незвращенная цепь с источником тока

Мощность, развиваемая источником при холостом ходе,

$$P_{\text{ист ХХ}} = JU_{\text{ХХ}} = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 25 = 0,625 \text{ Вт} = 625 \text{ мВт.}$$

Мощность, отдаваемая в нагрузку при холостом ходе,

$$P_{\text{потр ХХ}} = U_{\text{ХХ}}I_{\text{ХХ}} = 25 \cdot 0 = 0.$$

При коротком замыкании сопротивление внешнего участка цепи (нагрузки) $R = R_{\text{КЗ}} \approx 0$. Собственная (внутренняя) проводимость источника тока мала, поэтому сила тока $I_{0\text{КЗ}}$ в ветви с внутренней проводимостью практически равна нулю: $I_{0\text{КЗ}} \approx 0$.

Сила тока в нагрузке при коротком замыкании

$$I_{\text{КЗ}} = J - I_{0\text{КЗ}} = 25 - 0 = 25 \text{ мА.}$$

Напряжение $U_{\text{КЗ}}$ на выводах источника при коротком замыкании равно напряжению на внешнем участке цепи $U_{\text{АБ КЗ}}$:

$$U_{\text{КЗ}} = U_{\text{АБ КЗ}} = R_{\text{КЗ}}I_{\text{КЗ}} = 0 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Мощность, развиваемая источником при коротком замыкании,

$$P_{\text{ист КЗ}} = JU_{\text{КЗ}} = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 0 = 0.$$

Мощность, отдаваемая в нагрузку в режиме короткого замыкания,

$$P_{\text{потр КЗ}} = U_{\text{АБ КЗ}}I_{\text{КЗ}} = 0 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = 0.$$

В номинальном рабочем режиме по условию задачи сопротивление внешнего участка цепи (нагрузки) $R = R_{\text{ном}} = 100 \text{ Ом}$.

Проводимость нагрузки

$$G_{\text{ном}} = \frac{1}{R_{\text{ном}}} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См.}$$

Общая проводимость двух параллельных ветвей, содержащих проводимость нагрузки и внутреннюю проводимость источника,

$$G_{\text{АБ ном}} = G_0 + G_{\text{ном}} = 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

Напряжение на выводах источника, в номинальном режиме равно напряжению на внешнем участке цепи $U_{\text{АБ ном}}$,

$$U_{\text{ном}} = J/G_{\text{АБ ном}} = U_{\text{АБ ном}} = 25 \cdot 10^{-3}/(11 \cdot 10^{-3}) = 2,273 \text{ В.}$$

Сила тока во внешнем участке цепи в номинальном режиме

$$I_{\text{ном}} = U_{\text{АБ ном}}/R_{\text{ном}} = 2,273/100 = 0,02273 = 22,73 \text{ мА.}$$

Мощность, развиваемая источником тока в номинальном режиме,

$$P_{\text{ист. ном}} = JU_{\text{ном}} = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 2,273 = 56,83 \text{ мВт},$$

что значительно меньше, чем в режиме холостого хода.

Мощность, отдаваемая в нагрузку в номинальном режиме,

$$P_{\text{потр. ном}} = U_{\text{АБ ном}} I_{\text{ном}} = 2,273 \cdot 22,73 \cdot 10^{-3} = 51,67 \text{ мВт}.$$

Таким образом, *источник тока развивает в режиме холостого хода максимальную мощность, а в режиме короткого замыкания — минимальную, т. е. равную нулю.*

2. Определение параметров источника ЭДС, эквивалентного заданному источнику тока. Согласно теории источник тока можно заменить эквивалентным источником ЭДС, параметры которого (E_3 и R_{03}) связаны с параметрами источника тока (J и G_0) следующими выражениями:

$$E_3 = J/G_0; R_{03} = 1/G_0,$$

т. е. для данной задачи

$$E_3 = J/G_0 = 25 \cdot 10^{-3}/10^{-3} = 25 \text{ В};$$

$$R_{03} = 1/G_0 = 1/10^{-3} = 1000 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}.$$

3. Проверка эквивалентности схем. Замена схемы считается эквивалентной, если мощность, отдаваемая источником в нагрузку, одинаковая в источнике тока и в источнике ЭДС, т. е. в обоих случаях в нагрузке протекают одинаковые токи при одинаковых напряжениях на ней.

Определим силу тока и напряжение на нагрузке эквивалентного источника ЭДС в номинальном рабочем режиме:

$$I_{\text{ном}} = E_3/(R_{03} + R_{\text{ном}}) = 25/(1000 + 100) = 22,73 \text{ мА}.$$

$$U_{\text{ном}} = I_{\text{ном}} R_{\text{ном}} = 22,73 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 2,273 \text{ В}.$$

Значения силы тока и напряжения в нагрузке одинаковые в источнике тока и источнике ЭДС, что доказывает эквивалентность схем.

Однако представленные в схемах источники не эквивалентны по развиваемой ими мощности. В данной задаче в номинальном рабочем режиме источник тока развивает мощность

$$P_{\text{ист. ном}} = 56,83 \text{ мВт},$$

а эквивалентный источник ЭДС — на порядок выше:

$$P_{\text{ист. ном}} = E_3 I_{\text{ном}} = 25 \cdot 22,73 \cdot 10^{-3} = 568,25 \text{ мВт}.$$

Этот факт необходимо учитывать при разработке электротехнических устройств, выборе схем и источников энергии, так как чем больше мощность источника, тем больше его габаритные размеры и масса.

3.4. Неразветвленная цепь с несколькими источниками энергии. Источники ЭДС в режимах генератора и потребителя

Задача 3.4. На рис. 3.6 представлена неразветвленная цепь с несколькими источниками энергии.

Составить выражение для расчета силы тока в заданной цепи и определить направление тока в этой цепи. Определить режимы работы источников энергии в заданной цепи и составить уравнения расчета напряжений на выводах каждого источника. Пояснить, как изменятся (увеличатся, уменьшатся) напряжения на выводах источников энергии при размыкании цепи. Получить выражения для расчета параметров эквивалентных потребителей, которыми можно заменить источники энергии, работающие в режиме потребителей в заданной цепи. Составить уравнение баланса мощностей для заданной цепи.

Решение. 1. Определение тока и его направления в заданной цепи. Определим группы согласно включенных источников, т. е. источников, имеющих одинаковое направление ЭДС при обходе цепи. Для этого выберем, например, направление обхода (НО), показанное на рис. 3.6. В этом случае ЭДС E_1 , E_3 и E_4 будут иметь одинаковое направление, совпадающее с направлением обхода, а ЭДС E_2 и E_5 будут направлены согласно друг с другом, но навстречу выбранному направлению обхода.

Направление тока определяется группой одинаково направленных ЭДС, имеющих большее суммарное значение.

Пусть $E_1 + E_3 + E_4 > E_2 + E_5$. Тогда ток I имеет направление, показанное на рис. 3.6.

Сила тока в заданной цепи определяется по закону Ома для неразветвленной цепи с несколькими источниками:

$$I = \frac{\sum_{\text{алг}} E}{\sum R} = \frac{(E_1 + E_3 + E_4) - (E_2 + E_5)}{\sum R}, \quad (3.7)$$

где $\sum R = R_1 + R_2 + R_3 + R_{01} + R_{02} + R_{03} + R_{04} + R_{05}$.

2. Определение режимов работы источников энергии в заданной цепи. Если направление ЭДС ис-

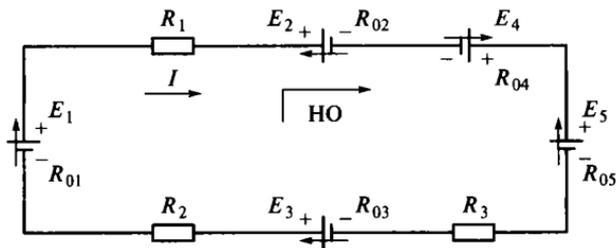


Рис. 3.6. Неразветвленная цепь с источниками ЭДС, работающими в режимах генератора и потребителя

точника совпадает с направлением тока в цепи, источник работает в режиме генератора (*источник-генератор*). Если ЭДС источника направлена встречно току (*противо ЭДС*), источник работает в режиме потребителя (*источник-потребитель*). Таким образом, источники E_1 , E_3 и E_4 работают в режиме генератора, а источники E_2 и E_5 — в режиме потребителя.

3. Формулы для расчета напряжений на выводах источников энергии. Известно, что напряжение на выводах источника энергии, работающего в режиме генератора, меньше его ЭДС, а источника, работающего в режиме потребителя, больше его ЭДС на значение падения напряжения на его внутреннем сопротивлении. Таким образом,

$$U_1 = E_1 - IR_{01}; U_2 = E_2 + IR_{02}; U_3 = E_3 - IR_{03};$$

$$U_4 = E_4 - IR_{04}; U_5 = E_5 + IR_{05}.$$

4. Оценка изменения напряжений на выводах источников энергии при размыкании цепи. После размыкания цепи ток и, следовательно, падения напряжения на внутренних сопротивлениях источников энергии уменьшатся до нуля. Из приведенных формул для расчета напряжений на выводах источников энергии следует, что U_1 увеличится, U_2 уменьшится, U_3 увеличится, U_4 увеличится и U_5 уменьшится до значений, равных соответствующим ЭДС.

5. Определение параметров эквивалентных потребителей, которыми можно заменить источники, работающие в режиме потребителей. Источники E_2 и E_5 , работающие в режиме потребителей, можно заменить эквивалентными сопротивлениями при условии обеспечения неизменности тока в цепи и потребляемой мощности после замены. Это возможно, если падения напряжений на эквивалентных сопротивлениях будут равны напряжениям на соответствующих источниках-потребителях. Тогда в соответствии с законом Ома для участка цепи эквивалентные сопротивления

(R_{31} — вместо источника E_2 и R_{32} — вместо источника E_5) можно записать в виде

$$R_{31} = \frac{U_2}{I} = \frac{E_2 + IR_{02}}{I};$$

$$R_{32} = \frac{U_5}{I} = \frac{E_5 + IR_{05}}{I}.$$

Эти сопротивления не равны внутренним сопротивлениям источников энергии, они являются их эквивалентами с позиций потребляемой ими энергии.

6. Составление баланса мощностей для заданной цепи. Пусть $\sum E_{\text{ген}}$ и $\sum E_{\text{потр}}$ — суммы ЭДС всех источников, работающих соответственно в режимах генератора и потребителя. Тогда выражение (3.7) можно записать в виде

$$I = \frac{\sum_{\text{алг}} E}{\sum R} = \frac{\sum E_{\text{ген}} - \sum E_{\text{потр}}}{\sum R},$$

откуда

$$\sum E_{\text{ген}} - \sum E_{\text{потр}} = I \sum R.$$

Умножив обе части полученного равенства на силу тока I и перенеся вправо слагаемое с отрицательным знаком, получим уравнения

$$\begin{aligned} \sum E_{\text{ген}} I &= \sum E_{\text{потр}} I + I^2 \sum R; \\ \sum P_{\text{ист. ген}} &= \sum P_{\text{ист. потр}} + I^2 \sum R. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В соответствии с формулой (3.8) баланс мощностей для цепи с несколькими источниками энергии означает следующее: сумма мощностей источников-генераторов равна сумме мощностей всех потребителей, включая мощности источников-потребителей.

Таким образом, для заданной цепи уравнение баланса имеет вид

$$\begin{aligned} P_{\text{ист1}} + P_{\text{ист3}} + P_{\text{ист4}} &= P_{\text{ист2}} + P_{\text{ист5}} + P_1 + \\ &+ P_2 + P_3 + P_{01} + P_{02} + P_{03} + P_{04} + P_{05} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (E_1 + E_3 + E_4)I &= (E_2 + E_5)I + \\ &+ I^2(R_1 + R_2 + R_3 + R_{01} + R_{02} + R_{03} + R_{04} + R_{05}). \end{aligned}$$

Задача 3.5. На рис. 3.7 представлена схема зарядки аккумуляторной батареи от генератора постоянного тока с $E_1 = 100$ В и внутренним сопротивлением $R_{01} = 1,5$ Ом при силе тока $I = 5$ А. Аккумуляторная батарея с внутренним сопротивлением $R_{02} = 1$ Ом имеет в разряженном состоянии (в начале зарядки) ЭДС $E_{2\text{нач}} = 24$ В и в конце зарядки ЭДС $E_{2\text{кон}} = 32$ В. Для поддержания заданного значения силы тока в цепи ($I = 5$ А) предусмотрены два сопротивления: постоянное сопротивление $R_1 = 8$ Ом и регулируемое сопротивление R_2 .

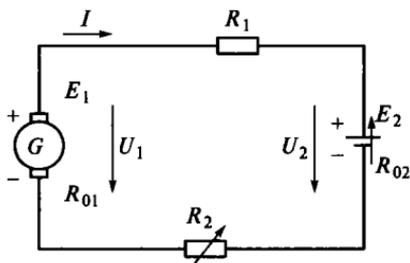


Рис. 3.7. Схема зарядки аккумуляторной батареи

Определить режимы работы источников энергии, напряжения на их зажимах в начале и конце зарядки батареи, а также границы изменения сопротивления R_2 , обеспечивающего заданное значение силы тока в цепи ($I = 5$ А). Составить баланс мощностей и убедиться в том, что он соблюдается и в начале, и в конце зарядки аккумулятора. Определить, как изменятся (увеличатся, уменьшатся) напряжения на участках цепи при ее размыкании и каким эквивалентным сопротивлением можно заменить источник-потребитель (аккумуляторную батарею).

Решение. 1. Определение режимов работы и напряжений на зажимах источников энергии. Поскольку ЭДС источников E_1 и E_2 направлены навстречу друг другу и $E_1 > E_2$, то источник E_1 работает в режиме генератора, а E_2 — в режиме потребителя.

2. Определение напряжений на зажимах источников энергии в начале и конце зарядки батареи. Учитывая, что сила тока в цепи поддерживается неизменной с момента включения и до конца зарядки батареи ($I = 5$ А), получим следующие напряжения на зажимах источников:

- напряжение на зажимах генератора на протяжении всего процесса зарядки батареи

$$U_1 = E_1 - IR_{01} = 100 - 5 \cdot 1,5 = 92,5 \text{ В};$$

- напряжение на зажимах аккумуляторной батареи в начале зарядки

$$U_{2\text{нач}} = E_{2\text{нач}} + IR_{02} = 24 + 5 \cdot 1 = 29 \text{ В};$$

- напряжение на зажимах аккумуляторной батареи в конце зарядки

$$U_{2\text{кон}} = E_{2\text{кон}} + IR_{02} = 32 + 5 \cdot 1 = 41 \text{ В}.$$

3. Определение границ изменения сопротивления R_2 . Согласно закону Ома для неразветвленной цепи с несколькими источниками энергии силу тока в заданной цепи можно найти по формуле:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{\sum R},$$

где $\sum R$ — общее сопротивление рассматриваемой цепи.

Из уравнения тока получим выражение для вычисления общего сопротивления цепи:

$$\sum R = \frac{E_1 - E_2}{I}.$$

Так как E_2 имеет разные значения в начале и конце зарядки батареи ($E_{2 \text{ нач}}$ и $E_{2 \text{ кон}}$), то и общее сопротивление имеет разные значения в начале и конце этого процесса:

$$\sum R_{\text{нач}} = (E_1 - E_{2 \text{ нач}})/I = (100 - 24)/5 = 15,2 \text{ Ом};$$

$$\sum R_{\text{кон}} = (E_1 - E_{2 \text{ кон}})/I = (100 - 32)/5 = 13,6 \text{ Ом}.$$

Так как для заданной цепи общее сопротивление

$$\sum R = R_1 + R_2 + R_{01} + R_{02};$$

$$R_2 = \sum R - R_1 - R_{01} - R_{02},$$

то

$$R_{2 \text{ нач}} = \sum R_{\text{нач}} - R_1 - R_{01} - R_{02} = 15,2 - 8 - 1,5 - 1 = 4,7 \text{ Ом};$$

$$R_{2 \text{ кон}} = \sum R_{\text{кон}} - R_1 - R_{01} - R_{02} = 13,6 - 8 - 1,5 - 1 = 3,1 \text{ Ом}.$$

Таким образом, для поддержания заданного значения тока зарядки в цепи на рис. 3.7 сопротивление R_2 следует изменять от 4,7 Ом (в начале зарядки) до 3,1 Ом (в конце зарядки).

4. Составление баланса мощностей. При составлении баланса мощностей необходимо учитывать режимы работы источников энергии. Энергию в цепь отдает источник, работающий в режиме генератора (в нашем случае это E_1). Источник E_2 (аккумуляторная батарея), работающий в режиме потребителя, причисляется к другим потребителям. Таким образом, в соответствии с формулой (3.8) для цепи на рис. 3.7 уравнение баланса мощностей имеет вид

$$P_{\text{ген}} = P_{\text{потр}}, \text{ или } E_1 I = E_2 I + I^2 \sum R.$$

Убедимся в том, что баланс (равенство) мощностей генератора и потребителей соблюдается для рассматриваемой цепи и в на-

чале, и в конце зарядки, т. е. $P_{\text{ген}} = P_{\text{потр. нач}} = P_{\text{потр. кон}}$, для чего найдем значения этих мощностей:

$$P_{\text{ген}} = E_1 I = 100 \cdot 5 = 500 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{потр. нач}} = E_2_{\text{нач}} I + I^2 \sum R_{\text{нач}} = 24 \cdot 5 + 5^2 \cdot 15,2 = 500 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{потр. кон}} = E_2_{\text{кон}} I + I^2 \sum R_{\text{кон}} = 32 \cdot 5 + 5^2 \cdot 13,6 = 500 \text{ Вт}.$$

Из расчетов следует, что баланс мощностей соблюдается и в начале, и в конце зарядки аккумулятора.

5. Изменение напряжений на участках цепи при ее размыкании. При размыкании цепи сила тока зарядки I уменьшается до нулевого значения. При этом напряжение на зажимах источника-генератора E_1 увеличится до значения $U_1 = E_1 = 100 \text{ В}$, а напряжение на зажимах источника-потребителя E_2 уменьшится до значения $U_2 = E_2$. Причем значение E_2 может находиться в диапазоне от 24 (в начале зарядки) до 32 В (в конце зарядки).

Напряжения на сопротивлениях U_{R1} и U_{R2} в соответствии с законом Ома для участка цепи уменьшатся до нуля.

6. Расчет эквивалентного сопротивления, которым можно заменить источник-потребитель. Источник-потребитель (аккумулятор) можно заменить сопротивлением, мощность потребления которого будет равна мощности аккумулятора. В этом случае падение напряжения на сопротивлении после замены будет равно напряжению на концах источника-потребителя при сохранении значения тока.

Значение эквивалентного сопротивления легко определить по закону Ома для участка цепи. Очевидно, что значения искомого сопротивления в начале и конце зарядки аккумулятора ($R_{\text{э. нач}}$ и $R_{\text{э. кон}}$) будут разными вследствие наличия двух разных значений напряжений ($U_2_{\text{нач}}$ и $U_2_{\text{кон}}$). Таким образом,

$$R_{\text{э. нач}} = U_2_{\text{нач}} / I = 24 / 5 = 4,8 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{э. кон}} = U_2_{\text{кон}} / I = 32 / 5 = 6,4 \text{ Ом}.$$

3.5. Потенциалы точек электрической цепи.

Потенциальная диаграмма

Задача 3.6. На рис. 3.8 представлена неразветвленная электрическая цепь с несколькими источниками энергии, имеющая следующие параметры: $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 35 \text{ В}$, $E_3 = 25 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 30 \text{ Ом}$, $R_4 = 70 \text{ Ом}$, $R_{01} = R_{02} = 10 \text{ Ом}$, $R_{03} = 0$.

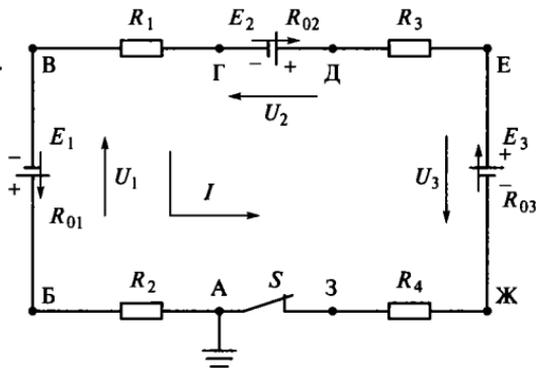


Рис. 3.8. Неразветвленная замкнутая цепь

Исследовать с помощью вычислительного эксперимента работу цепи в следующих случаях:

- цепь замкнута;
- цепь разомкнута в результате обрыва в цепи;
- короткое замыкание точек Г и Ж в цепи при разомкнутом ключе S;
- при сборке перепутаны клеммы источника E_1 .

Для каждого из перечисленных случаев определить силу тока в цепи и рассчитать потенциалы точек относительно указанной на схеме общей точки А. На основании полученных результатов построить потенциальную диаграмму и рассчитать напряжения на зажимах источников энергии. Проанализировать влияние характера изменения в цепи на вид потенциальной диаграммы и возможность использования потенциальных диаграмм для тестирования¹ электрических цепей.

Решение. 1. Цепь замкнута (см. рис. 3.8). Рассчитаем силу тока в цепи. Для заданной цепи сила тока рассчитывается по закону Ома для полной цепи с несколькими источниками ЭДС:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\sum_{\text{алг}} E}{\sum R} = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_{01} + R_{02} + R_{03}} = \\
 &= \frac{100 - 35 + 25}{20 + 30 + 30 + 70 + 10 + 10 + 0} = 0,53 \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Определим направление тока в цепи. Направление тока в заданной цепи определяется направлением ЭДС согласно включен-

¹ Под *тестированием* электрических цепей понимают проведение пробных испытаний в целях проверки правильности функционирования цепей и отыскания возможных неисправностей в них.

ных источников энергии E_1 и E_3 , так как сумма их ЭДС превышает противоЭДС источника E_2 .

Определим режимы работы источников энергии. Источники E_1 и E_3 работают в режиме генератора, так как направления их ЭДС совпадают с направлением тока. Источник E_2 работает в режиме потребителя, так как его ЭДС направлена навстречу току.

Рассчитаем напряжения на участках цепи и потенциалы ее точек:

а) потенциал точки А принимаем за уровень отсчета: $\varphi_A = 0$;

б) $\varphi_B = 15,9$ В.

Так как на участке АБ с сопротивлением R_2 ток направлен от точки Б к точке А, то $\varphi_B > \varphi_A$, и напряжение

$$U_{БА} = \varphi_B - \varphi_A = IR_2 = 0,53 \cdot 30 = 15,9 \text{ В,}$$

откуда потенциал

$$\varphi_B = \varphi_A + U_{БА} = 0 + 15,9 = 15,9 \text{ В;}$$

в) $\varphi_B = -78,8$ В.

Между точками Б и В находится участок с источником энергии E_1 , работающим в режиме генератора. Так как точкой Б обозначен положительный зажим источника, то $\varphi_B > \varphi_V$. Тогда напряжение на зажимах источника энергии E_1

$$U_{БВ} = \varphi_B - \varphi_V = E_1 - IR_{01} = 100 - 0,53 \cdot 10 = 94,7 \text{ В,}$$

откуда потенциал

$$\varphi_V = \varphi_B - U_{БВ} = 15,9 - 94,7 = -78,8 \text{ В;}$$

г) $\varphi_\Gamma = -68,2$ В.

На участке ВГ с сопротивлением R_1 ток направлен от точки Г к точке В, поэтому $\varphi_\Gamma > \varphi_B$, и напряжение

$$U_{\Gamma В} = \varphi_\Gamma - \varphi_B = IR_1 = 0,53 \cdot 20 = 10,6 \text{ В,}$$

откуда потенциал

$$\varphi_\Gamma = \varphi_B + U_{\Gamma В} = -78,8 + 10,6 = -68,2 \text{ В;}$$

д) $\varphi_D = -27,9$ В.

Между точками Г и Д находится участок с источником энергии E_2 , работающим в режиме потребителя. Так как положительный зажим этого источника обозначен точкой Д, то $\varphi_D > \varphi_\Gamma$, и напряжение на зажимах источника энергии E_2

$$U_{ДГ} = \varphi_D - \varphi_\Gamma = E_2 + IR_{02} = 35 + 0,53 \cdot 10 = 40,3 \text{ В,}$$

откуда потенциал

$$\varphi_D = \varphi_G + U_{DG} = -68,2 + 40,3 = -27,9 \text{ В};$$

е) $\varphi_E = -12 \text{ В}$.

На участке ДЕ с сопротивлением R_3 ток направлен от точки Е к точке Д, поэтому $\varphi_E > \varphi_D$, и напряжение

$$U_{ED} = \varphi_E - \varphi_D = IR_3 = 0,53 \cdot 30 = 15,9 \text{ В},$$

откуда потенциал

$$\varphi_E = \varphi_D + U_{ED} = \varphi_D + 15,9 = -27,9 + 15,9 = -12 \text{ В};$$

ж) $\varphi_{Ж} = -37 \text{ В}$.

Между точками Е и Ж находится участок с источником энергии E_3 , работающим в режиме потребителя. Так как положительный зажим этого источника обозначен точкой Е, то $\varphi_E > \varphi_{Ж}$, и напряжение на зажимах источника энергии E_3

$$U_{EЖ} = \varphi_E - \varphi_{Ж} = E_3 - IR_{03} = 25 - 0,53 \cdot 0 = 25 \text{ В},$$

откуда потенциал

$$\varphi_{Ж} = \varphi_E - U_{EЖ} = \varphi_E - 25 = -12 - 25 = -37 \text{ В};$$

з) φ_A найдем для проверки правильности расчета.

На участке ЖА с сопротивлением R_4 ток направлен от точки А к точке Ж, поэтому $\varphi_A (= \varphi_3) > \varphi_{Ж}$, и напряжение

$$U_{AJ} = \varphi_A - \varphi_{Ж} = IR_4 = 0,53 \cdot 70 = 37,1 \text{ В},$$

откуда потенциал

$$\varphi_A = \varphi_{Ж} + U_{AJ} = -37 + 37,1 = 0,1 \text{ В} \approx 0.$$

Полученное расчетное значение $\varphi_A \approx 0$, равное потенциалу точки А, принятому в начале расчета (незначительное отклонение от нуля определяется выбранной точностью расчета), подтверждает правильность проведенных расчетов.

Потенциальная диаграмма, построенная по результатам выполненного расчета, представлена на рис. 3.9.

2. Цепь разомкнута — обрыв цепи (рис. 3.10). Определим силу тока в цепи. При замыкании (обрыве) цепи сила тока в ней уменьшается до нуля: $I = 0$.

Рассчитаем напряжения на участках цепи и потенциалы ее точек:

а) как и в первом случае, потенциал точки А принимаем равным нулю; $\varphi_A = 0$;

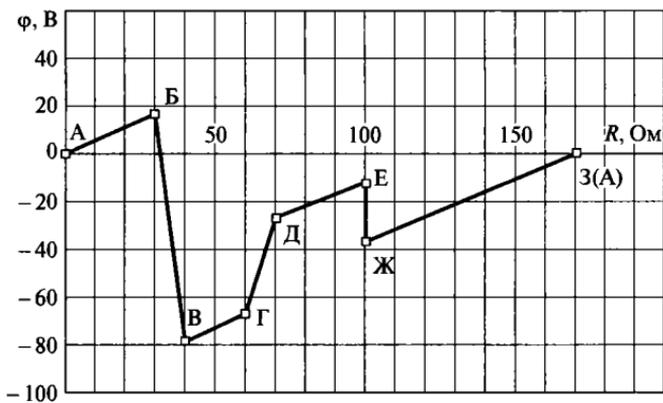


Рис. 3.9. Потенциальная диаграмма цепи, приведенной на рис. 3.8

- б) $U_{БА} = \varphi_{Б} - \varphi_{А} = IR_2 = 0$,
 $\varphi_{Б} = \varphi_{А} + 0 = 0$;
- в) $U_{БВ} = \varphi_{Б} - \varphi_{В} = E_1 - IR_{01} = 100 - 0 \cdot 10 = 100 \text{ В}$,
 $\varphi_{В} = \varphi_{Б} - 100 = 0 - 100 = -100 \text{ В}$;
- г) $U_{ГВ} = \varphi_{Г} - \varphi_{В} = IR_1 = 0 \cdot 20 = 0$,
 $\varphi_{Г} = \varphi_{В} + 0 = -100 \text{ В}$;
- д) $U_{ДГ} = \varphi_{Д} - \varphi_{Г} = E_2 + IR_{02} = 35 + 0 \cdot 10 = 35 \text{ В}$,
 $\varphi_{Д} = \varphi_{Г} + 35 = -100 + 35 = -65 \text{ В}$;
- е) $U_{ЕД} = \varphi_{Е} - \varphi_{Д} = IR_3 = 0 \cdot 30 = 0$,
 $\varphi_{Е} = \varphi_{Д} + 0 = -65 \text{ В}$;
- ж) $U_{ЕЖ} = \varphi_{Е} - \varphi_{Ж} = E_3 - IR_{03} = 25 - 0 \cdot 0 = 25 \text{ В}$,

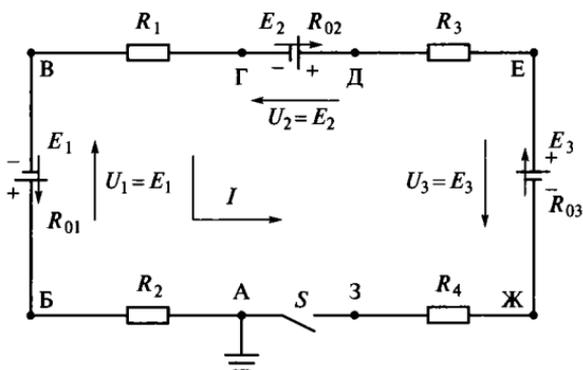


Рис. 3.10. Неразветвленная разомкнутая цепь

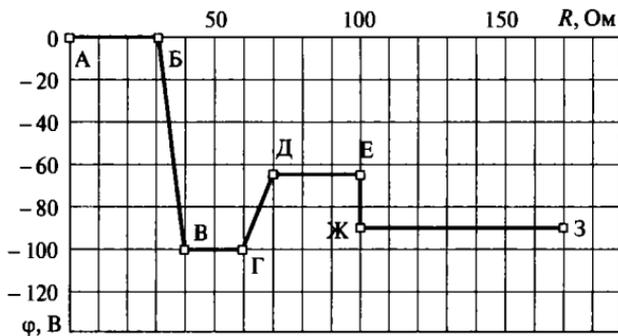


Рис. 3.11. Потенциальная диаграмма цепи, приведенной на рис. 3.10

$$\varphi_{\text{Ж}} = \varphi_{\text{Е}} - 25 = -65 - 25 = -90 \text{ В};$$

$$3) U_{\text{ЗЖ}} = \varphi_{\text{З}} - \varphi_{\text{Ж}} = IR_4 = 0 \cdot 70 = 0;$$

$$\varphi_{\text{З}} = \varphi_{\text{Ж}} + 0 = -90 \text{ В}.$$

Потенциальная диаграмма, построенная по результатам этого расчета, представлена на рис. 3.11.

3. Короткое замыкание точек Г и Ж в разомкнутой цепи (рис. 3.12). Определим силы токов в цепи. Прежде, чем рассчитывать потенциалы точек цепи, показанной на рис. 3.12, необходимо определить силу тока I_2 , протекающего в замкнутом участке ГДЕЖГ этой цепи. В разомкнутом участке АБВГЖЗ данной цепи сила тока $I_1 = 0$.

Замкнутый участок представляет собой неразветвленную цепь с двумя источниками энергии E_2 и E_3 . Так как ЭДС источников имеют встречное направление и $E_2 > E_3$, источник энергии E_2 работает в режиме генератора, а E_3 — в режиме потребителя.

Согласно закону Ома сила тока в замкнутом участке

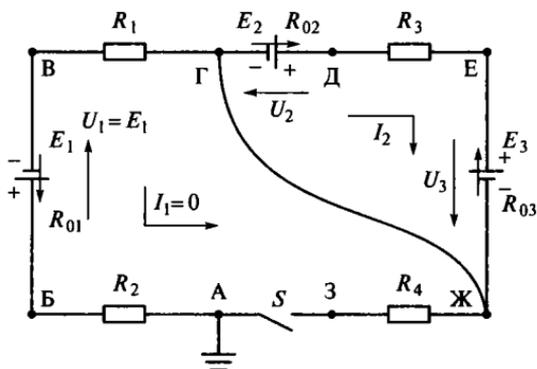


Рис. 3.12. Схема цепи при коротком замыкании точек Г и Ж в разомкнутом ключе S

$$I_2 = \frac{E_2 - E_3}{R_3 + R_{02} + R_{03}} = \frac{35 - 25}{30 + 10 + 0} = 0,25 \text{ А.}$$

Рассчитаем напряжения на участках цепи и потенциалы в ее точках:

а) $\varphi_A = 0;$

б) $U_{БА} = \varphi_B - \varphi_A = I_1 R_2 = 0,$

$$\varphi_B = \varphi_A + 0 = 0;$$

в) $U_{БВ} = \varphi_B - \varphi_V = E_1 - I_1 R_{01} = 100 - 0 \cdot 10 = 100 \text{ В,}$

$$\varphi_V = \varphi_B - 100 = 0 - 100 = -100 \text{ В;}$$

г) $U_{ГВ} = \varphi_G - \varphi_V = I_1 R_1 = 0 \cdot 20 = 0,$

$$\varphi_G = \varphi_V + 0 = -100 \text{ В;}$$

д) $U_{ДГ} = \varphi_D - \varphi_G = E_2 - I_2 R_{02} = 35 - 0,25 \cdot 10 = 32,5 \text{ В,}$

$$\varphi_D = \varphi_G + 32,5 = -100 + 32,5 = -67,5 \text{ В;}$$

е) $U_{ДЕ} = \varphi_D - \varphi_E = I_2 R_3 = 0,25 \cdot 30 = 7,5 \text{ В,}$

$$\varphi_E = \varphi_D - 7,5 = -67,5 - 7,5 = -75 \text{ В;}$$

ж) $U_{ЕЖ} = \varphi_E - \varphi_Ж = E_3 + I_2 R_{03} = 25 + 0,25 \cdot 0 = 25 \text{ В,}$

$$\varphi_Ж = \varphi_E - 25 = -75 - 25 = -100 \text{ В;}$$

з) $U_{ЗЖ} = \varphi_З - \varphi_Ж = I_1 R_4 = 0 \cdot 70 = 0,$

$$\varphi_З = \varphi_Ж + 0 = -100 \text{ В.}$$

Потенциальная диаграмма, построенная по результатам данного расчета, представлена на рис. 3.13.

4. При сборке цепи перепутаны клеммы источника энергии E_1 (рис. 3.14). Рассчитаем силу тока в цепи. В результате указанной неисправности в цепи изменятся режимы

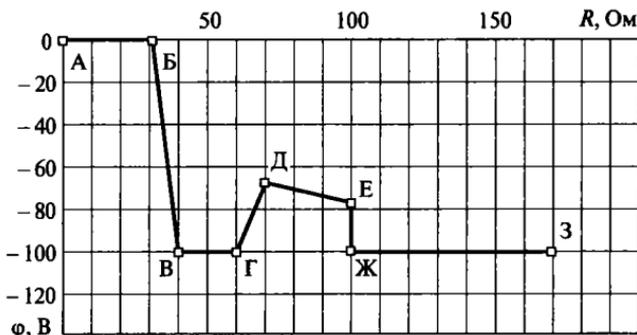


Рис. 3.13. Потенциальная диаграмма цепи, приведенной на рис. 3.12

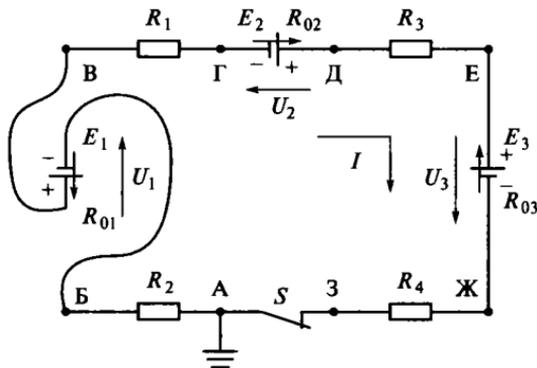


Рис. 3.14. Схема цепи с перепутанными при сборке клеммами источника E_1

работы источников энергии: E_1 и E_2 будут работать в режиме генератора, а E_3 — в режиме потребителя. Направление тока совпадает с направлением источников-генераторов (E_1 и E_2), т.е. изменяется на противоположное. Согласно закону Ома сила тока в цепи

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_{01} + R_{02} + R_{03}} = \\
 &= \frac{100 + 35 - 25}{20 + 30 + 30 + 70 + 10 + 10 + 0} = 0,647 \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Рассчитаем напряжения на участках цепи и потенциалы в ее точках:

а) $\varphi_A = 0$;

б) $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = IR_2 = 0,647 \cdot 30 = 19,4 \text{ В,}$

$\varphi_B = \varphi_A - 19,4 = -19,4 \text{ В;}$

в) $U_{BB} = \varphi_B - \varphi_B = E_1 - IR_{01} = 100 - 0,647 \cdot 10 = 93,5 \text{ В,}$

$\varphi_B = \varphi_B + 93,5 = -19,4 + 93,5 = 74,1 \text{ В;}$

г) $U_{BG} = \varphi_B - \varphi_G = IR_1 = 0,647 \cdot 20 = 12,9 \text{ В,}$

$\varphi_G = \varphi_B - 12,9 = 74,1 - 12,9 = 61,2 \text{ В;}$

д) $U_{DG} = \varphi_D - \varphi_G = E_2 - IR_{02} = 35 - 0,647 \cdot 10 = 28,5 \text{ В,}$

$\varphi_D = \varphi_G + 28,5 = 61,2 + 28,5 = 89,7 \text{ В;}$

е) $U_{DE} = \varphi_D - \varphi_E = IR_3 = 0,647 \cdot 30 = 19,4 \text{ В,}$

$\varphi_E = \varphi_D - 19,4 = 89,7 - 19,4 = 70,3 \text{ В;}$

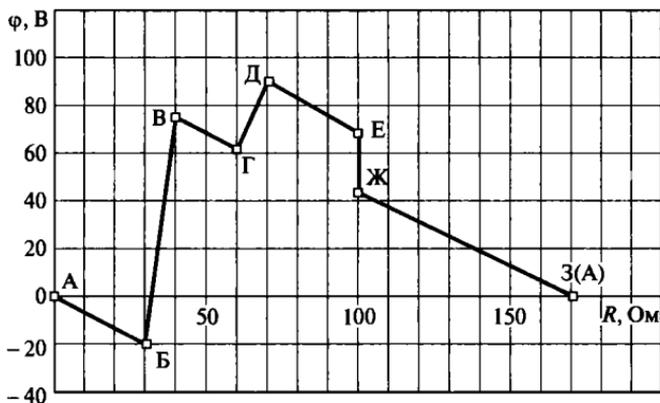


Рис. 3.15. Потенциальная диаграмма цепи, приведенной на рис. 3.14

$$\text{ж) } U_{ЕЖ} = \varphi_E - \varphi_{Ж} = E_3 + IR_{03} = 25 + 0,647 \cdot 0 = 25 \text{ В,}$$

$$\varphi_{Ж} = \varphi_E - 25 = 70,3 - 25 = 45,3 \text{ В;}$$

$$\text{з) } U_{Ж3} = \varphi_{Ж} - \varphi_3 = IR_4 = 0,647 \cdot 70 = 45,3 \text{ В,}$$

$$\varphi_A = \varphi_3 = \varphi_{Ж} - 45,3 = 45,3 - 45,3 = 0.$$

Потенциальная диаграмма, построенная по результатам этого расчета, представлена на рис. 3.15.

5. Анализ результатов вычислительного эксперимента. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- потенциальная диаграмма характеризует состояние электрической цепи;
- если потенциальная диаграмма замкнута, то цепь замкнута, т.е. потенциалы одинаковые в начальной и конечной точках диаграммы, соответствующих одной и той же точке цепи (см. рис. 3.9 и 3.15);
- если потенциальная диаграмма разомкнута, то цепь разомкнута: не замкнут ключ или в цепи имеется обрыв (см. рис. 3.11 и 3.13);
- если по участкам цепи с сопротивлениями протекает один и тот же ток, то прямые линии потенциальной диаграммы, соответствующие этим участкам, параллельны между собой (см. рис. 3.9, 3.11, 3.13, 3.15);
- если прямые линии потенциальной диаграммы, соответствующие участкам цепи с сопротивлениями, горизонтальны, то в сопротивлении отсутствует ток, т.е. или цепь разомкнута (см. на рис. 3.11, 3.13 участки АБ, ВГ и ЖЗ), или имеет место короткое замыкание сопротивления;

- на участках цепи, содержащих источники энергии, наблюдается резкое изменение потенциала, и в общем случае линии потенциальной диаграммы, соответствующие этим участкам, не параллельны между собой (см. рис. 3.9, 3.11, 3.13, 3.15);

- если на участках цепи с сопротивлениями потенциальная диаграмма имеет разные углы наклона прямых, то имеется короткое замыкание сопротивления или нескольких элементов цепи, включая сопротивления (см. рис. 3.13).

Анализ потенциальной диаграммы раскрывает следующие возможности ее использования:

- по виду потенциальной диаграммы можно изобразить схему электрической цепи;

- если потенциальная диаграмма построена в масштабе, по ней можно определить параметры элементов цепи, силу тока в цепи, его направление, а также напряжения между любыми ее точками как разность потенциалов между ними;

- потенциальная диаграмма позволяет сделать выводы о состоянии реальной электрической цепи при ее тестировании и определить характер неисправности, если таковая имеется.

Задача 3.7. По виду потенциальной диаграммы, приведенной на рис. 3.16, изобразить схему электрической цепи.

Определить силу тока в этой цепи, его направление, режимы работы источников энергии, параметры цепи (ЭДС источников, их внутренние сопротивления и сопротивления цепи), а также напряжение между точками В и Д.

Решение. 1. Составление схемы электрической цепи. По виду заданной потенциальной диаграммы можно заключить:

- соответствующая диаграмме цепь замкнута (так как потенциальная диаграмма замкнута);

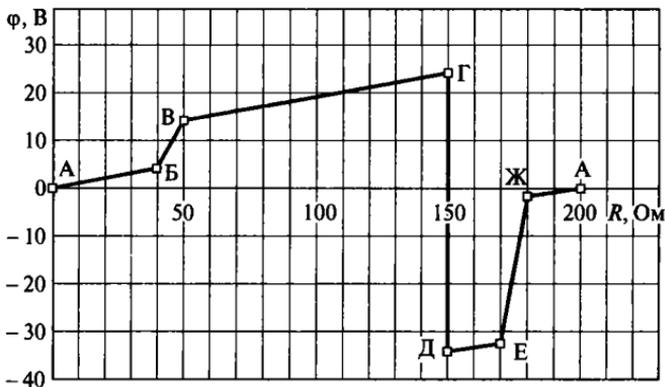


Рис. 3.16. Потенциальная диаграмма цепи к задаче 3.7

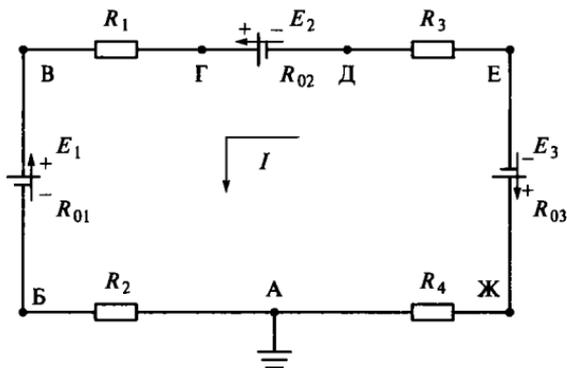


Рис. 3.17. Схема электрической цепи к задаче 3.7

- на участках АБ, ВГ, ДЕ и ЖА включены сопротивления (так как прямые линии, отображающие изменение потенциала, параллельны между собой);

- на участках БВ, ГД, ЕЖ включены источники энергии, положительные зажимы которых обозначены точками В, Г и Ж (так как $\varphi_B > \varphi_Б$, $\varphi_Г > \varphi_Д$, $\varphi_Ж > \varphi_Е$).

Схема электрической цепи, соответствующая приведенному описанию, представлена на рис. 3.17.

2. Определение направления тока в цепи и его значения. Направление тока можно определить по любому из участков цепи с сопротивлениями (АБ, ВГ, ДЕ и ЖА). Например, на участке ВГ ток направлен от точки Г к точке В, так как $\varphi_Г > \varphi_В$.

Силу тока найдем по закону Ома для выбранного участка (ВГ) с сопротивлением R_1 , определив по потенциальной диаграмме, выполненной в масштабе, напряжение на сопротивлении R_1 как разность соответствующих потенциалов и само это сопротивление как разность абсцисс точек Г и В:

$$I = \frac{\varphi_Г - \varphi_В}{150 - 50} = \frac{25 - 15}{100} = 0,1 \text{ А.}$$

3. Определение режимов работы источников энергии и параметров цепи. Источники E_1 и E_3 работают в режиме потребителя, так как их ЭДС направлены навстречу току. Источник E_2 работает в режиме генератора, так как его ЭДС направлена согласно с током.

Определим сопротивления цепи. Так как диаграмма выполнена в масштабе, а сопротивления откладываются одно за другим по оси абсцисс от конца предыдущего, то сопротивления элементов цепи имеют следующие значения:

$$R_1 = 100 \text{ Ом}, R_2 = 40 \text{ Ом}, R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом},$$

$$R_{01} = R_{03} = 10 \text{ Ом}, R_{02} = 0.$$

Найдем ЭДС источников питания.

Источник E_1 работает в режиме потребителя, поэтому напряжение на его зажимах $U_{ВБ} = \varphi_{В} - \varphi_{Б} = E_1 + IR_{01}$, откуда

$$E_1 = \varphi_{В} - \varphi_{Б} - IR_{01} = 15 - 4 - 0,1 \cdot 10 = 10 \text{ В}.$$

Источник E_2 работает в режиме генератора, поэтому напряжение на его зажимах $U_{ГД} = \varphi_{Г} - \varphi_{Д} = E_2 - IR_{02}$, откуда

$$E_2 = \varphi_{Г} - \varphi_{Д} + IR_{02} = 25 - (-35) + 0,1 \cdot 0 = 60 \text{ В}.$$

Источник E_3 является потребителем, поэтому напряжение на его зажимах $U_{ЖЕ} = \varphi_{Ж} - \varphi_{Е} = E_3 + IR_{03}$, откуда

$$E_3 = \varphi_{Ж} - \varphi_{Е} - IR_{03} = -2 - (-33) - 0,1 \cdot 10 = 30 \text{ В}.$$

4. Определение напряжения между точками. Напряжение между любыми точками определяется как разность потенциалов между ними, значения которых определены на потенциальной диаграмме. Например,

$$U_{ВД} = \varphi_{В} - \varphi_{Д} = 15 - (-35) = 50 \text{ В}.$$

3.6. Выбор элементов цепи и надежность ее работы

Задача 3.8. В электрическую цепь (рис. 3.18, а), источник питания которой имеет напряжение $U = 45 \text{ В}$, включены реостат (переменное сопротивление R_1 , регулируемое от 0 до 500 Ом) и последовательно с ним резистор R_2 для ограничения силы тока в цепи. При $R_1 = 0$ сила тока в цепи $I = 30 \text{ мА}$.

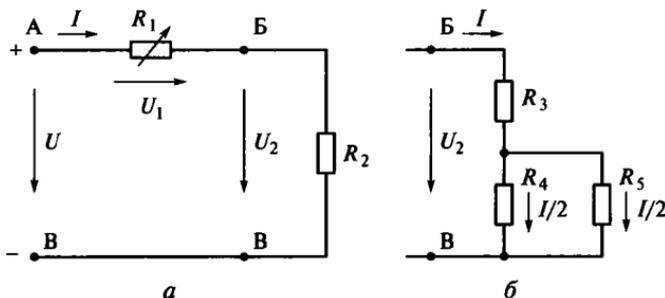


Рис. 3.18. Схемы электрической цепи к задаче 3.8 (а) и составного сопротивления (б)

Выбрать резистор при допустимой погрешности сопротивления $\pm 10\%$ и реостат, обеспечивающие надежную работу цепи.

Решение. 1. Общие правила выбора резисторов. При разработке различных электротехнических устройств часто возникает потребность в выборе резисторов (устройств, имеющих определенное значение сопротивления), предназначенных для ограничения силы тока в цепи, и реостатов для регулирования силы тока в цепи в определенных пределах. При этом должна обеспечиваться надежность работы цепи.

Любой резистор характеризуется двумя основными параметрами: сопротивлением и допустимой мощностью рассеивания. При этом важным качественным показателем является точность значения сопротивления резистора, т.е. предельно допустимое отклонение (погрешность) сопротивления от номинального значения (в процентах).

Промышленность выпускает резисторы не на любые номинальные значения сопротивлений и не на любые значения мощности. Номинальные значения сопротивлений представлены так называемым *рядом сопротивлений*, а допустимые мощности — *рядом мощностей*. С заданной допустимой погрешностью $\pm 10\%$ выпускаются резисторы со следующими номинальными значениями сопротивлений, Ом: 1,0; 1,2; 1,8; 2,2; 2,7; 3,3; 3,9; 4,7; 5,6; 6,8; 8,2... с увеличением в 10, 100, 1000... раз. Ряд допустимых мощностей, Вт: 0,125; 0,25; 0,5; 1,0; 1,5; 2 и др.

2. Выбор резистора с сопротивлением R_2 . Номинальное значение сопротивления R_2 определим по закону Ома для участка цепи: $R_2 = U_2/I$.

По условию задачи при $R_1 = 0$ сила тока в цепи $I = 30$ мА. Так как сопротивление участка АБ равно нулю ($R_{AB} = 0$, поскольку $R_1 = 0$, а сопротивление соединительных проводов незначительно и им можно пренебречь), падение напряжения на нем $U_1 = R_{AB}I = 0$. Соответственно напряжение $U_2 = U - U_1 = 45$ В. Тогда

$$R_2 = U_2/I = 45 \cdot 10^3/30 = 1,5 \text{ кОм.}$$

Так как резисторы на 1,5 кОм промышленностью не выпускаются, то рассчитанное значение сопротивления R_2 можно реализовать использованием нескольких резисторов («составного» сопротивления), соединенных последовательно или параллельно.

Например, сопротивление $R_2 = 1,5$ кОм можно получить соединением трех резисторов с сопротивлениями по 1 кОм (рис. 3.18, б), т.е. резистора с сопротивлением $R_3 = 1$ кОм, последовательно соединенного с двумя параллельными резисторами с сопротивлениями $R_4 = R_5 = 1$ кОм.

Допустимая мощность рассеивания рассчитывается по току и номинальному значению сопротивления. При использовании

составного сопротивления (R_2) необходимо подобрать по мощности каждое из входящих в него сопротивлений (R_3, R_4, R_5):

$$P_3 = I^2 R_3 = 30^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 = 0,9 \text{ Вт.}$$

$$P_4 = P_5 = I^2 R_4 / 4 = 30^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 / 4 = 0,225 \text{ Вт.}$$

Однако резисторы на рассчитанные мощности промышленностью не выпускаются. Следовательно, из ряда допустимых мощностей, чтобы избежать превышения температуры резистора, следует выбрать ближайшее большее значение номинальной мощности по сравнению с расчетной: 1 Вт для R_3 и по 0,25 Вт для R_4 и R_5 .

3. Выбор запаса мощности элементов электротехнических устройств. С увеличением номинальной мощности элементов электротехнических устройств (в том числе резисторов и реостатов) возрастают размеры и масса элементов. Это влечет за собой увеличение габаритных размеров и массы устройства, в котором они используются. Следовательно, необосновано большой запас мощности рассеивания элементов устройства нежелателен. Выбор запаса мощности должен определяться условиями охлаждения и длительностью непрерывной работы.

4. Выбор реостата. Так как сопротивление реостата задано, остается рассчитать допустимую мощность рассеивания на нем, т. е. наибольшее значение мощности рассеивания, обеспечивающее безопасную работу реостата.

Цепь, показанная на рис. 3.18, а, эквивалентна цепи с источником ЭДС ($E = U$ и $R_0 = R_2$), работающим на переменное сопротивление внешнего участка ($R_n = R_1$). Известно (см. подразд. 3.2), что источник ЭДС выделяет в нагрузку (в сопротивлении R_1) максимальную мощность ($P_{1 \max} = 0,25 P_{\text{ист max}}$) при $R_n = R_0$, т. е. при $R_1 = R_2 = 1,5 \text{ кОм}$.

Таким образом, максимальная мощность, выделяемая в реостате,

$$P_{1 \max} = \frac{1}{4} P_{\text{ист max}} = \frac{1}{4} E I_{\max} = \frac{1}{4} U \frac{U}{R_2} = \frac{1}{4} \frac{U^2}{R_2} = \frac{1}{4} \frac{45^2}{1500} = 0,338 \text{ Вт.}$$

Такая мощность выделяется в реостате только при одном значении сопротивления $R_1 = 1,5 \text{ кОм}$. При всех других значениях этого сопротивления мощность $P_1 < P_{1 \max}$ (равна 0,338 Вт).

По условию задачи сопротивление реостата R_1 ограничено значением 500 Ом. Из графика на рис. 3.4 следует, что при $R_n / R_0 = R_1 / R_2 < 1$ мощность, выделяемая в реостате, растет с увеличением его сопротивления, достигая ограниченного условием задачи максимума (значения меньше 0,338 Вт) при $R_1 = 500 \text{ Ом}$.

Таким образом, допустимое (с учетом условия задачи) значение мощности реостата

$$P_{\text{доп}} = I^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{45^2 \cdot 500}{(500 + 1500)^2} = 0,253 \text{ Вт.}$$

Для обеспечения необходимой тепловой надежности выбираем реостат с оптимальным запасом допустимой мощности.

5. Оценка надежности работы цепи. Существующие допуски на значения параметров элементов значительно влияют на работу цепи. Рассмотрим влияние на работу заданной цепи допусков на значения выбранных резисторов.

Предположим, что все выбранные сопротивления оказались с наименьшими возможными значениями (с допуском -10%). Легко убедиться, что этот вариант с позиций обеспечения надежности является наиболее неблагоприятным.

Определим наибольшую силу тока в цепи ($R_1 = 0$) при допуске на значения сопротивлений, равном -10% :

$$I_{\text{max}} = \frac{U}{R_2} = \frac{45}{1,50 - 0,15} = 33,33 \text{ мА.}$$

При этом мощность в сопротивлении R_3

$$P_3 = I_{\text{max}}^2 R_3 = 33,33^2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9 \cdot 1000 = 1 \text{ Вт,}$$

т. е. в сопротивлении R_3 нет никакого запаса мощности (резистор выбран с допустимой мощностью в 1 Вт при расчетной мощности 0,9 Вт). Следовательно, при допустимом отклонении напряжения в сторону увеличения на те же 10% предел допустимой мощности будет превышен, и резистор R_3 может перегореть.

Легко убедиться в том, что в резисторах R_4 и R_5 запас мощности, предусмотренный при выборе, также отсутствует (а при других данных задачи допустимый предел может оказаться и превышенным).

Одинаковая надежность резисторов обеспечивается, если их выбираемые допустимые мощности пропорциональны значениям сопротивлений при одинаковых токах в резисторах.

3.7. Задачи для самостоятельного решения

3.9. Определить потерю напряжения в двух проводах линии, соединяющих станцию с потребителем, если сопротивление потребителя при силе тока 22 А равно 10 Ом, а напряжение в начале линии составляет 225 В.

3.10. Напряжение между трамвайным проводом и заземленным рельсом равно 600 В. Определить, каким сопротивлением должна обладать подъемная площадка, с которой производятся работы с проводом, если сопротивление тела человека при сухом состоянии кожи равно 50 кОм, а опасная для жизни сила тока 1 мА.

3.11. Потребитель, подключенный к генератору, израсходовал 25 кВт·ч электроэнергии за 5 сут непрерывной работы при напряжении 220 В. Определить силу тока и сопротивление потребителя.

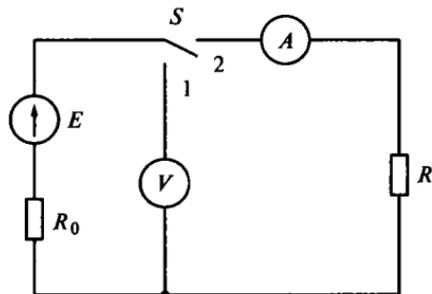
3.12. Электрическая печь с потребляемой мощностью 5 кВт при напряжении 220 В подключена к источнику энергии с внутренним сопротивлением 0,22 Ом. Определить ЭДС и КПД источника энергии.

3.13. Сигнальная лампочка подключена к аккумулятору, на зажимах которого до этого подключения напряжение равнялось 4,5 В. После подключения лампочки напряжение на зажимах аккумулятора уменьшилось до 4,2 В. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора и сопротивление лампочки, если сила тока в цепи составляла 700 мА.

3.14. Механическая мощность электродвигателя постоянного тока 10 кВт при напряжении 220 В и КПД 80 %. Определить электрическую мощность и силу тока двигателя.

3.15. Три последовательно соединенных потребителя с сопротивлениями $R_1 = 4,7$ Ом, $R_2 = 6,8$ Ом, $R_3 = 18$ Ом подключены к источнику питания с ЭДС $E = 90$ В и внутренним сопротивлением $R_0 = 0,5$ Ом. Определить силу тока в цепи, падения напряжений на всех потребителях, включая внутреннее сопротивление источника, напряжение на выводах источника, а также развиваемую и отдаваемую источником мощности, его КПД и мощности всех потребителей.

3.16. В цепи, показанной на рис. 3.19, при положении 1 ключа S вольтметр показывает 6,3 В, а при положении 2 — амперметр показывает 1,5 А. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника энергии, если сопротивление нагрузки $R = 3,9$ Ом, а сопротивлением амперметра и проводимостью вольтметра можно пренебречь.



3.17. Вольтметр, присоединенный к зажимам генератора, при холостом ходе показывает 230 В. Определить показания

Рис. 3.19. Схема электрической цепи к задаче 3.16

вольтметра при подключенной нагрузке, если ЭДС и внутреннее сопротивление источника энергии ($R_0 = 0,2$ Ом) поддерживаются постоянными, а сила тока в цепи принимает значения 10, 20, 40 и 50 А.

3.18. К зажимам генератора с внутренним сопротивлением 0,2 Ом присоединен вольтметр с сопротивлением 1000 Ом. Рассчитать относительную погрешность измерения ЭДС (в процентах) по формуле

$$\gamma = \frac{E - U}{E} 100.$$

3.19. Одна из последовательно соединенных лампочек гирлянды перегорела, и все лампочки погасли. Баллоны лампочек имеют разноцветное лаковое покрытие, сквозь которое не видно неисправности. Пояснить, как найти перегоревшую лампочку с помощью вольтметра и как можно найти неисправность без использования электроизмерительных приборов.

3.20. В электрической цепи, показанной на рис. 3.20, амперметр показывает 3 А при разомкнутом ключе S и 24 А при замкнутом ключе (сила тока короткого замыкания). Определить отношение сопротивления нагрузки R к внутреннему сопротивлению источника R_0 .

3.21. В электрической цепи, приведенной на рис. 3.21, вольтметр показывает 230 В при разомкнутом ключе S и 225 В при замкнутом ключе. Определить ЭДС, внутреннее сопротивление источника энергии и силу тока в цепи при замкнутом ключе, если $R_1 = 70$ Ом, $R_2 = 18$ Ом, $R_3 = 47$ Ом.

3.22. Для электрической цепи, показанной на рис. 3.22, определить значение сопротивления R_1 , которое обеспечит в этой цепи силу тока $I = 2$ А при ЭДС источника энергии $E = 24$ В, если со-

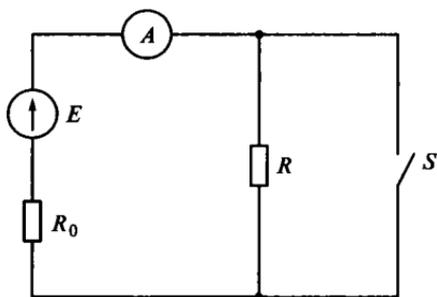


Рис. 3.20. Схема электрической цепи к задаче 3.20

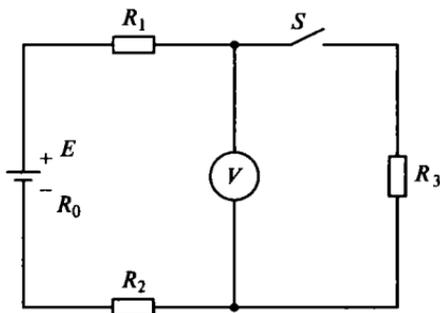


Рис. 3.21. Схема электрической цепи к задаче 3.21

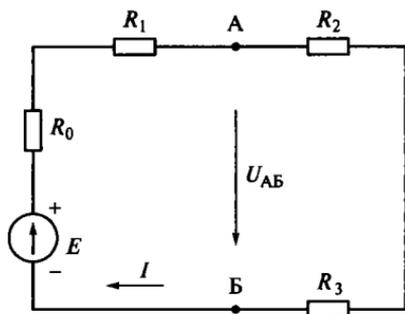


Рис. 3.22. Схема электрической цепи к задаче 3.22

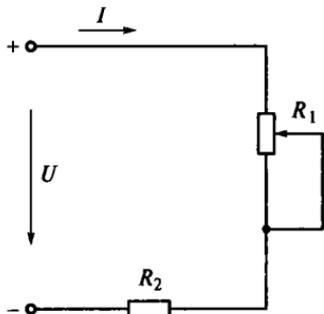


Рис 3.23. Схема электрической цепи с регулировкой тока реостатом

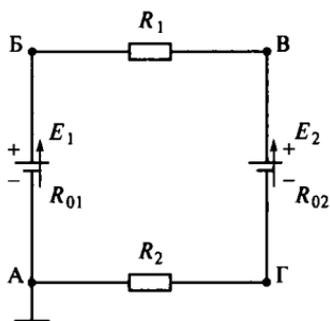
противление $R_2 = 3,3$ Ом, а $R_3 = 4,7$ Ом. Внутренним сопротивлением источника энергии пренебречь.

3.23. В электрической цепи, приведенной на рис. 3.22, напряжение на зажимах источника энергии равно 90 В, сопротивление $R_1 = 11$ Ом, а $R_2 = R_3$. Определить сопротивление R_2 , при котором $U_{AB} = 57$ В, и падения напряжений на сопротивлениях внешнего участка. Внутренним сопротивлением источника энергии пренебречь.

3.24. Сила тока в потребителе при включении его в сеть с напряжением 220 В равнялась 4 А. Для регулировки силы тока в цепи, показанной на рис. 3.23, последовательно с потребителем R_2 включили реостат R_1 . Определить, какое сопротивление должен иметь реостат, чтобы сила тока в цепи уменьшилась до 2 А.

3.25. ЭДС источника энергии $E = 9$ В, его внутреннее сопротивление $R_0 = 0,5$ Ом. Определить, при каком значении сопротивления внешнего участка цепи выделяемая на нем мощность будет максимальной и каково значение этой мощности.

3.26. Максимальная полезная мощность источника энергии составляет 200 Вт, а его ЭДС $E = 100$ В. Определить сопротивление приемника и силу тока в цепи.



3.27. Определить, какую максимальную мощность может выделять в нагрузке электрической цепи, показанной на рис. 3.3, источник энергии, ЭДС которого $E = 25$ В, а внутреннее сопротивление $R_0 = 0,5$ Ом. Найти, чему при этом равны сопротивление нагрузки R , сила

Рис. 3.24. Схема электрической цепи к задаче 3.28

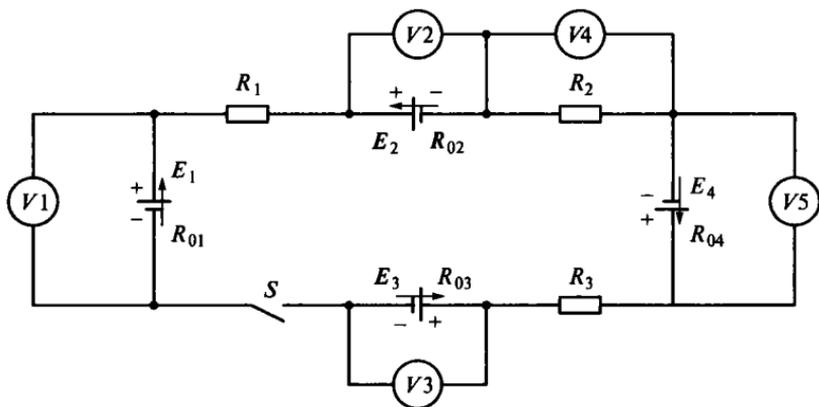


Рис. 3.25. Схема электрической цепи к задаче 3.29

тока в цепи, вырабатываемая источником мощность и его КПД. Определить, при каком сопротивлении нагрузки КПД источника составляет 90 %, если при этом источник вырабатывает 37,5 Вт.

3.28. В электрической цепи, показанной на рис. 3.24, $E_1 = 50$ В, $E_2 = 20$ В, $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_{01} = 1,5$ Ом, $R_{02} = 2$ Ом. Определить силу тока, напряжения на участках цепи, мощности источников энергии, мощности потребителей и составить баланс мощностей. Кроме того, определить ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника питания, заменяющего все источники питания заданной цепи.

3.29. Определить, как изменятся (увеличатся, уменьшатся) показания вольтметров в цепи, приведенной на рис. 3.25, при замыкании ключа S , если $E_1 = 50$ В, $E_2 = 25$ В, $E_3 = 15$ В и $E_4 = 60$ В.

3.30. В неразветвленной цепи, показанной на рис. 3.26, составленной из источников энергии E_1 и E_2 (имеющих соответ-

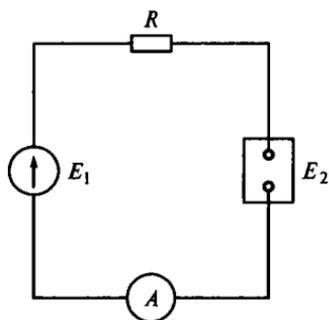


Рис. 3.26. Схема электрической цепи к задаче 3.30

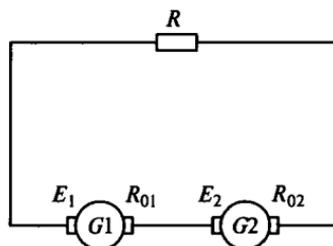


Рис. 3.27. Схема электрической цепи к задаче 3.31

ственно ЭДС 10 и 5 В) и магазина сопротивлений с предельным сопротивлением $R = 50 \text{ Ом}$, протекает ток $I = 100 \text{ мА}$, измеряемый амперметром. Определить, как соединены источники энергии (встречно или согласно) и чему равны напряжения на их зажимах. Внутренними сопротивлениями источников энергии пренебречь.

3.31. В неразветвленной цепи, показанной на рис. 3.27, соединены два источника энергии с равными токами короткого замыкания 15 А и приемник с сопротивлением 5 Ом. Определить ЭДС и внутренние сопротивления источников энергии, если при их согласном включении в цепи протекает ток силой 3 А, а при встречном включении — ток силой 0,2 А.

3.32. Напряжение между зажимами аккумулятора равно 8 В при разрядном токе 5 А. В момент начала зарядки при том же токе напряжение увеличилось до 10 В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора.

3.33. Аккумуляторная батарея из шести элементов емкостью 80 А·ч заряжается в течение 16 ч от источника постоянного тока с напряжением 18 В. Определить ток зарядки и пределы изменения сопротивления реостата, обеспечивающего неизменный ток зарядки, если ЭДС каждого элемента батареи в начале зарядки равна 1,2 В, а в конце — 2,0 В. Внутренним сопротивлением аккумуляторов пренебречь.

3.34. К выпрямителю с внутренним сопротивлением 3 Ом через реостат подсоединена аккумуляторная батарея. В начале ее зарядки при сопротивлении реостата 7 Ом сила тока составляла 4 А, а напряжение на выводах выпрямителя равнялось 100 В. В конце зарядки при силе тока 1 А сопротивление реостата составляло 12 Ом. Определить напряжение на выводах аккумуляторной батареи и составить баланс мощностей для моментов начала и конца зарядки.

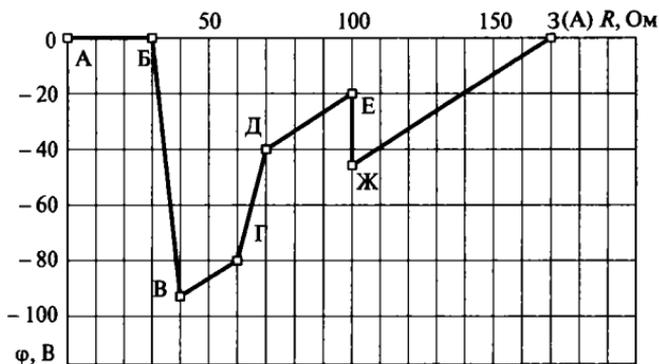


Рис. 3.28. Потенциальная диаграмма к задаче 3.35

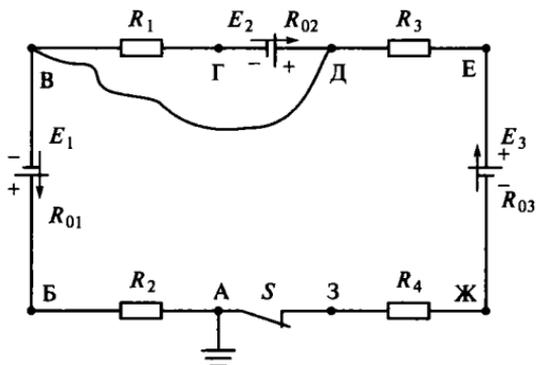


Рис. 3.29. Схема электрической цепи к задачам 3.36 и 3.37

3.35. Определить, какая неисправность внесена в электрическую цепь, приведенную на рис. 3.8, если ее потенциальная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 3.28. Оценить, как эта неисправность повлияла на направление и силу тока в цепи.

3.36. В электрической цепи, показанной на рис. 3.29, проводником закорочены выходы В и Д. Определить токи в цепи и режимы работы источников энергии. Рассчитать потенциалы точек и построить потенциальную диаграмму при параметрах цепи, приведенных в задаче 3.6.

3.37. Определить, какой вид будет иметь потенциальная диаграмма электрической цепи, приведенной на рис. 3.29, если разомкнуть ключ S , и чему будет равно в этом случае напряжение между точками А и З при параметрах элементов цепи, указанных в задаче 3.6.

3.38. Изобразить схему электрической цепи по виду потенциальной диаграммы, показанной на рис. 3.30, и определить токи

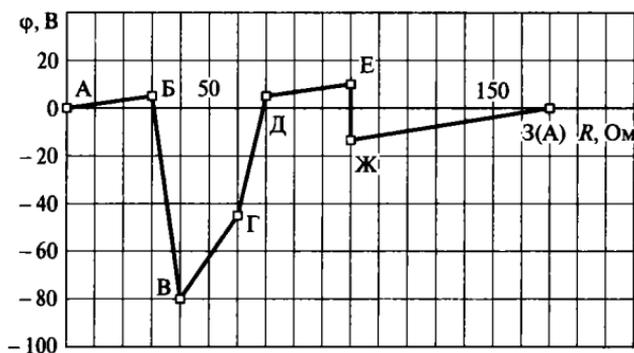


Рис. 3.30. Потенциальная диаграмма цепи к задаче 3.38

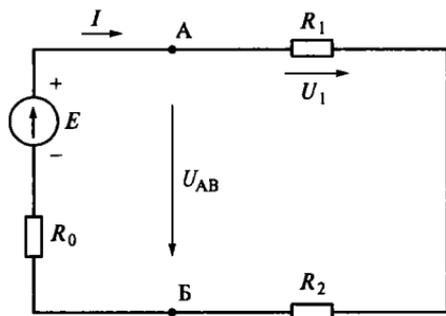


Рис. 3.31. Схема электрической цепи к задаче 3.39

в цепи, их направления и режимы работы источников питания. Показать, как изменится вид потенциальной диаграммы, если разомкнуть нормально

замкнутый ключ S , включенный между точками А и З.

3.39. Выбрать резисторы (желательно однотипные) для сопротивлений R_1 и R_2 в цепи, показанной на рис. 3.31, если между ее точками А и Б напряжение $U_{AB} = 36$ В, сила тока в цепи $I = 0,08$ А, а напряжение U_1 на сопротивлении R_1 равно 16 В.

3.40. Выбрать допустимые мощности для трех последовательно соединенных сопротивлений 120, 180 и 220 Ом, обеспечив 1,5-кратный запас надежности, если напряжение на выводах первого сопротивления составляет 8,5 В.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.9. 5 В.

3.10. Более 0,55 МОм.

3.11. 0,945 А; 233 Ом.

3.12. 225 В; 97,8 %.

3.13. 0,43 Ом; 6 Ом.

3.14. 12,5 кВт; 56,8 А.

3.15. 3 А; 1,5 В; 14,1 В; 20,4 В; 54 В; 88,5 В; 270 Вт; 265,5 Вт; 98,3 %; 42,3 Вт; 61,2 Вт; 162 Вт.

3.16. 6,3 В; 0,3 Ом.

3.17. $U = 228; 226; 222; 220$ В.

3.18. 0,02 %.

3.19. На выводах перегоревшей лампочки вольтметр покажет напряжение сети, а на всех остальных — нуль. Также можно поочередно замыкать каждую лампочку до тех пор, пока при очередном замыкании не зажгутся все остальные лампочки. При этом яркость горения лампочек увеличится.

3.20. 7: 1.

3.21. 230 В; 3 Ом; 5 А.

3.22. 4 Ом.

3.23. 9,5 Ом; 33 В; 28,5 В; 28,5 В.

3.24. 55 Ом.

3.25. 0,5 Ом; 40,5 Вт.

- 3.26. 12,5 Ом; 4 А.
 3.27. 312,5 Вт; 0,5 Ом; 25 А; 625 Вт; 50 %; 15 Ом.
 3.28. 0,62 А; 49,07 В; 9,28 В; 21,24 В; 18,56 В; 30,35 Вт; 5,74 Вт; 13,14 Вт; 11,48 Вт; $U_{AB} I = U_{BB} I + U_{BG} I + U_{GA} I$ или $30,35 = 13,14 + 5,74 + 11,48$; 30 В; 3,5 Ом.
 3.29. Напряжения U_1 и U_5 уменьшатся, а напряжения U_2, U_3, U_4 — увеличатся.
 3.30. Встречно; 10 и 5 В.
 3.31. 10 В; 0,67 Ом; 8,75 В; 0,58 Ом.
 3.32. 9 В; 0,2 Ом.
 3.33. 5 А; от 2,16 до 1,2 Ом.
 3.34. 72 В; 97 В; $448 = 48 + 112 + 288$ (Вт); $112 = 3 + 12 + 97$ (Вт).
 3.35. Короткое замыкание R_2 ; направление тока не изменилось, сила тока увеличилась до 0,64 А.
 3.36. 0,89 А; 1,17 А; все источники работают в режиме генератора; потенциалы точек следующие:

Точка	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З (А)
φ, В	0	26,8	-64,3	-87,6	-64,3	-37,5	-62,5	0

Потенциальная диаграмма показана на рис. 3.32.

3.37. Потенциальная диаграмма показана на рис. 3.33; $U_{A3} = 125$ В.

3.38. Схема цепи показана на рис. 3.34, а; 1,63 А; 0,19 А; потенциальная диаграмма при разомкнутом ключе S показана на рис. 3.34, б.

3.39. Расчетные значения: $R_1 = 200$ Ом; $P_1 = 1,28$ Вт; $R_2 = 250$ Ом; $P_2 = 1,6$ Вт. Для обеспечения R_1 выбираем два резистора по 100 Ом (1 Вт), соединенных последовательно, а для R_2 — четыре сопротив-

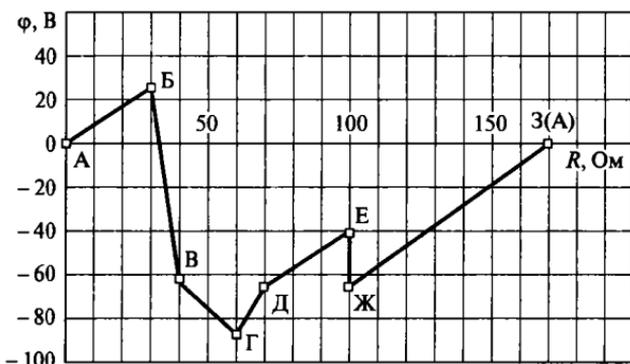


Рис. 3.32. Потенциальная диаграмма цепи к задаче 3.36

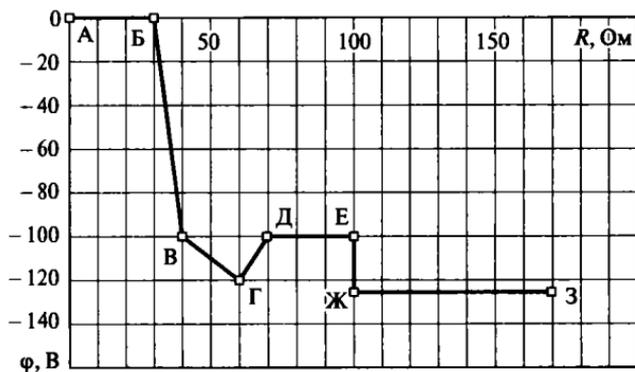


Рис. 3.33. Потенциальная диаграмма цепи к задаче 3.37

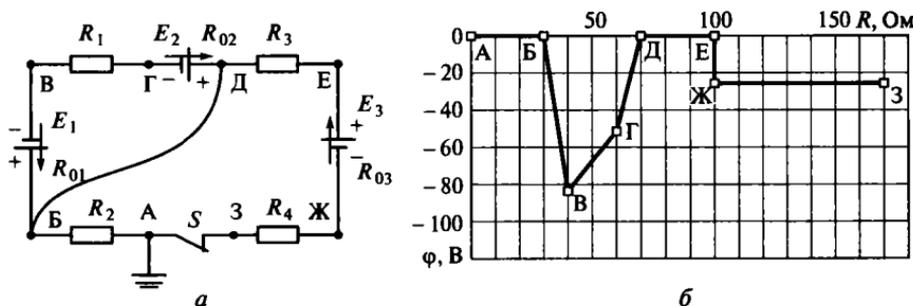


Рис. 3.34. Схема замкнутой цепи, построенная по виду потенциальной диаграммы, приведенной на рис. 3.30, (а), и потенциальная диаграмма этой цепи при разомкнутом ключе S (б)

ления по 100 Ом, два из которых (1 Вт), соединены последовательно между собой и с двумя параллельными (0,5 Вт).

3.40. 0,9 Вт (1 Вт); 1,35 (1,5 Вт); 1,66 (2 Вт).

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ. МЕТОД СВЕРТКИ

4.1. Цепь с одним источником энергии и двумя узлами

Задача 4.1. Ветвь электрической цепи содержит последовательное соединение источника энергии с ЭДС $E = 100$ В и внутренним сопротивлением $R_0 = 0,5$ Ом и сопротивлением $9,5$ Ом. К концам этой ветви в точках А и Б присоединены еще две ветви, одна из которых содержит составное сопротивление, состоящее из трех последовательно соединенных сопротивлений по 25 Ом, а другая — сопротивление 50 Ом.

Составить схему электрической цепи. Определить токи в ветвях, напряжения на элементах цепи, напряжения на выводах источника энергии и между узловыми точками. Для проверки правильности расчета цепи составить уравнение баланса мощностей.

Решение. 1. Схема электрической цепи. Заданная цепь может иметь два варианта схемного изображения, показанные на рис. 4.1. В схеме на рис. 4.1, *а* источник питания располагается в левой ветви, а в схеме на рис. 4.1, *б* — в средней. Расчет цепи, показанной на рис. 4.1, *б*, может вызвать затруднение, если

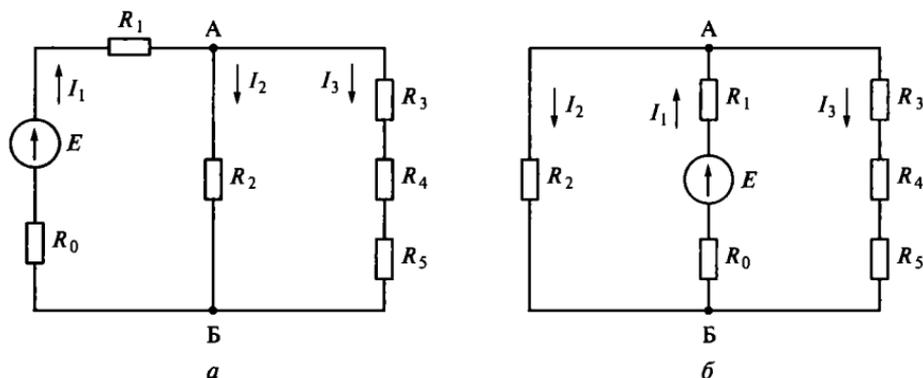


Рис. 4.1. Варианты изображения схемы цепи с двумя узлами:

а — источник в левой ветви; *б* — источник в средней ветви

не сразу заметить, что здесь сопротивления левой и правой ветвей цепи соединены параллельно, так как присоединены к одним и тем же узлам (А и Б). Таким образом, варианты схем на рис. 4.1, а и б — это различные схемные изображения одной и той же цепи, а следовательно, рассчитываются они одинаково.

2. Вычисление общего тока цепи I_1 . Для расчета используем метод свертки, заключающийся в первоначальном упрощении схемы — свертке — и последующем поэтапном возвращении к ее исходному виду.

Упростим схему, заменив последовательное соединение сопротивлений R_3, R_4, R_5 их общим сопротивлением R_{35} :

$$R_{35} = R_3 + R_4 + R_5 = 3 \cdot 25 = 75 \text{ Ом.}$$

Заменим также параллельное соединение сопротивлений R_2 и R_{35} их общим сопротивлением R_{25} :

$$R_{25} = \frac{R_2 R_{35}}{R_2 + R_{35}} = \frac{50 \cdot 75}{50 + 75} = 30 \text{ Ом.}$$

В результате получим эквивалентную неразветвленную цепь (рис. 4.2), методика расчета которой приведена в гл. 3.

В неразветвленной цепи, показанной на рис. 4.2, по всем элементам протекает общий ток I_1 , который легко определяется по закону Ома для полной цепи с одним источником энергии:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{25} + R_0} = \frac{100}{9,5 + 30 + 0,5} = 2,5 \text{ А.}$$

3. Вычисление токов в ветвях цепи. В соответствии с методом свертки после определения тока I_1 возвратимся к схеме, приведенной на рис. 4.1, и найдем токи I_2 и I_3 в ветвях заданной цепи. Это можно выполнить двумя способами: по распределению общего тока между ветвями и по узловому напряжению.

Определим токи в ветвях по распределению общего тока между ними. Общий ток I_1 разделяется в узле А на два тока (I_2 и I_3), распределяясь обратно пропорционально их сопротивлениям. Известно, что ток в любой из двух параллельных ветвей равен

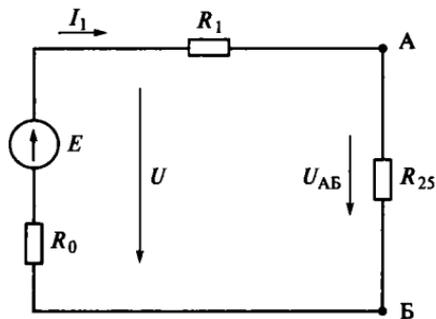


Рис. 4.2. Схема неразветвленной цепи, эквивалентной цепи, приведенной на рис. 4.1

общему току, умноженному на сопротивление противоположной ветви и деленному на сумму токов обеих ветвей. Например, сила тока в одной из параллельных ветвей

$$I_2 = \frac{I_1 R_{35}}{R_2 + R_{35}} = \frac{2,5 \cdot 75}{50 + 75} = 1,5 \text{ А.}$$

Силу тока I_3 в другой параллельной ветви можно определить или аналогично первой, или (что проще) по первому закону Кирхгофа:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 2,5 - 1,5 = 1 \text{ А.}$$

Найдем узловое напряжение U_{AB} и токи в ветвях цепи по узловому напряжению. Указанное напряжение легко определить по упрощенной эквивалентной схеме, приведенной на рис. 4.2:

$$U_{AB} = I_1 R_{25} = 2,5 \cdot 30 = 75 \text{ В.}$$

Так как рассматриваемые схемы эквивалентны, то узловое напряжение U_{AB} в цепях (см. рис. 4.1) имеет то же значение. Тогда согласно закону Ома для участка цепи сила тока

$$I_2 = U_{AB} / R_2 = 75 / 50 = 1,5 \text{ А.}$$

Силу тока I_3 можно определить или аналогично силе тока I_2 , или (что проще) по первому закону Кирхгофа:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 2,5 - 1,5 = 1 \text{ А.}$$

4. Вычисление напряжений в заданной цепи. Напряжения на сопротивлениях R_2 и R_{35} одинаковы и равны узловому напряжению:

$$U_2 = U_{35} = U_{AB} = 75 \text{ В.}$$

Напряжения на сопротивлениях R_3 , R_4 , и R_5 также одинаковы:

$$U_3 = U_4 = U_5 = U_{AB} / 3 = 75 / 3 = 25 \text{ В.}$$

Напряжения на сопротивлениях R_1 и R_0 определяем по закону Ома для участка цепи:

$$U_1 = I_1 R_1 = 2,5 \cdot 9,5 = 23,75 \text{ В; } U_0 = I_1 R_0 = 2,5 \cdot 0,5 = 1,25 \text{ В.}$$

Напряжение на выводах источника-генератора

$$U = E - U_0 = 100 - 1,25 = 98,75 \text{ В.}$$

5. Проверка баланса мощностей для заданной цепи. Мощность, развиваемая источником энергии,

$$P_{\text{ист}} = EI_1 = 100 \cdot 2,5 = 250 \text{ Вт.}$$

Мощность, отдаваемая источником энергии во внешнюю цепь,

$$P_{\text{потр}} = UI_1 + U_0 I_1 = 98,75 \cdot 2,5 + 1,25 \cdot 2,5 = 250 \text{ Вт.}$$

Следовательно, $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}$, т. е. баланс мощностей выполняется, что подтверждает правильность выполненных расчетов.

4.2. Применение цепей с одним источником энергии и двумя узлами в электрических измерениях

Задача 4.2. В цепи, показанной на рис. 4.3, *а*, изменяя сопротивление реостата R_p , можно регулировать силу тока от 0,25 до 2 А. Для измерения силы тока в цепи используется многопредельный амперметр. Сила номинального тока измерительного механизма амперметра $I_n = 0,5$ А, а его сопротивление $R_n = 1$ Ом.

Определить сопротивления шунтов $R_{\text{ш}}$ амперметра, обеспечивающие измерение следующих токов: 0,75; 1,5; 2,5 А.

Решение. 1. Расширение пределов измерения токов. Для измерения силы тока используется измерительный прибор, называемый амперметром. Амперметр показывает силу тока, проходящего через него. Следовательно, для измерения силы тока в каком-либо элементе цепи (приемнике, генераторе) или в любом участке цепи амперметр подключают *последовательно* к нему, как показано на рис. 4.3, *а*.

Включение амперметра не должно влиять на режим работы цепи, а значит, его сопротивление должно быть малым по сравнению с сопротивлением приемника, генератора или участка цепи. В этом случае будет мала и мощность потерь в амперметре.

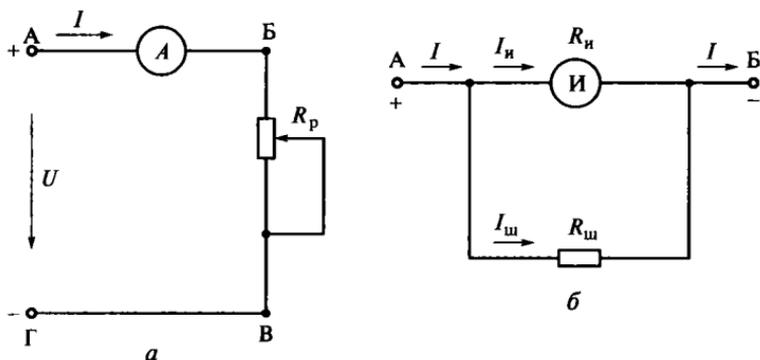


Рис. 4.3. Схемы измерения тока в цепи:

а — включение амперметра; *б* — включение шунта

Главной частью любого измерительного прибора является измерительный механизм (измеритель И). Амперметры выполняются на основе электромагнитных, магнитоэлектрических, ферродинамических и тепловых измерительных механизмов. Несмотря на различие принципов измерения токов, измерительный механизм любого прибора характеризуется силой номинального (предельного) тока I_n , проходящего через него, и наличием внутреннего сопротивления измерителя R_n .

Во многих случаях приходится измерять существенно отличающиеся по значению токи, часто превосходящие силу номинального тока измерителя. Для этого используют *многопредельные приборы*. Для расширения пределов измерения тока применяют *шунты*. Шунт выполняется из манганина и имеет постоянное сопротивление $R_{ш}$.

Шунт и измеритель (обладающий сопротивлением) соединяются между собой *параллельно* (рис. 4.3, б). Измеряемый ток I в параллельном соединении разделяется на ток измерителя I_n и ток шунта $I_{ш}$.

Силу тока измерителя I_n можно выразить через силу измеряемого тока I по известной формуле для определения силы тока в одной из параллельных ветвей по силе общего тока:

$$I_n = I \frac{R_{ш}}{R_{ш} + R_n},$$

откуда сила измеряемого тока

$$I = I_n \frac{R_{ш} + R_n}{R_{ш}} = I_n \left(1 + \frac{R_n}{R_{ш}} \right). \quad (4.1)$$

Зная силу номинального (предельного) тока измерителя $I_{n,ном}$, по формуле (4.1) легко определить предел измерения прибора (силу предельного измеряемого тока $I_{ном}$) для любого значения сопротивления шунта $R_{ш}$. В этом случае $I_n = I_{n,ном}$, а $I = I_{ном}$.

Из формулы (4.1) следует, что сила измеряемого тока I связана с силой тока измерителя I_n постоянным отношением (при постоянных значениях сопротивлений R_n и $R_{ш}$), называемым *шунтирующим множителем*:

$$\rho = \frac{I}{I_n} = 1 + \frac{R_n}{R_{ш}}. \quad (4.2)$$

Очевидно, что отклонение стрелки прибора на один и тот же угол при разных установленных шунтах (а следовательно, в разных пределах измерения) соответствует разным силам измеряемых токов.

2. Определение сопротивлений шунтов для получения заданных пределов измерения токов. При известных силе номинального (предельного) тока измерителя I_n , его сопротивлении R_n и силе предельного измеряемого тока I по формуле (4.2) легко определить шунтирующий множитель $\rho = I/I_n$, а затем сопротивление шунта, обеспечивающего измерение силы тока I для заданного предела:

$$R_{ш} = \frac{R_n}{\rho - 1}. \quad (4.3)$$

По формуле (4.3) найдем сопротивления шунтов $R_{ш}$ для заданных по условию задачи пределов измерения амперметра при известной силе тока $I_n = 0,5$ А и сопротивлении $R_n = 1$ Ом:

I , А (предел измерения)	0,75	1,5	2,5
$\rho = I/I_n$ (шунтирующий множитель)	1,5	3	5
$R_{ш}$, Ом (сопротивление шунта)	2	0,5	0,25

Задача 4.3. В цепи, показанной на рис. 4.4, а, при регулировке тока с помощью реостата R_p напряжение на сопротивлении R изменяется в широких пределах. Для его измерения используется многопредельный вольтметр с таким же измерительным механизмом, как у амперметра из задачи 4.2 (номинальный ток измерительного механизма $I_n = 0,5$ А, а его сопротивление $R_n = 1$ Ом).

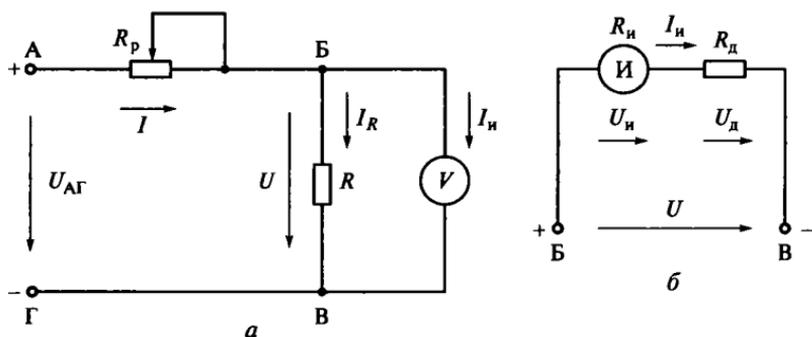


Рис. 4.4. Схемы измерения напряжения в цепи:

а — включение вольтметра; б — включение добавочного сопротивления

Определить значения добавочных сопротивлений R_d вольтметра, обеспечивающие измерение напряжений 75, 150 и 300 В.

Решение. 1. Расширение пределов измерения напряжений. Для измерения напряжений используют измерительный прибор, называемый вольтметром. В вольтметре может быть использован измерительный механизм, аналогичный измерительному механизму амперметра. Угол поворота подвижной части такого измерителя зависит от силы тока в измерительном механизме, но шкала вольтметра градуируется по напряжению, т. е. на его шкале отмечаются значения напряжений, соответствующие различным углам поворота подвижной части измерителя.

Для измерения напряжения между какими-либо двумя точками цепи вольтметр присоединяют к этим точкам *параллельно*, как показано на рис. 4.4, а. Чтобы присоединение вольтметра не изменило режим работы цепи, его сопротивление должно быть много больше сопротивления цепи между точками, к которым он подключается.

Поскольку сопротивление измерителя R_n мало, то большое сопротивление вольтметра обеспечивается использованием *добавочного сопротивления* R_d , изготовленного из материала с большим удельным сопротивлением (манганина, константана), которое соединяется *последовательно* с измерителем (рис. 4.4, б).

При этом падение напряжения на измерителе U_n является только малой частью измеряемого напряжения U , так как при последовательном соединении элементов цепи подведенное напряжение распределяется между этими элементами пропорционально значениям их сопротивлений.

Отношение, показывающее, во сколько раз напряжение U на выводах вольтметра больше напряжения U_n на измерителе, называется *множителем добавочного сопротивления* ρ , т. е.

$$\rho = \frac{U}{U_n}. \quad (4.4)$$

Учитывая, что $U = (R_n + R_d)I_n$, а $U_n = R_n I_n$, из формулы (4.4) получим

$$\rho = \frac{R_n + R_d}{R_n}. \quad (4.5)$$

Из формулы (4.5) найдем выражение для определения добавочного сопротивления R_d при известных значениях сопротивления измерителя R_n и множителя добавочного сопротивления ρ :

$$R_d = R_n (\rho - 1). \quad (4.6)$$

При известном значении предельного тока измерителя можно найти *предел измерения* (предельное напряжение) вольтметра:

$$U_{\max} = (R_{\text{и}} + R_{\text{д}})I_{\text{и. max}}. \quad (4.7)$$

Из формулы (4.7) видно, что предел измерения зависит от значения добавочного сопротивления $R_{\text{д}}$. Изменяя значение добавочного сопротивления $R_{\text{д}}$, можно варьировать пределы измерения вольтметра.

2. Определение значений добавочных сопротивлений для получения заданных пределов измерения напряжений. Предельное напряжение на измерителе согласно закону Ома

$$U_{\text{и}} = R_{\text{и}}I_{\text{и}} = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ В.}$$

Для каждого заданного в условии задачи предела измерения по формуле (4.5) найдем значение множителя добавочного сопротивления ρ , а по формуле (4.6) — значение добавочного сопротивления $R_{\text{д}}$:

U , В (предел измерения)	75	150	300
$\rho = U/U_{\text{и}}$ (множитель добавочного сопротивления)	150	300	600
$R_{\text{д}}$, Ом (добавочное сопротивление)	149	299	599

Задача 4.4. При измерении сопротивлений методом амперметра — вольтметра применяются две схемы, показанные на

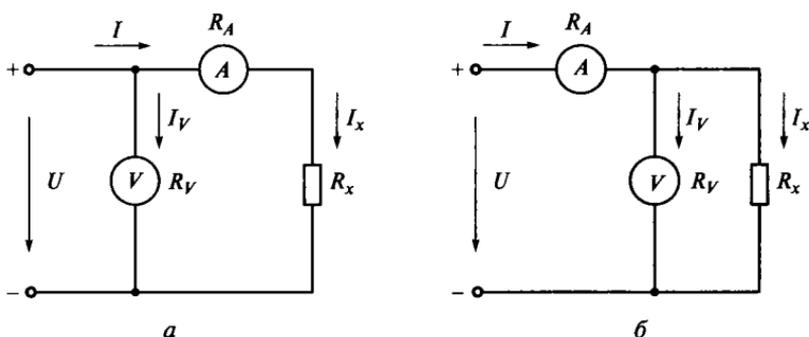


Рис. 4.5. Схемы измерения сопротивлений методом амперметра — вольтметра:

a — амперметр измеряет ток в ветви измеряемого сопротивления; *б* — амперметр измеряет общий ток цепи

рис. 4.5, а и б. В каждой из этих схем неизвестное сопротивление R_x определяется как отношение показаний вольтметра и амперметра.

Рассмотреть особенности измерения сопротивлений с помощью каждой из схем и обосновать выбор схемы для измерения малых и больших значений R_x . Определить погрешность измерения сопротивлений 10 и 100 Ом для каждой из схем и выбрать схему измерения для каждого из них, если в обеих схемах используются амперметр и вольтметр, сопротивления которых соответственно $R_A = 0,5$ Ом и $R_V = 1000$ Ом.

Решение. 1. Измерение сопротивлений с помощью вольтметра и амперметра. Существуют разные способы измерения сопротивлений на постоянном токе: с помощью амперметра и вольтметра, измерительным мостом, зарядным или разрядным емкостным устройством, вольтметром с известным внутренним сопротивлением, омметром, потенциометром или мегаомметром, электронным омметром и т. п.

Метод измерения сопротивления с использованием амперметра и вольтметра является достаточно простым, однако точность такого измерения ограничена. Во-первых, оно ведется по двум приборам, имеющим недостаточно высокую точность показаний, а во-вторых, на результаты измерений влияет собственное сопротивление одного из приборов.

Рассмотрим две схемы измерения сопротивлений с помощью вольтметра и амперметра (см. рис. 4.5).

Пусть R — сопротивление, равное отношению показаний вольтметра и амперметра; R_x (измеряемое сопротивление) — отношение напряжения на сопротивлении R_x к силе тока, протекающего через него.

При использовании схемы, показанной на рис. 4.5, а, вольтметр измеряет напряжение U , а амперметр — силу тока I_x , поэтому сопротивление

$$R = \frac{U}{I_x}. \quad (4.8)$$

Напряжение U равно сумме напряжений на измеряемом сопротивлении R_x (U_x) и на сопротивлении амперметра R_A (U_A), т. е.

$$U = U_x + U_A = I_x R_x + I_x R_A,$$

В соответствии с законом Ома для участка цепи с учетом формулы (4.8) найдем измеряемое сопротивление:

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U - I_x R_A}{I_x} = R - R_A, \quad (4.9)$$

$$R = R_x + R_A. \quad (4.10)$$

Из формулы (4.10) следует, что сопротивление R , определенное по показаниям приборов, больше измеряемого сопротивления R_x на значение сопротивления R_A .

Таким образом, при определении измеряемого сопротивления R_x по схеме, приведенной на рис. 4.5, а, необходимо учитывать сопротивление R_A .

Если же измеряемое сопротивление R_x велико по сравнению с сопротивлением амперметра R_A , которым можно пренебречь, то R_x можно считать равным R , т.е. $R_x = R = U/I_x$.

При использовании схемы на рис. 4.5, б вольтметр измеряет напряжение U_x на сопротивлении R_x , через которое протекает ток I_x , а амперметр измеряет силу тока I .

Значит, в этом случае справедливы следующие соотношения:

$$R = \frac{U_x}{I}; \quad (4.11)$$

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U_x}{I - I_V}, \quad (4.12)$$

где I_V — сила тока, проходящего через вольтметр.

Согласно закону Ома

$$I_V = U_x/R_V. \quad (4.13)$$

Из сравнения формул (4.11) и (4.12) видно, что измеряемое сопротивление R_x больше сопротивления R , так как $I - I_V < I$.

Если же измеряемое сопротивление R_x мало по сравнению с сопротивлением вольтметра R_V и, следовательно, сила тока I_x намного больше силы тока I_V вольтметра, то им можно пренебречь.

Тогда согласно формулам (4.11) и (4.12) измеряемое сопротивление R_x можно считать равным R :

$$R_x = R = U_x/I. \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) часто используется на практике для измерения сопротивлений, если не требуется высокая точность.

Из проведенного анализа следует, что при использовании любой из схем для повышения точности измерения сопротивлений необходимо учитывать значения сопротивлений измерительных приборов, указываемые на их шкалах.

2. Расчет погрешности измерений сопротивлений в зависимости от схемы измерения. По-

грешность измерения γ рассчитывается по следующим формулам (соответственно в относительных единицах и процентах):

$$\gamma = \frac{|R - R_x|}{R_x}; \quad \gamma = \frac{|R - R_x|}{R_x} 100. \quad (4.15)$$

Найдем погрешность измерения сопротивления по схеме, показанной на рис. 4.5, а. Выражения для определения погрешности (в относительных единицах и процентах) после подстановки формулы (4.10) в формулу (4.15) с учетом того, что $R > R_x$, будут иметь следующий вид:

$$\gamma = \frac{R - R_x}{R_x} = \frac{R_x + R_A - R_x}{R_x} = \frac{R_A}{R_x}; \quad \gamma = \frac{R_A}{R_x} 100. \quad (4.16)$$

Найдем погрешность измерения сопротивления по схеме, приведенной на рис. 4.5, б. Выражения для вычисления погрешности (в относительных единицах и процентах) после подстановки формул (4.11)... (4.13) в формулу (4.15) с учетом того, что $R_x > R$, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{R_x - R}{R_x} = 1 - \frac{R}{R_x} = 1 - \frac{U_x}{IR_x} = 1 - \frac{U_x}{(I_x + I_V)R_x} = \\ &= 1 - \frac{U_x}{U_x \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_V} \right) R_x} = 1 - \frac{R_V}{R_x + R_V}; \quad (4.17) \\ \gamma &= \left(1 - \frac{R_V}{R_x + R_V} \right) 100. \end{aligned}$$

3. Расчет погрешности измерения сопротивления $R_x = 10$ Ом. Погрешность измерения сопротивления по схеме на рис. 4.5, а определим по формуле (4.16):

$$\gamma = \frac{R_A}{R_x} 100 = \frac{0,5}{10} 100 = 5 \%.$$

Погрешность измерения сопротивления по схеме на рис. 4.5, б найдем по формуле (4.17):

$$\gamma = \left(1 - \frac{R_V}{R_x + R_V} \right) 100 = \left(1 - \frac{1\,000}{10 + 1\,000} \right) 100 = 0,99 \%.$$

Результаты расчета показывают, что сопротивление $R_x = 10$ Ом недостаточно велико по сравнению с сопротивлением амперметра

$R_A = 0,5$ Ом, и измерение R_x по схеме, показанной на рис. 4.5, *а*, дает достаточно большую погрешность, равную 5 %.

В то же время сопротивление $R_x = 10$ Ом достаточно мало по сравнению с сопротивлением вольтметра $R_V = 1000$ Ом, и измерение R_x по схеме, приведенной на рис. 4.5, *б*, дает небольшую погрешность — около 1 %.

Таким образом, для измерения сопротивлений порядка 10 Ом с использованием амперметра и вольтметра при заданных в задаче сопротивлениях приборов предпочтительнее использовать схему, показанную на рис. 4.5, *б*.

4. Расчет погрешности измерения сопротивления $R_x = 100$ Ом. Погрешность измерения сопротивления по схеме на рис. 4.5, *а* найдем по формуле (4.16):

$$\gamma = \frac{R_A}{R_x} 100 = \frac{0,5}{100} 100 = 0,5 \%$$

Погрешность измерения сопротивления по схеме на рис. 4.5, *б* определим по формуле (4.17):

$$\gamma = \left(1 - \frac{R_V}{R_x + R_V} \right) 100 = \left(1 - \frac{1000}{100 + 1000} \right) 100 = 9,09 \%$$

Результаты расчета показывают, что сопротивление $R_x = 100$ Ом достаточно велико по сравнению с сопротивлением амперметра $R_A = 0,5$ Ом, и измерение R_x по схеме на рис. 4.5, *а* дает небольшую погрешность: 0,5 %.

В то же время сопротивление вольтметра $R_V = 1000$ Ом недостаточно большое по сравнению с сопротивлением $R_x = 100$ Ом, и измерение R_x по схеме на рис. 4.5, *б* дает достаточно большую погрешность — более 9 %.

Таким образом, при измерении сопротивлений порядка 100 Ом с использованием амперметра и вольтметра при заданных в задаче сопротивлениях приборов предпочтительнее использовать схему, показанную на рис. 4.5, *а*.

4.3. Цепь с одним источником энергии и несколькими узлами

Задача 4.5. Определить сопротивления и потребляемую мощность делителя напряжения (рис. 4.6, *а*), обеспечивающего питание цепей электронного устройства с тремя разными напряжениями и токами: $U_1 = 10$ В; $U_2 = 14,5$ В; $U_3 = 20$ В; $I_2 = 15$ мА. $I_4 = 10$ мА; $I_6 = 5$ мА. Напряжение источника энергии $U = U_3 = 20$ В

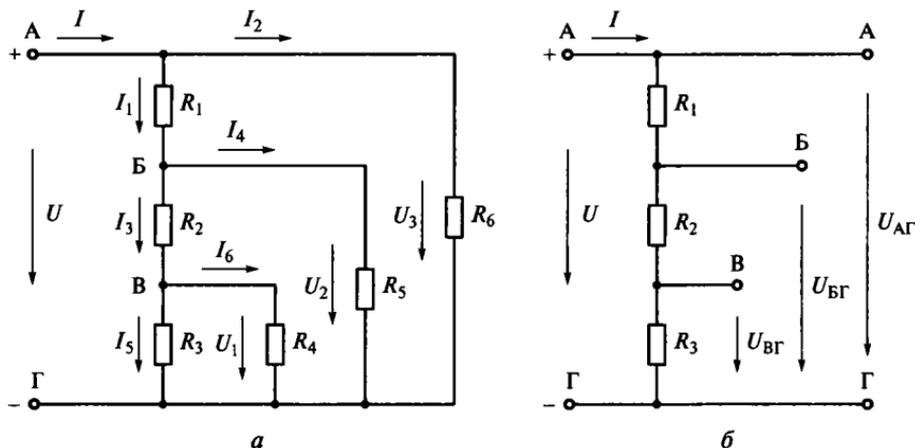


Рис. 4.6. Схемы делителя напряжения:

а — в рабочем режиме с подключенными потребителями; *б* — в режиме холостого хода

принять одинаковым для рабочего режима и режима холостого хода.

Решение. 1. Делитель напряжения и режимы его работы. *Делитель напряжения* — это любая цепь из нескольких последовательно соединенных сопротивлений, например цепь из сопротивлений R_1, R_2, R_3 на рис. 4.6. Если к выводам источника энергии с напряжением U присоединить такую цепь, то это напряжение определенными частями распределяется по сопротивлениям цепи делителя.

Делитель на рис. 4.6, *а* имеет два вывода (А и Г) для присоединения к источнику и три пары выходных выводов для подключения трех цепей электронного устройства (А и Г, Б и Г, В и Г). Эти цепи являются потребителями энергии, поэтому представлены на схеме сопротивлениями R_4, R_5, R_6 .

На рис. 4.6, *б* показана схема заданного делителя напряжения с отключенными потребителями, т. е. *в режиме холостого хода*.

Так как напряжения между одноименными выводами делителя в рабочем режиме и режиме холостого хода неодинаковые (подключение потребителей вызывает изменение сопротивлений, токов и напряжений между одноименными выводами схем), расчет сопротивлений делителя необходимо проводить в рабочем режиме, т. е. по схеме с присоединенными потребителями (см. рис. 4.6, *а*).

2. Расчет сопротивлений делителя. Определим сопротивление R_3 делителя. Нетрудно убедиться в том, что в при-

веденных схемах (см. рис. 4.6) нельзя однозначно определить значения сопротивлений делителя, т.е. эта задача многозначна. Даже при заданных значениях напряжений в режиме холостого хода можно найти только отношение сопротивлений $R_1:R_2:R_3$, но нельзя определить их значения.

Однако достаточно задать одно из сопротивлений, например R_3 , и тогда остальные сопротивления делителя (R_1 и R_2) можно будет определить однозначно. Обычно, чтобы уменьшить влияние режима работы потребителя R_4 на напряжение U_1 , выбирают $R_3 \ll R_4$. На практике при выборе R_3 часто используют соотношение

$$R_3 = (0,1 \dots 0,15) R_4. \quad (4.18)$$

Сопротивление R_4 цепи определим по закону Ома, исходя из заданного напряжения U_1 и силы тока I_6 :

$$R_4 = U_1/I_6 = 10/5 \cdot 1000 = 2000 \text{ Ом} = 2 \text{ кОм}.$$

Согласно соотношению (4.18) примем $R_3 = 0,125 R_4$, тогда

$$R_3 = 0,125 R_4 = 0,125 \cdot 2000 = 250 \text{ Ом}.$$

Для определения сопротивления R_2 делителя найдем силу тока I_3 в сопротивлении R_2 методом свертки, т.е. как общий ток параллельного соединения сопротивлений R_3 и R_4 . Так как известно их общее напряжение U_1 , заменив R_3 и R_4 общим сопротивлением, по закону Ома определим силу тока I_3 :

$$I_3 = \frac{U_1}{R_{34}} = \frac{U_1(R_3 + R_4)}{R_3 R_4} = I_5 \frac{R_3 + R_4}{R_4} = 40 \frac{250 + 2000}{2000} = 45 \text{ мА}.$$

Для проверки определим силу тока I_3 более простым способом — по первому закону Кирхгофа, вычислив предварительно по закону Ома силу тока I_5 :

$$I_5 = U_1/R_3 = 10/250 = 0,04 \text{ А} = 40 \text{ мА};$$

$$I_3 = I_5 + I_6 = 40 + 5 = 45 \text{ мА}.$$

Найдем напряжение $U_{БВ}$ на сопротивлении R_2 :

$$U_{БВ} = U_2 - U_1 = 14,5 - 10 = 4,5 \text{ В}.$$

Сопротивление R_2 делителя определим по закону Ома:

$$R_2 = U_{БВ}/I_3 = 4,5/45 \cdot 1000 = 100 \text{ Ом}.$$

Для определения сопротивления R_1 делителя найдем силу тока I_1 по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_3 + I_4 = 45 + 10 = 55 \text{ мА}.$$

Найдем напряжение U_{AB} на сопротивлении R_1 :

$$U_{AB} = U_3 - U_2 = 20 - 14,5 = 5,5 \text{ В.}$$

Тогда согласно закону Ома сопротивление делителя

$$R_1 = U_{AB}/I_1 = 5,5/55 \cdot 1000 = 100 \text{ Ом.}$$

3. Расчет мощностей, потребляемых сопротивлениями делителя. Очевидно, что для обеспечения надежности (безопасности) работы делителя напряжения недостаточно рассчитать его сопротивления, необходимо знать и потребляемую ими мощность.

Мощность, выделяемая на сопротивлении R_1 ,

$$P_{\text{потр } 1} = U_{AB}I_1 = 5,5 \cdot 55 \cdot 10^{-3} = 0,3025 \text{ Вт.}$$

Мощность, выделяемая на сопротивлении R_2 ,

$$P_{\text{потр } 2} = U_{BB}I_3 = 4,5 \cdot 45 \cdot 10^{-3} = 0,2025 \text{ Вт.}$$

Мощность, выделяемая на сопротивлении R_3 ,

$$P_{\text{потр } 3} = U_{BG}I_5 = U_1I_5 = 10 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 0,4 \text{ Вт.}$$

Таким образом, заданный режим работы электронного устройства может обеспечить делитель напряжения, состоящий из трех сопротивлений $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$ и $R_3 = 250 \text{ Ом}$, мощность каждого из которых не менее 0,5 Вт. Определенный запас мощности, обусловленный необходимостью учета допуска на сопротивления выбираемых резисторов, позволит защитить устройство от перегрева и обеспечить надежность его работы.

4. Составление баланса мощностей для проверки правильности выполненного расчета. Найдем мощности источника и потребителей:

$$P_{\text{ист}} = UI = U_3(I_1 + I_2) = 20(55 + 15)10^{-3} = 1,4 \text{ Вт;}$$

$$P_{\text{потр}} = P_{\text{потр } 1} + P_{\text{потр } 2} + P_{\text{потр } 3} + U_3I_2 + U_2I_4 + U_1I_6 = 0,3025 + 0,2025 + 0,4 + 20 \cdot 15 \cdot 10^{-3} + 14,5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1,4 \text{ Вт.}$$

Соблюдение баланса мощностей $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}} = 1,4 \text{ Вт}$ подтверждает правильность выполненных расчетов.

4.4. Цепь с одним источником энергии при соединении потребителей треугольником и звездой. Метод преобразования

Задача 4.6. Определить все токи в мостовой цепи, показанной на рис. 4.7, при следующих ее параметрах: $E = 63 \text{ В}$; $R_0 = 0,5 \text{ Ом}$;

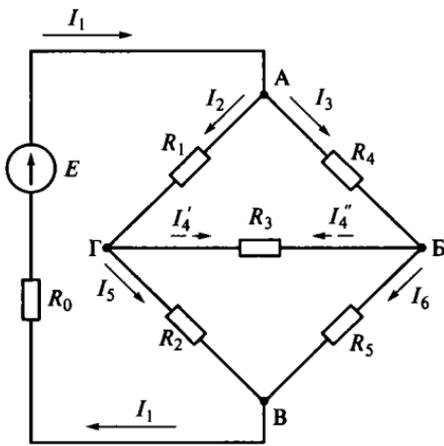


Рис. 4.7. Схема мостовой цепи

$R_1 = 30 \text{ Ом}; R_2 = 20 \text{ Ом}; R_3 = 25 \text{ Ом}; R_4 = 15 \text{ Ом}; R_5 = 10 \text{ Ом}.$

Решение. 1. Особенности рассматриваемой цепи. Во всех ранее рассмотренных цепях направления токов в ветвях определялись однозначно. В данной цепи нельзя заранее однозначно указать направление тока в сопротивлении R_3 . Ток I_1 в узле А разветвляется на два тока I_2 и I_3 , направления которых однозначно определены: от клеммы «+» источника к клемме «-». В узлах Г и Б токи I_2 и I_3 разветвляются. При этом в сопротивлении R_3 оказываются два противоположно направленных

частичных тока (показаны штриховыми стрелками): ток I_4' (часть тока I_2), направленный вправо, и ток I_4'' (часть тока I_3), направленный влево. Направление результирующего тока в сопротивлении R_3 зависит от параметров цепи и определится только в процессе расчета. Токи I_5 и I_6 направлены однозначно — к клемме «-» источника.

Кроме того, в ранее рассмотренных задачах расчет цепей с одним источником энергии основывался на упрощении схемы с последовательно и параллельно соединенными сопротивлениями. В данной задаче таких соединений нет: нет сопротивлений, подключенных к одним и тем же узлам (признак параллельного соединения), и нет сопротивлений, по которым проходил бы один и тот же ток (признак последовательного соединения).

Тем не менее применение прежних методов для расчета заданной цепи становится возможным, если выполнить определенное преобразование схемы. Данная цепь имеет свои особенности: она содержит два соединения звездой (R_1, R_2, R_3 и R_3, R_4, R_5) и два соединения треугольником (R_1, R_3, R_4 и R_2, R_3, R_5). Если один из треугольников сопротивлений преобразовать в эквивалентную звезду сопротивлений или, наоборот, звезду преобразовать в эквивалентный треугольник, то в схеме цепи появятся последовательные и параллельные соединения, и задачу можно будет решить методом свертки.

2. Преобразование треугольника сопротивлений R_1, R_3, R_4 в эквивалентную звезду. Сначала представим заданную схему цепи без заменяемого треугольника, как показано на рис. 4.8, а.

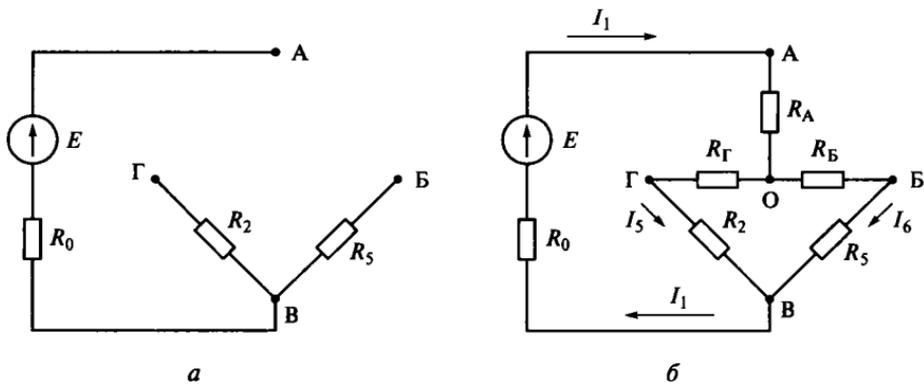


Рис. 4.8. Замена треугольника сопротивлений мостовой цепи эквивалентной звездой сопротивлений:

a — отключение треугольника сопротивлений между точками А, Б, Г цепи; *б* — включение звезды сопротивлений между точками А, Б, Г цепи

Затем между узловыми точками А, Б, Г этой цепи поместим звезду сопротивлений R_A , R_B , R_Γ (рис. 4.8, б). Полученная таким образом цепь имеет последовательные и параллельные соединения сопротивлений, а следовательно, может быть упрощена, т. е. преобразована в неразветвленную цепь (свернута) и рассчитана методом свертки.

Так, сопротивления R_Γ и R_2 соединены между собой последовательно, так же, как R_B и R_5 . Их общие сопротивления $R_{\Gamma 2}$ и R_{B5} соединены между собой параллельно и могут быть заменены одним общим сопротивлением $R_{\Gamma 5}$. После замены получим неразветвленную цепь, содержащую источник ЭДС E с внутренним сопротивлением R_0 и сопротивления R_A и $R_{\Gamma 5}$.

В упрощенной цепи по закону Ома можно определить силу тока I_1 . Остальные токи исходной цепи определяются при постепенном разворачивании упрощенной (преобразованной) цепи.

3. Свертка цепи и определение силы тока I_1 (см. рис. 4.8, б). Найдем сопротивления лучей звезды R_A , R_B , R_Γ . Согласно теории сопротивление луча эквивалентной звезды, направленного к одному из узлов, равно произведению сопротивлений двух сторон треугольника, сходящихся в этом узле, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника. Таким образом,

$$R_A = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{30 \cdot 15}{30 + 25 + 15} = 6,4 \text{ Ом};$$

$$R_B = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{25 \cdot 15}{30 + 25 + 15} = 5,4 \text{ Ом};$$

$$R_{\Gamma} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{30 \cdot 25}{30 + 25 + 15} = 10,7 \text{ Ом.}$$

Определим общее сопротивление участка ОВ цепи:

$$R_{\Gamma 2} = R_{\Gamma} + R_2 = 10,7 + 20 = 30,7 \text{ Ом;}$$

$$R_{B5} = R_B + R_5 = 5,4 + 10 = 15,4 \text{ Ом;}$$

$$R_{OB} = \frac{R_{\Gamma 2} R_{B5}}{R_{\Gamma 2} + R_{B5}} = \frac{30,7 \cdot 15,4}{30,7 + 15,4} = 10,2 \text{ Ом.}$$

Сила общего тока цепи

$$I_1 = \frac{E}{R_0 + R_A + R_{OB}} = \frac{63}{0,5 + 6,4 + 10,2} = 3,67 \text{ А.}$$

4. Определение силы токов I_5 и I_6 . Найдем напряжение между точками О и В цепи:

$$U_{OB} = I_1 R_{OB} = 3,67 \cdot 10,2 = 37,57 \text{ В.}$$

Силы токов I_5 и I_6 найдем по закону Ома:

$$I_5 = \frac{U_{OB}}{R_{\Gamma 2}} = \frac{37,57}{30,7} = 1,22 \text{ А; } I_6 = \frac{U_{OB}}{R_{B5}} = \frac{37,57}{15,4} = 2,45 \text{ А.}$$

5. Определение напряжений U_{AB} , U_{AG} , U_{BG} между узлами А, Б и Г. Найдем напряжения между каждым из узлов А, Б, Г и узлом О. Учítывая, что ток в сопротивлении течет от точки с бóльшим потенциалом к точке с меньшим потенциалом и напряжение на сопротивлении по закону Ома равно произведению силы тока на сопротивление, запишем

$$\varphi_A - \varphi_O = I_1 R_A; \quad \varphi_O - \varphi_{\Gamma} = I_5 R_{\Gamma}; \quad \varphi_O - \varphi_B = I_6 R_B. \quad (4.19)$$

Вычислим напряжения U_{AB} , U_{AG} и U_{BG} , складывая или вычитая (по необходимости) уравнения (4.19):

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \varphi_A - \varphi_O + \varphi_O - \varphi_B = I_1 R_A + I_6 R_B = \\ &= 3,67 \cdot 6,4 + 2,45 \cdot 5,4 = 36,7 \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{AG} &= \varphi_A - \varphi_O + \varphi_O - \varphi_{\Gamma} = I_1 R_A + I_5 R_{\Gamma} = \\ &= 3,67 \cdot 6,4 + 1,22 \cdot 10,7 = 36,7 \text{ В;} \end{aligned}$$

$$U_{BG} = \varphi_O - \varphi_{\Gamma} - \varphi_O + \varphi_B = I_5 R_{\Gamma} - I_6 R_B = 1,22 \cdot 10,7 - 2,45 \cdot 5,4 = 0.$$

6. Определение токов I_2 , I_3 и I_4 в цепи на рис. 4.7. Проверка правильности расчета. Так как схемы, при-

веденные на рис. 4.7 и рис. 4.8, б, эквивалентные, то потенциалы в их одноименных точках, а следовательно, и напряжения между этими точками одинаковы. Таким образом, на заданных сопротивлениях R_1 , R_3 и R_4 (см. рис. 4.7) известны напряжения, следовательно, можно определить силы токов по закону Ома:

$$I_2 = \frac{U_{АГ}}{R_1} = \frac{36,7}{30} = 1,22 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{U_{АБ}}{R_4} = \frac{36,7}{15} = 2,45 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{U_{БГ}}{R_3} = \frac{0}{25} = 0.$$

Для проверки правильности расчета составим баланс мощностей цепи, рассчитаем и сравним мощности источника и потребителя:

$$P_{\text{ист}} = EI_1 = 63 \cdot 3,67 = 231,2 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{потр}} = I_1^2 R_0 + U_{АГ} I_2 + U_{АБ} I_3 + U_{БГ} I_4 + I_5^2 R_2 + I_6^2 R_5 = 3,67^2 \cdot 0,5 + \\ + 36,7 \cdot 1,22 + 36,7 \cdot 2,45 + 0 + 1,22^2 \cdot 20 + 2,45 \cdot 10 = 231,2 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}} = 231,2 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей соблюдается, что подтверждает правильность выполненного расчета.

7. Анализ полученных результатов расчета. Цепи, имеющие схему, аналогичную рассматриваемой в данной задаче, называются *мостовыми*. Они широко применяются в устройствах автоматики и в технике электрических измерений, в частности для измерения сопротивлений. В мостовой схеме, показанной на рис. 4.7, ветвь, обозначенная БГ, называется *диагональю моста*.

Особенность мостовой схемы заключается в том, что если произведения сопротивлений ее противоположных плеч одинаковы, то сила тока в диагонали моста равна нулю.

В рассматриваемой задаче произведения сопротивлений противоположных плеч схемы одинаковы: $R_1 R_5 = 30 \cdot 10 = 300 \text{ Ом}^2$; $R_2 R_4 = 20 \cdot 15 = 300 \text{ Ом}^2$. Следовательно, сила тока I_4 в диагонали моста равна нулю.

Эта особенность мостовой схемы используется при измерении сопротивлений с помощью моста. В два противоположных плеча моста включают фиксированные сопротивления, а в одно из двух других плеч — измеряемое. Затем в оставшемся плече подбирают сопротивление до тех пор, пока в диагонали моста сила тока не станет равна нулю. Теперь для определения измеряемого сопротивления остается только разделить известное произведение со-

противлений противоположных плеч на значение подобранного сопротивления моста.

4.5. Задачи для самостоятельного решения

4.7. В цепи, показанной на рис. 4.9, ЭДС источника $E = 20$ В; $R_1 = R_2 = 100$ Ом; $R_3 = 250$ Ом. Определить токи и мощности для всех участков цепи. Составить баланс мощностей.

4.8. Сила тока в сопротивлении R_2 цепи, приведенной на рис. 4.10, составляет 1,2 А. Найти ЭДС источника энергии при следующих значениях сопротивлений цепи: $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 7$ Ом; $R_4 = 5$ Ом; $R_5 = 10$ Ом; $R_0 = 0,5$ Ом.

4.9. Определить, как изменится сила тока I в цепи, показанной на рис. 4.11, и яркость осветительных ламп $H1$ и $H2$ после включения лампы $H3$, если $R_{л}$ — сопротивление проводов линии.

4.10. Параметры элементов цепи, показанной на рис. 4.12, имеют следующие значения: $E = 120$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 40$ Ом;

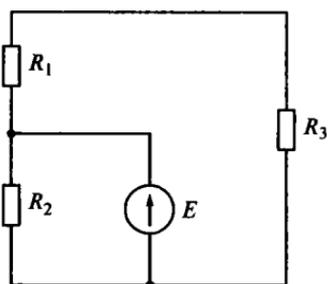


Рис. 4.9. Схема электрической цепи к задаче 4.7

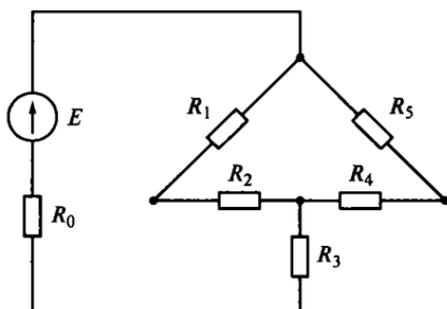


Рис. 4.10. Схема электрической цепи к задаче 4.8

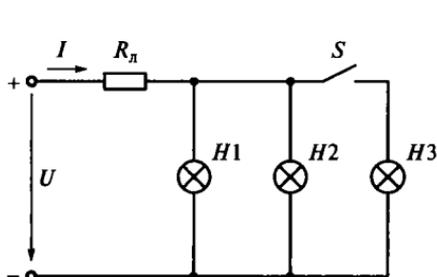


Рис. 4.11. Схема электрической цепи к задаче 4.9

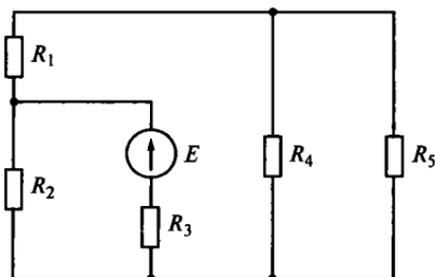


Рис. 4.12. Схема электрической цепи к задаче 4.10

$R_3 = 14 \text{ Ом}; R_4 = 80 \text{ Ом}; R_5 = 50 \text{ Ом}$.
 Определить токи во всех ветвях цепи.

4.11. Найти эквивалентное сопротивление цепи, показанной на рис. 4.13, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$.

4.12. Сопротивление между клеммами амперметра с пределом измерения 1 А равно $0,02 \text{ Ом}$. Определить предел измерения амперметра при наличии шунта с сопротивлением $0,005 \text{ Ом}$ и силу тока в цепи, если прибор показывает $0,75 \text{ А}$.

4.13. Вольтметр имеет четыре предела измерений: $75, 150, 300, 600 \text{ В}$ (рис. 4.14). Номинальный (наибольший допустимый) ток его измерительного механизма составляет 4 мА , а сопротивление равно 10 Ом . Определить добавочные сопротивления $R_1 \dots R_4$, позволяющие расширить пределы измерения напряжений до указанных значений.

4.14. Для регулировки напряжения в цепи питания электронного устройства (рис. 4.15, а) используется потенциометр, сопротивление которого R_n делится движком на две части: R'_n и R''_n . Электронное устройство (приемник энергии), имеющее входное сопротивление R , подсоединяется параллельно участку потенциометра с сопротивлением R''_n . Определить, как изменится показание вольтметра в цепи при увеличении сопротивления приемника энергии R .

4.15. При постоянном напряжении U в цепи, показанной на рис. 4.15, б, движок реостата переместили вправо. Определить, как при этом изменится показание амперметра.

4.16. Определить, как изменится показание амперметра в цепи на рис. 4.15, б, если произойдет короткое замыкание сопротивления R_1 , и что произойдет при коротком замыкании сопротивления R_2 . Сопротивлением амперметра пренебречь.

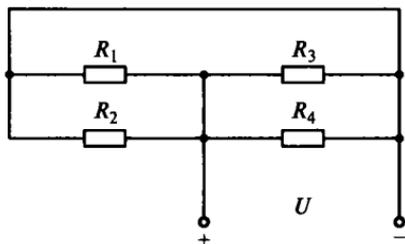


Рис. 4.13. Схема электрической цепи к задаче 4.11

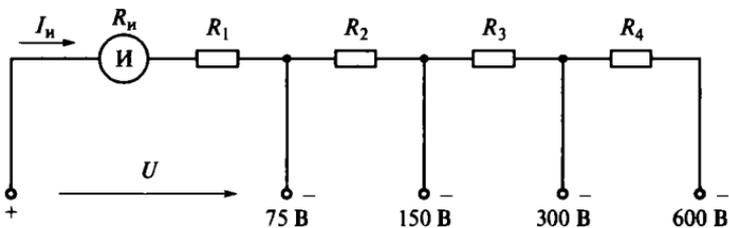


Рис. 4.14. Схема электрической цепи вольтметра к задаче 4.13

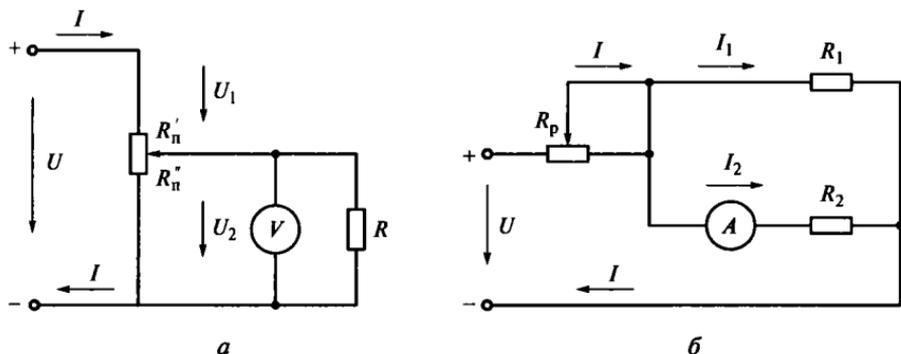


Рис. 4.15. Схемы включения переменного сопротивления:
а — потенциометрическая; *б* — реостатная

4.17. Определить, как изменится сила тока в сопротивлении R_5 цепи, показанной на рис. 4.12, если произойдет обрыв сопротивления R_2 .

4.18. Определить погрешности измерения сопротивления $R_x = 100 \text{ Ом}$ с помощью амперметра и вольтметра при использовании схем, показанных на рис. 4.5, если сопротивления приборов $R_A = 0,15 \text{ Ом}$ и $R_V = 1500 \text{ Ом}$. Оценить, какую из этих схем следует выбрать для измерения заданного сопротивления R_x .

4.19. Определить погрешности измерения сопротивления $R_x = 5 \text{ Ом}$ с помощью амперметра и вольтметра при использовании схем, показанных на рис. 4.5, если сопротивления приборов $R_A = 0,15 \text{ Ом}$ и $R_V = 1500 \text{ Ом}$. Оценить, какую из этих схем следует выбрать для измерения заданного сопротивления R_x .

4.20. Найти все токи в цепи делителя, показанного на рис. 4.6, *а*, и напряжения на потребителях U_1 , U_2 , U_3 , если $U = 50 \text{ В}$; $R_1 = 70 \text{ Ом}$; $R_2 = 90 \text{ Ом}$; $R_3 = 200 \text{ Ом}$; $R_4 = 1500 \text{ Ом}$; $R_5 = 1000 \text{ Ом}$; $R_6 = 1200 \text{ Ом}$.

4.21. Для расчета цепи, приведенной на рис. 4.7, преобразовать треугольник сопротивлений АБГ в эквивалентную звезду. Определить сопротивления звезды и все токи цепи при следующих значениях параметров ее элементов: $E = 110 \text{ В}$; $R_0 = 0,2 \text{ Ом}$; $R_1 = 50 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 15 \text{ Ом}$; $R_4 = 40 \text{ Ом}$; $R_5 = 30 \text{ Ом}$.

4.22. Определить измеряемое сопротивление R_1 , включенное между точками А и Г мостовой схемы, приведенной на рис. 4.7, если все остальные параметры этой цепи имеют значения, указанные в задаче 4.21, а сила тока в сопротивлении R_3 равна нулю.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.7. 0,257 А; 0,2 А; 0,057 А; 5,143 Вт; 0,327 Вт; 4 Вт; 0,816 Вт; 0,327 + 4 + 0,816 = 5,143 Вт.

- 4.8.** 63 В.
- 4.9.** Сила тока I увеличится; яркость свечения ламп $H1$ и $H2$ уменьшится.
- 4.10.** 3,51 А; 1,74 А; 1,77 А; 0,67 А; 1,07 А.
- 4.11.** 5 Ом.
- 4.12.** 5 А; 3,75 А.
- 4.13.** 18,74; 18,75; 37,5; 75 кОм.
- 4.14.** Напряжение U_2 увеличится.
- 4.15.** Показание амперметра уменьшится.
- 4.16.** При коротком замыкании R_1 показание амперметра (сила тока I_2) уменьшится до нуля. При замыкании R_2 показание амперметра (сила тока I_2) увеличится.
- 4.17.** Сила тока в сопротивлении R_5 уменьшится.
- 4.18.** 0,15 %; 6,25 %; следует выбрать схему, показанную на рис. 4.5, а.
- 4.19.** 3 %; 0,33 %; следует выбрать схему, показанную на рис. 4.5, б.
- 4.20.** 0,22 А; 0,178 А; 0,042 А; 0,141 А; 0,038 А; 0,124 А; 0,017 А; 24,8 В; 37,5 В; 50 В.
- 4.21.** 19,05 Ом; 5,71 Ом; 7,14 Ом; 3,17 А; 1,466 А; 1,707 А; 0,337 А; 1,803 А; 1,37 А.
- 4.22.** 26,67 Ом.

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ, ВКЛЮЧЕННЫМИ В РАЗНЫЕ ВЕТВИ

5.1. Метод узловых и контурных уравнений (метод уравнений Кирхгофа)

Задача 5.1. Определить токи в ветвях цепи, показанной на рис. 5.1, методом уравнений Кирхгофа, при следующих ее параметрах: $E_1 = 230$ В; $E_2 = 120$ В; $R_1 = 200$ Ом; $R_2 = 1$ кОм; $R_3 = 500$ Ом; $R_{01} = 20$ Ом; $R_{02} = 5$ Ом. Рассчитать баланс мощностей.

Решение. 1. Характеристика метода. Данный метод основан на применении первого и второго законов Кирхгофа. Преимущество этого метода перед другими методами расчета электрических цепей заключается в том, что он не требует никаких преобразований схемы и пригоден для расчета любой цепи с любым числом источников и ветвей.

2. Определение числа неизвестных токов и выбор их направлений. Электрическая цепь на рис. 5.1 имеет три ветви между двумя узлами Б и Д (БАЕД, БД, БВД). Число токов в электрической цепи равно числу ее ветвей. Следовательно, число токов в заданной цепи равно трем.

Заданная цепь относится к сложным, так как содержит несколько источников энергии в разных ветвях. В сложной цепи направления токов в ветвях до расчета токов указать нельзя, поэтому сначала направления токов выбираются произвольно. Выберем произвольно направления токов в ветвях заданной цепи, например, как показано на рис. 5.1 штриховыми стрелками.

Считая выбранные направления положительными, составим необходимые уравнения по первому и второму законам Кирхгофа.

Еще до расчета можно сказать, что не все направления токов выбраны нами правильно, т.е. совпадают с истинными направлениями, так как в узел Д втекают все токи, но из него ничего не вытекает, что противоречит закону непрерывности течения тока.

3. Определение необходимого числа уравнений. Число уравнений для определения токов в цепи должно быть

равно числу неизвестных токов. Следовательно, для цепи, показанной на рис. 5.1, необходимо составить три уравнения. Составим сначала уравнения по первому закону Кирхгофа, как более простому.

4. Составление уравнений по первому закону Кирхгофа. Для цепи, имеющей n узлов, число независимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, должно быть на одно меньше, чем число узлов, т.е. оно равно $n - 1$. Так как заданная цепь имеет два узла, для нее необходимо составить всего одно уравнение, например для узла Д:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (5.1)$$

5. Составление уравнений по второму закону Кирхгофа. Недостающие уравнения составляются по второму закону Кирхгофа для независимых контуров, т.е. для контуров, имеющих хотя бы одну ветвь, не входящую в контуры, выбранные ранее.

В заданной цепи всего три контура (АБДЕ, БВГД, АВГЕ), два из которых независимы — в трех различных сочетаниях: АБДЕ, БВГД; АБДЕ, АВГЕ; БВГД, АВГЕ.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа предварительно произвольно выбираются направления обхода (НО) каждого из контуров (причем направления обхода контуров могут не совпадать). Выберем независимые контуры (АБДЕ и БВГД) и направления их обхода (НО1 и НО2), как показано на рис. 5.1.

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа, соблюдая следующие известные правила:

- ЭДС записывается со знаком «+», если ее направление совпадает с направлением произвольно выбранного направления обхода контура. В противном случае ЭДС записывается со знаком «-»;

- падение напряжения на сопротивлении записывается со знаком «+», если направление тока в сопротивлении совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «-» — в противном случае.

Таким образом, для выбранных независимых контуров (АБДЕ и БВГД) и направлений их обхода уравнения имеют следующий вид:

$$E_1 = -I_1(R_1 + R_{01}) + I_2R_2; \quad (5.2)$$

$$-E_2 = -I_2R_2 + I_3(R_3 + R_{02}). \quad (5.3)$$

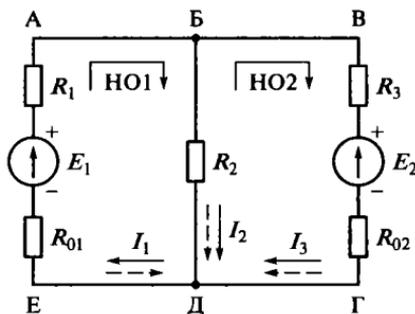


Рис. 5.1. Сложная электрическая цепь с тремя ветвями

6. Вычисление токов и определение их истинных направлений. Подставив заданные значения сопротивлений и ЭДС в уравнения (5.2) и (5.3) и поделив все члены этих уравнений на 10, получим:

$$23 = -22I_1 + 100I_2; \quad (5.4)$$

$$-12 = -100I_2 + 50,5I_3. \quad (5.5)$$

Вычисление токов сводится к решению системы трех уравнений (5.1), (5.4) и (5.5) с тремя неизвестными.

Для решения полученной системы уравнений используем метод последовательного исключения переменных. Для этого выразим ток I_1 из любого уравнения системы, например из уравнения (5.1), через другие неизвестные токи:

$$I_1 = -(I_2 + I_3). \quad (5.6)$$

Подставив уравнение (5.6) в выражение (5.4), получим:

$$23 = 22(I_2 + I_3) + 100I_2. \quad (5.7)$$

После приведения подобных членов уравнение (5.7) примет следующий вид:

$$23 = 122I_2 + 22I_3. \quad (5.8)$$

Таким образом, получены два уравнения (5.5) и (5.8) с двумя неизвестными I_2 и I_3 . Умножив уравнение (5.5) на число -22 , а уравнение (5.8) — на число $50,5$ и сложив их, получим следующее выражение:

$$1425,5 = 8361I_2,$$

откуда

$$I_2 = 0,17 \text{ А.}$$

Подставив значение I_2 в уравнение (5.8), найдем

$$I_3 = (23 - 122 \cdot 0,17)/22 = 0,1 \text{ А.}$$

Из уравнения (5.1) получим

$$I_1 = -I_2 - I_3 = -0,17 - 0,1 = -0,27 \text{ А.}$$

Отрицательное значение силы тока I_1 означает, что направление тока первоначально было выбрано неправильно, т.е. его истинное направление противоположно указанному пунктирной стрелкой (истинные направления токов показаны на рис. 5.1 сплошными стрелками). Однако при этом необходимо помнить, что при подстановке в уравнения используют значения токов с учетом знака, полученного в процессе расчета, так как эти урав-

нения справедливы для первоначально выбранных направлений токов.

7. Составление баланса мощностей для проверки правильности расчета. Сопоставив истинные направления токов с направлениями ЭДС источников, делаем вывод, что источники энергии в заданной цепи работают в разных режимах: E_1 — в режиме генератора, а E_2 — в режиме потребителя. Мощность, вырабатываемая генератором, должна равняться сумме мощностей всех потребителей. Проверим это равенство:

$$P_{\text{ген}} = E_1 I_1 = 230 \cdot 0,27 = 62,1 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{потр}} = I_1^2(R_1 + R_{01}) + I_2^2 R_2 + E_2 I_3 + I_3^2(R_3 + R_{02}) = \\ = 0,27^2 \cdot 220 + 0,17^2 \cdot 1000 + 120 \cdot 0,1 + 0,1^2 \cdot 505 = 62 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{ген}} = P_{\text{потр}} = 62 \text{ Вт}.$$

Равенство мощностей подтверждает правильность расчета.

5.2. Метод наложения токов

Задача 5.2. Рассчитать токи в цепи, показанной на рис. 5.2, а, методом наложения при следующих значениях ее параметров: $E_1 = 35 \text{ В}$; $E_2 = 63 \text{ В}$; $R_1 = 30 \text{ Ом}$; $R_2 = 15 \text{ Ом}$; $R_3 = 40 \text{ Ом}$; $R_4 = 25 \text{ Ом}$; $R_{01} = R_{02} = 2 \text{ Ом}$. Сделать проверку правильности расчета.

Решение. 1. Характеристика метода и обоснование целесообразности его применения. Метод наложения позволяет заменить расчет сложной цепи расчетом нескольких простых цепей с одной ЭДС в каждой из них. Сила тока в какой-либо ветви линейной цепи равна алгебраической сумме частичных токов, создаваемых в этой ветви всеми по отдельности действующими ЭДС источников энергии.

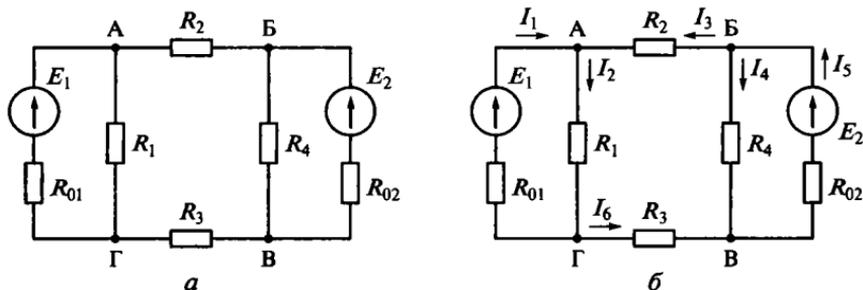


Рис. 5.2. Схема электрической цепи к задаче 5.2 (а) и токораспределение в этой цепи (б)

Заданная цепь содержит два источника энергии в разных ветвях и шесть ветвей, а следовательно, шесть неизвестных токов, для определения которых методом уравнений Кирхгофа пришлось бы решать систему из шести уравнений. Использование метода наложения позволяет свести решение к расчету двух простых цепей методом свертки, что гораздо проще.

2. Определение частичных токов $I'_1 \dots I'_6$, создаваемых в заданной цепи отдельно действующей ЭДС E_1 . В заданной на рис. 5.2, а цепи исключим все ЭДС источников энергии кроме E_1 . При этом необходимо помнить, что при расчете указанным методом исключению подлежат только ЭДС источников энергии, но не их внутренние сопротивления.

В результате получим простую разветвленную цепь с одним источником энергии E_1 (рис. 5.3, а), методика расчета которой (см. подразд. 4.1) заключается в следующем:

а) определим направления частичных токов $I'_1 \dots I'_6$, создаваемых в цепи источником E_1 . Токи в цепи с одним источником энергии направлены от клеммы «+» E_1 к клемме «-», как показано на рис. 5.3, а;

б) вычислим частичные токи $I'_1 \dots I'_6$ методом свертки, для чего:

- заменим группу сопротивлений R_2, R_3, R_4 и R_{02} эквивалентным сопротивлением

$$R_{31} = R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_{02}}{R_4 + R_{02}} = 15 + 40 + \frac{25 \cdot 2}{25 + 2} = 56,852 \text{ Ом};$$

- заменим параллельное соединение сопротивлений R_1 и R_{31} эквивалентным сопротивлением

$$R_{32} = \frac{R_1 R_{31}}{R_1 + R_{31}} = \frac{30 \cdot 56,852}{30 + 56,852} = 19,638 \text{ Ом}$$

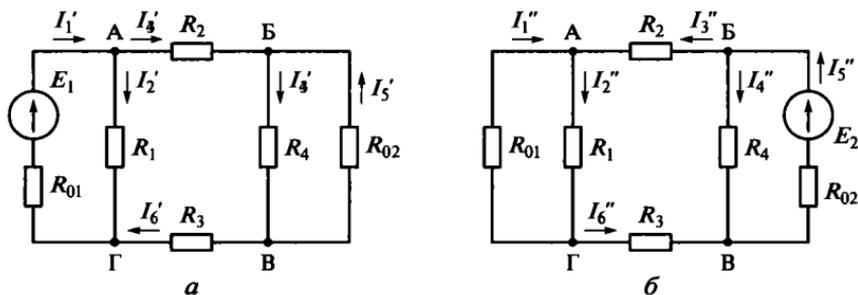


Рис. 5.3. Частичные токи в цепи, показанной на рис. 5.2, создаваемые источником E_1 (а) и источником E_2 (б)

и получим неразветвленную цепь, состоящую из последовательного соединения источника ЭДС E_1 с внутренним сопротивлением R_{01} и сопротивлением R_{32} , в которой протекает ток I'_1 ;

- определим силу тока I'_1 по закону Ома для полной цепи:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_{32} + R_{01}} = \frac{35}{19,638 + 2} = 1,618 \text{ А};$$

• развернем схему цепи, т. е. по общему току I'_1 определим силу тока в одной из двух параллельных ветвей с сопротивлениями R_1 и R_{31} . Например, сила тока в ветви с сопротивлением R_{31}

$$I'_3 = I'_1 \frac{R_1}{R_1 + R_{31}} = 1,618 \frac{30}{30 + 56,852} = 0,559 \text{ А};$$

• определим силу тока I'_2 во второй параллельной ветви с сопротивлением R_1 по первому закону Кирхгофа:

$$I'_2 = I'_1 - I'_3 = 1,618 - 0,559 = 1,059 \text{ А};$$

• по току I'_3 определим силы токов в параллельных ветвях с сопротивлениями R_4 и R_{02} :

$$I'_4 = I'_3 \frac{R_{02}}{R_4 + R_{02}} = 0,559 \frac{2}{25 + 2} = 0,041 \text{ А};$$

$$I'_5 = I'_3 - I'_4 = 0,559 - 0,041 = 0,518 \text{ А};$$

• определим силу тока в ветви с сопротивлением R_3 по первому закону Кирхгофа:

$$I'_6 = I'_3 = I'_4 + I'_5 = 0,559 \text{ А}.$$

3. Определение частичных токов $I''_1 \dots I''_6$, создаваемых в заданной цепи отдельно действующей ЭДС E_2 . Исключим все ЭДС источников в заданной цепи кроме E_2 . Получим простую разветвленную цепь с одной ЭДС, токи в которой направлены, как показано на рис. 5.3, б. Частичные токи от E_2 обозначим $I''_1 \dots I''_6$.

В целях исключения путаницы при расчете для обозначения токов в соответствующих ветвях целесообразно применять одинаковые индексы во всех вспомогательных схемах, представляемых по ходу решения.

Вычислим частичные токи $I''_1 \dots I''_6$ методом свертки, для чего:

• заменим последовательное соединение сопротивлений R_2 , R_3 и общего сопротивления параллельного соединения R_1 и R_{01} эквивалентным сопротивлением

$$R_{33} = R_2 + R_3 + \frac{R_1 R_{01}}{R_1 + R_{01}} = 15 + 40 + \frac{30 \cdot 2}{30 + 2} = 56,875 \text{ Ом};$$

• заменим параллельное соединение сопротивлений R_4 и R_{33} эквивалентным сопротивлением

$$R_{34} = \frac{R_4 R_{33}}{R_4 + R_{33}} = \frac{25 \cdot 56,875}{25 + 56,875} = 17,366 \text{ Ом};$$

получим неразветвленную цепь, состоящую из последовательного соединения источника энергии с ЭДС E_2 и внутренним сопротивлением R_{02} и сопротивления R_{34} , в которой протекает ток I_5'' ;

• определим силу тока I_5'' по закону Ома для полной цепи:

$$I_5'' = \frac{E_2}{R_{34} + R_{02}} = \frac{63}{17,366 + 2} = 3,253 \text{ А};$$

• развернем схему цепи, т. е. по общему току I_5'' определим силы токов в параллельных ветвях с сопротивлениями R_{33} и R_4 :

$$I_3'' = I_5'' \frac{R_4}{R_4 + R_{33}} = 3,253 \frac{25}{25 + 56,875} = 0,993 \text{ А};$$

$$I_4'' = I_5'' - I_3'' = 3,253 - 0,993 = 2,26 \text{ А};$$

• по общему току I_3'' определим силы токов в параллельных ветвях с сопротивлениями R_{01} и R_1 :

$$I_1'' = I_3'' \frac{R_1}{R_1 + R_{01}} = 0,993 \frac{30}{30 + 2} = 0,931 \text{ А};$$

$$I_2'' = I_3'' - I_1'' = 0,993 - 0,931 = 0,062 \text{ А};$$

• определим силу тока в ветви с сопротивлением R_3 :

$$I_6'' = I_3'' = I_1'' + I_2'' = 0,931 + 0,062 = 0,993 \text{ А}.$$

4. Определение токов в исходной цепи, показанной на рис. 5.2, а. Сила тока в каждой ветви исходной цепи равна алгебраической сумме частичных токов в ней.

Сила тока I_1 (в ветви с ЭДС E_1) равна разности частичных токов I_1' и I_1'' , так как они направлены встречно друг другу (см. рис. 5.3):

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 1,618 - 0,931 = 0,687 \text{ А},$$

а направление тока I_1 совпадает с направлением большего тока, т. е. с I_1' .

Сила тока I_2 (в ветви с сопротивлением R_1) равна сумме одинаково направленных частичных токов I_2' и I_2'' :

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 1,059 + 0,062 = 1,121 \text{ A,}$$

а направление тока I_2 совпадает с направлением токов I_2' и I_2'' .

Сила тока I_3 (в ветви с сопротивлением R_2) равна разности встречно направленных частичных токов I_3' и I_3'' :

$$I_3 = I_3'' - I_3' = 0,993 - 0,559 = 0,434 \text{ A,}$$

а направление тока I_3 совпадает с направлением большего частичного тока I_3'' .

Сила тока

$$I_4 = I_4' + I_4'' = 0,041 + 2,26 = 2,301 \text{ A,}$$

а направление тока I_4 совпадает с направлением токов I_4' и I_4'' .

Сила тока

$$I_5 = I_5'' - I_5' = 3,253 - 0,518 = 2,735 \text{ A,}$$

а направление тока I_5 совпадает с направлением тока I_5'' .

Сила тока

$$I_6 = I_6'' - I_6' = 0,993 - 0,559 = 0,434 \text{ A,}$$

а направление тока I_6 совпадает с направлением тока I_6'' .

Направления токов в ветвях исходной цепи — токораспределение показано на рис. 5.2, б. При этом направление тока в ветви совпадает либо с направлением большего частичного тока (если частичные токи в ветви направлены в разные стороны), либо — с направлением частичных токов ветви (если они направлены в одну сторону).

5. Проверка правильности расчета токов. По первому закону Кирхгофа составим уравнения для узлов цепи, показанной на рис. 5.2, б:

- для узла А

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0,687 - 1,121 + 0,434 = 0;$$

- для узла Б

$$-I_3 - I_4 + I_5 = -0,434 - 2,301 + 2,735 = 0;$$

- для узла В

$$I_4 - I_5 + I_6 = 2,301 - 2,735 + 0,434 = 0;$$

- для узла Г

$$-I_1 + I_2 - I_6 = -0,687 + 1,121 - 0,434 = 0.$$

Алгебраическая сумма токов в каждом узле цепи равна нулю, что подтверждает правильность расчета этих токов.

5.3. Метод контурных токов

Задача 5.3. Рассчитать токи в цепи, показанной на рис. 5.4, методом контурных токов при следующих значениях ее параметров: $E_1 = 35$ В; $E_2 = 63$ В; $R_1 = 30$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 25$ Ом; $R_{01} = R_{02} = 2$ Ом. Сделать проверку правильности расчета.

Решение. 1. Характеристика метода. Метод контурных токов для расчета сложных цепей так же, как метод узловых и контурных уравнений, основан на применении первого и второго законов Кирхгофа. Особенность этого метода заключается во введении вспомогательных контурных токов, т. е. токов, протекающих в замкнутых контурах электрической цепи, что позволяет сократить число уравнений, необходимых для расчета токов в цепи.

2. Выбор состава независимых контуров. Цепь, приведенная на рис. 5.4, содержит четыре сочетания по три независимых контура. Выберем одно из них: АБЖЗ; БВЕЖ; ВГДЕ.

3. Выбор направлений контурных токов. Для каждого выбранного независимого контура произвольно выберем направление контурного тока (например, как показано на рис. 5.4 штриховыми стрелками). Контурные токи принято нумеровать римскими цифрами: I_I, I_{II}, I_{III} .

4. Составление системы уравнений. По второму закону Кирхгофа для выбранных независимых контуров составим три уравнения, совмещая для удобства направление обхода контура с направлением его контурного тока. При записи в уравнениях падений напряжений учтем, что в смежных ветвях контуров протекает не менее двух контурных токов, т. е. свой ток и ток (или токи) смежных контуров:

$$-E_1 = I_I(R_1 + R_{01}) + I_{II}R_{01};$$

$$-E_1 = I_I R_{01} + I_{II}(R_{01} + R_2 + R_3) + I_{III}R_3;$$

$$-E_2 = I_{II}R_3 + I_{III}(R_3 + R_{02}).$$

5. Определение контурных токов. Подставим в уравнения полученной системы значения параметров цепи:

$$-35 = 32I_I + 2I_{II}; \quad (5.9)$$

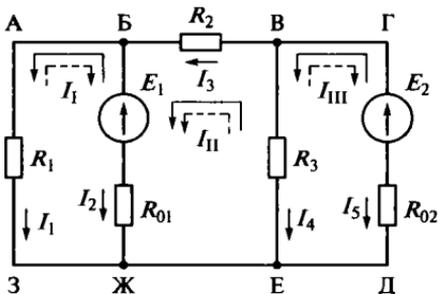
$$-35 = 2I_I + 42I_{II} + 25I_{III}; \quad (5.10)$$

$$-63 = 25I_{II} + 27I_{III}. \quad (5.11)$$

Решим полученную систему уравнений одним из известных методов, например методом подстановки. Для этого используем уравнение (5.9) системы и выразим силу тока I_I через ток I_{II} :

$$I_I = -35/32 - 2/32I_{II}. \quad (5.12)$$

Рис. 5.4. Схема электрической цепи с контурными токами к задаче 5.3



Подставим выражение (5.12) в уравнение (5.10) системы. Уравнения (5.10) после подстановки и приведения подобных членов и (5.11) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$-525 = 670I_{II} + 400I_{III}; \quad (5.13)$$

$$-63 = 25I_{II} + 27I_{III}. \quad (5.14)$$

Определим силу тока I_{II} , для чего умножим уравнение (5.13) на число -27 , а уравнение (5.14) — на число 400 и сложим полученные уравнения:

$$-11025 = -8090I_{II},$$

откуда

$$I_{II} = 1,363 \text{ А.}$$

Определим силу тока I_1 из выражения (5.12):

$$I_1 = -35/32 - 2/32 I_{II} = -35/32 - 2/32 \cdot 1,363 = -1,179 \text{ А.}$$

Определим силу тока I_{III} , подставив значение I_{II} в уравнение (5.14):

$$I_{III} = (-63 - 25 I_{II})/27 = (-63 - 25 \cdot 1,363)/27 = -3,595 \text{ А.}$$

Так как расчетные значения контурных токов I_1 и I_{III} получились со знаком «-», необходимо изменить выбранные направления этих токов на противоположные. Истинные направления контурных токов показаны на рис. 5.4 сплошными стрелками.

6. Определение значений и направлений токов в ветвях цепи. Определим токи в ветвях цепи как алгебраические суммы протекающих в них контурных токов с учетом их истинных направлений.

В ветви БАЗЖ протекает только один контурный ток I_1 , поэтому сила тока I_1 равна контурному току I_1 :

$$I_1 = I_1 = 1,179 \text{ А,}$$

а направление тока I_1 совпадает с истинным направлением тока I_1 .

В ветви БЖ протекают контурные токи I_1 и I_{II} , направленные в разные стороны, поэтому сила тока

$$I_2 = I_{II} - I_1 = 1,363 - 1,179 = 0,184 \text{ А},$$

а направление тока I_2 совпадает с истинным направлением тока I_{II} , поскольку сила тока I_{II} больше силы тока I_1 .

В ветви БВ протекает только один контурный ток I_{II} , поэтому сила тока

$$I_3 = I_{II} = 1,363 \text{ А},$$

а направление тока I_3 совпадает с истинным направлением тока I_{II} .

В ветви ВЕ протекают контурные токи I_{II} и I_{III} , направленные в разные стороны, поэтому сила тока

$$I_4 = I_{III} - I_{II} = 3,595 - 1,363 = 2,232 \text{ А},$$

а направление тока I_4 совпадает с истинным направлением тока I_{III} , поскольку сила тока I_{III} больше силы тока I_{II} .

В ветви ВГДЕ протекает только один контурный ток I_{III} , поэтому сила тока

$$I_5 = I_{III} = 3,595 \text{ А},$$

а направление тока I_5 совпадает с истинным направлением тока I_{III} .

7. Проверка правильности расчета токов. По первому закону Кирхгофа составим уравнения для всех узлов цепи, показанной на рис. 5.4, и рассчитаем левые части этих уравнений:

- для узла Б

$$-I_1 - I_2 + I_3 = -1,179 - 0,184 + 1,363 = 0;$$

- для узла В

$$-I_3 - I_4 + I_5 = -1,363 - 2,232 + 3,595 = 0;$$

- для узла Е (Ж)

$$I_1 + I_2 + I_4 - I_5 = 1,179 + 0,184 + 2,232 - 3,595 = 0.$$

Алгебраическая сумма токов в каждом узле цепи равна нулю, что подтверждает правильность расчета этих токов.

5.4. Метод двух узлов

Задача 5.4. Методом двух узлов рассчитать силу тока в буферной аккумуляторной батарее E_2 в цепи, показанной на рис. 5.5,

если генератор (с ЭДС $E_1 = 245$ В и внутренним сопротивлением $R_{01} = 0,5$ Ом) и аккумуляторная батарея (с $E_2 = 230$ В и $R_{02} = 0,4$ Ом) соединены параллельно и питают потребитель, сопротивление которого $R = 10$ Ом.

Решение. 1. Характеристика метода. Метод двух узлов пригоден для расчета сложных цепей в том случае, если в этой цепи или имеется только два узла при любом количестве ветвей, или она может быть преобразована к такой цепи. Цепи с двумя узлами часто встречаются на практике, и метод двух узлов значительно упрощает их расчет. При этом токи в ветвях легко вычисляются через напряжение между узлами по достаточно простым формулам.

2. Особенности рассматриваемой цепи. Так называемое буферное включение аккумулятора применяется для питания потребителей, по условиям эксплуатации не допускающим даже кратковременного отключения источника энергии. В этом случае аккумуляторная батарея присоединяется параллельно к основному источнику питания в качестве запасного источника энергии на случай выхода первого из строя. Такое включение используется, например, в электрических цепях автомобилей, современных персональных компьютеров, аварийного электрического освещения и т. д. Очевидно, что в нормальных условиях потребитель должен питаться только от основного источника энергии, а аккумулятор должен работать в режиме зарядки, что обеспечивается определенным превышением ЭДС основного источника над ЭДС аккумулятора. При этом ток в аккумуляторе направлен встречно его ЭДС и аккумулятор работает в режиме потребления энергии — зарядки. При отключении основного источника энергии аккумулятор как единственный в цепи источник питания переходит в генераторный режим работы и питает потребитель.

3. Выбор направлений токов в ветвях цепи. Направим все токи в цепи к одному узлу, например к узлу А, как показано на рис. 5.5 штриховыми стрелками.

4. Определение проводимостей ветвей:

$$G_1 = \frac{1}{R_{01}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ См}; \quad G_2 = \frac{1}{R_{02}} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ См};$$

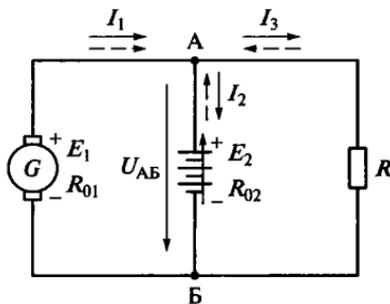


Рис. 5.5. Схема электрической цепи к задаче 5.4

$$G_3 = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См.}$$

5. Определение узлового напряжения U_{AB} . Из теории известно, что напряжение между узлами равно алгебраической сумме произведений ЭДС ветвей, взятых с соответствующим знаком, и проводимостей, деленной на сумму проводимостей всех ветвей:

$$U = \frac{\sum^{\text{алг}}(EG)}{\sum G},$$

причем со знаком «+» записывается ЭДС, совпадающая с направлением тока, а со знаком «-» — ЭДС, направленная встречно выбранному направлению тока. С учетом числовых данных задачи получим

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{245 \cdot 2,0 + 230 \cdot 2,5}{2,0 + 2,5 + 0,1} = 231,522 \text{ В.}$$

6. Определение токов в цепи. Согласно теории ток в ветви сложной цепи с двумя узлами равен разности ЭДС, взятой с соответствующим знаком, и узлового напряжения, умноженной на проводимость соответствующей ветви. Причем ЭДС записывается со знаком «-», когда она направлена встречно выбранному направлению тока в ветви, и со знаком «+», когда направления ЭДС и тока в ветви совпадают.

Определим токи в ветвях заданной цепи:

- сила тока в ветви с генератором

$$I_1 = (E_1 - U_{AB})G_1 = (245 - 231,522)2,0 = 27 \text{ А;}$$

- сила тока в ветви с аккумулятором

$$I_2 = (E_2 - U_{AB})G_2 = (230 - 231,522)2,5 = -3,8 \text{ А;}$$

- сила тока в нагрузке

$$I_3 = -U_{AB}G_3 = -231,522 \cdot 0,1 = -23,2 \text{ А.}$$

Токи в аккумуляторе и нагрузке имеют отрицательные значения, следовательно, направления этих токов выбраны неправильно, и их необходимо изменить. Истинные направления токов показаны на рис. 5.5 сплошными стрелками.

Аккумулятор в данном случае работает в режиме зарядки.

7. Проверка правильности расчета. По первому закону Кирхгофа для любого из узлов рассматриваемой цепи

$$I_1 - I_2 - I_3 = 27 - 3,8 - 23,2 = 0.$$

Алгебраическая сумма токов в узле А (или Б) цепи равна нулю, что подтверждает правильность расчета.

Задача 5.5. Рассчитать токи в цепи, показанной на рис. 5.4, методом двух узлов, используя данные, указанные в задаче 5.3.

Решение. 1. Преобразование заданной цепи. Заданная цепь (см. рис. 5.4) имеет три узла точки Б, В и Ж, но ее можно преобразовать в цепь с двумя узлами, заменив треугольник сопротивлений R_1, R_2, R_3 эквивалентной звездой сопротивлений $R_B, R_B, R_Ж$ (рис. 5.6, а, штриховые линии).

Значения сопротивлений звезды вычисляются через сопротивления эквивалентного треугольника по известным из теории формулам:

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 15}{30 + 15 + 25} = 6,429 \text{ Ом};$$

$$R_B = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{15 \cdot 25}{30 + 15 + 25} = 5,357 \text{ Ом};$$

$$R_Ж = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 25}{30 + 15 + 25} = 10,714 \text{ Ом}.$$

Преобразованная цепь представлена на рис. 5.6, б.

2. Выбор направлений токов в ветвях преобразованной цепи и их обозначение. Направим все токи цепи к одному узлу, например к узлу О, как показано на рис. 5.6, б штриховыми стрелками. При этом сохраним обозначения токов в неизмененных участках цепи, т.е. в ветвях с E_1 и E_2 , принятые в исходной цепи (см. рис. 5.4): I_2 и I_5 . Ток в сопротивлении $R_Ж$ цепи обозначим $I_Ж$.

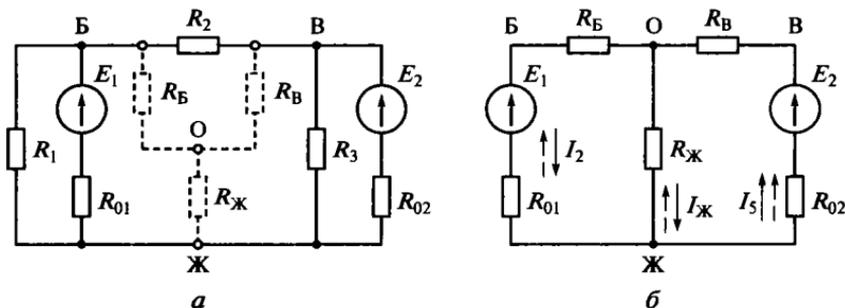


Рис. 5.6. Электрическая цепь до преобразования с треугольником сопротивлений R_1, R_2, R_3 (а) и после преобразования с эквивалентной звездой сопротивлений $R_B, R_B, R_Ж$ (б)

3. Определение проводимостей ветвей. В цепи на рис. 5.6, б

$$G_1 = \frac{1}{R_B + R_{01}} = \frac{1}{6,429 + 2} = 0,119 \text{ См};$$

$$G_2 = \frac{1}{R_{\text{Ж}}} = \frac{1}{10,714} = 0,093 \text{ См};$$

$$G_3 = \frac{1}{R_B + R_{02}} = \frac{1}{5,357 + 2} = 0,136 \text{ См}.$$

4. Определение узлового напряжения $U_{\text{ОЖ}}$:

$$U_{\text{ОЖ}} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{35 \cdot 0,119 + 63 \cdot 0,136}{0,119 + 0,093 + 0,136} = 36,55 \text{ В}.$$

5. Определение токов в цепи, показанной на рис. 5.6, б:

$$I_2 = (E_1 - U_{\text{ОЖ}})G_1 = (35 - 36,55)0,119 = -0,184 \text{ А}.$$

$$I_{\text{Ж}} = -U_{\text{ОЖ}}G_2 = -36,55 \cdot 0,093 = -3,411 \text{ А}.$$

$$I_5 = (E_2 - U_{\text{ОЖ}})G_3 = (63 - 36,55)0,136 = 3,595 \text{ А}.$$

Токи I_2 и $I_{\text{Ж}}$ имеют отрицательные значения, поэтому следует изменить их направления на противоположные (показаны сплошными стрелками), а значения — на положительные.

6. Определение токов в исходной цепи. Токи I_2 и I_5 в исходной цепи, показанной на рис. 5.4, имеют те же направления и значения, что и в преобразованной цепи (см. рис. 5.6, б):

$$I_2 = 0,184 \text{ А}; \quad I_5 = 3,595 \text{ А}.$$

Так как ток I_2 направлен встречно направлению ЭДС источника E_1 , он работает в режиме потребителя, и сила тока в сопротивлении R_1

$$I_1 = \frac{U_{\text{БЖ}}}{R_1} = \frac{E_1 + I_2 R_{01}}{R_1} = \frac{35 + 0,184 \cdot 2}{30} = 1,179 \text{ А}.$$

Сопротивление R_1 включено параллельно источнику E_1 . Так как точка Б — положительный зажим источника энергии E_1 , а точка Ж — отрицательный, то потенциал φ_B больше потенциала $\varphi_{\text{Ж}}$. Следовательно, ток I_1 в сопротивлении R_1 направлен от точ-

ки Б к точке Ж, т. е. от большего потенциала φ_B к меньшему потенциалу φ_J , что соответствует его направлению в исходной цепи.

Сила тока в сопротивлении R_3

$$I_4 = \frac{U_{ВЖ}}{R_3} = \frac{E_2 - I_5 R_{02}}{R_3} = \frac{63 - 3,595 \cdot 2}{25} = 2,232 \text{ А.}$$

Ток I_4 направлен от точки В к точке Ж(Е), так как точка В — положительный зажим источника энергии E_2 , а значит, $\varphi_B > \varphi_J$.

Найдем разности потенциалов на сопротивлениях R_B и $R_В$ цепи, показанной на рис. 5.6, б:

$$\varphi_O - \varphi_B = I_2 R_B = 0,184 \cdot 6,429 = 1,183 \text{ В;}$$

$$\varphi_B - \varphi_O = I_5 R_В = 3,595 \cdot 5,357 = 19,258 \text{ В.}$$

Сложив полученные уравнения, найдем напряжение между точками В и Б в цепи на рис. 5.4:

$$U_{ВБ} = \varphi_B - \varphi_B = 19,258 + 1,183 = 20,441 \text{ В.}$$

Сила тока в сопротивлении R_2

$$I_3 = \frac{U_{ВБ}}{R_2} = \frac{20,441}{15} = 1,363 \text{ А.}$$

Так как разность потенциалов $U_{ВБ} = \varphi_B - \varphi_B$ имеет положительное значение, то $\varphi_B > \varphi_B$ и ток I_3 направлен от точки В к точке Б.

Значение токов и их направления в заданной цепи (см. рис. 5.4), полученные при расчете, совпадают с результатами расчета методом контурных токов в задаче 5.3, что подтверждает правомерность обоих методов расчета.

5.5. Задачи для самостоятельного решения

5.6. Определить, сколько ветвей, узлов, контуров и независимых контуров содержится в цепи, показанной на рис. 5.7. Указать, сколько разных токов протекает в цепи, сколько уравнений необходимо составить для расчета всех токов цепи, сколько независимых уравнений можно составить по первому закону Кирхгофа и сколько по второму.

5.7. Составить уравнения по второму закону Кирхгофа для всех возможных контуров цепи, показанной на рис. 5.8, считая положительным направлением обхода — по часовой стрелке.

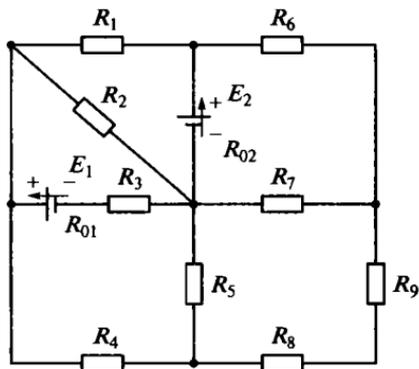


Рис. 5.7. Схема электрической цепи к задаче 5.6

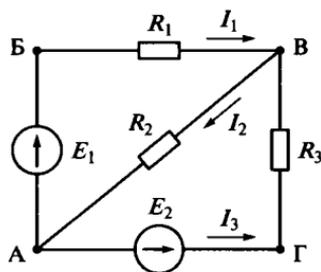


Рис. 5.8. Схема электрической цепи к задаче 5.7

5.8. Определить, сколько ветвей, узлов, контуров и независимых контуров содержится в цепи, представленной на рис. 5.9. Составить уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1 ... 3 и по второму закону Кирхгофа — для трех независимых контуров, направления обхода которых (НО1 ... НО3) указаны на схеме цепи.

5.9. Рассчитать токи в ветвях цепи, приведенной на рис. 5.10, методом уравнений Кирхгофа при следующих значениях параметров ее элементов: $E_1 = 260$ В; $E_2 = 80$ В; $R_1 = 220$ Ом; $R_2 = 40$ Ом; $R_3 = 780$ Ом; $R_4 = 1,2$ кОм; $R_5 = 0,8$ кОм; $R_{01} = 0$; $R_{02} = 20$ Ом. Рассчитать баланс мощностей.

5.10. Определить токи в ветвях цепи, представленной на рис. 5.11, методом уравнений Кирхгофа при следующих значени-

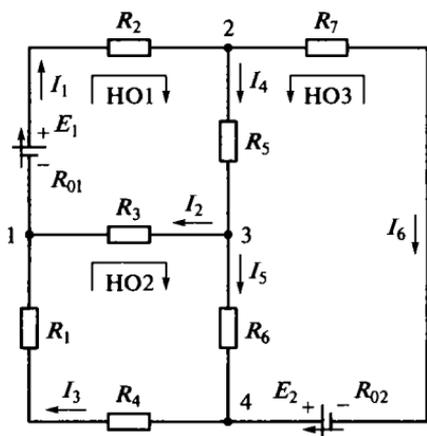


Рис. 5.9. Схема электрической цепи к задаче 5.8

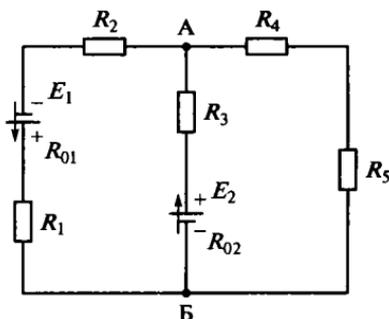


Рис. 5.10. Схема электрической цепи к задаче 5.9

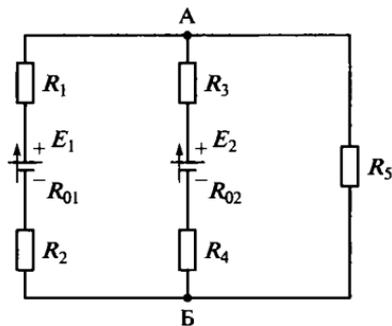


Рис. 5.11. Схема электрической цепи к задаче 5.10

ях параметров ее элементов: $E_1 = 110$ В; $E_2 = 50$ В; $R_1 = R_4 = 100$ Ом; $R_2 = 50$ Ом; $R_3 = 150$ Ом; $R_5 = 600$ Ом; $R_{01} = 10$ Ом; $R_{02} = 0$. Рассчитать баланс мощностей.

5.11. Определить токи в ветвях цепи, показанной на рис. 5.10, методами наложения и двух узлов при следующих значениях параметров ее элементов: $E_1 = 60$ В; $E_2 = 80$ В; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 40$ Ом; $R_3 = 150$ Ом; $R_4 = 20$ Ом; $R_5 = 250$ Ом; $R_{01} = 10$ Ом; $R_{02} = 20$ Ом. Указать, в каких режимах работают источники цепи и каково направление тока в сопротивлении R_5 .

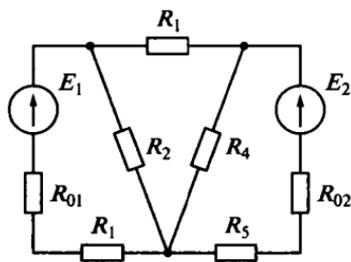
5.12. Определить токи в ветвях цепи, представленной на рис. 5.11, методами контурных токов и двух узлов при следующих значениях параметров ее элементов: $E_1 = 50$ В; $E_2 = 25$ В; $R_1 = 75$ Ом; $R_2 = 40$ Ом; $R_3 = 150$ Ом; $R_4 = 50$ Ом; $R_5 = 100$ Ом; $R_{01} = R_{02} = 0$. Найти узловое напряжение U_{AB} , указать, в каких режимах работают источники энергии цепи и каково направление тока в сопротивлении R_5 .

5.13. Определить токи в буферной аккумуляторной батарее, генераторе и потребителе цепи на рис. 5.5, если генератор с ЭДС $E_1 = 122$ В и внутренним сопротивлением $R_{01} = 0,25$ Ом и аккумуляторная батарея с $E_2 = 120$ В и $R_{02} = 0,4$ Ом соединены параллельно и питают потребитель, эквивалентное сопротивление которого $R = 15$ Ом.

5.14. Аккумуляторная батарея при автономной работе разрядилась до 115 В. Определить токи в цепи при подключении ее к генератору по схеме, представленной на рис. 5.5, используя данные, указанные в задаче 5.13.

5.15. Схема буферного питания автомобиля представлена на рис. 5.5. Определить силу тока зарядки аккумулятора автомобиля и соответствующие токи в генераторе и нагрузке, если ЭДС генератора $E_1 = 14$ В, его внутреннее сопротивление $R_{01} = 0,1$ Ом, ЭДС аккумуляторной батареи $E_2 = 12$ В, ее внутреннее сопротивление

Рис. 5.12. Схема электрической цепи к задачам 5.16, 5.17



$R_{02} = 0,125$ Ом, а сопротивление нагрузки $R = 1,25$ Ом.

5.16. Определить токи во всех участках цепи, представленной на рис. 5.12, методом контурных токов при следующих значениях параметров ее элементов: $E_1 = 45$ В; $E_2 = 75$ В; $R_1 = 40$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 30$ Ом; $R_4 = 50$ Ом; $R_5 = 100$ Ом; $R_{01} = R_{02} = 2$ Ом.

5.17. Определить методом двух узлов токи во всех участках цепи, показанной на рис. 5.12, используя данные задачи 5.16.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.6. 9; 5; 20; 5; 9; 9; 4; 5.

5.7. $E_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2$ (контур АБВА); $-E_2 = -I_2 R_2 - I_3 R_3$ (контур АВГА); $E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_3 R_3$ (контур АБВГА).

5.8. 6; 4; 7; 3; $I_1 - I_2 - I_3 = 0$; $I_1 - I_4 - I_6 = 0$; $I_2 - I_4 + I_5 = 0$; $E_1 = I_1(R_2 + R_{01}) + I_2 R_3 + I_4 R_5$; $0 = -I_2 R_3 + I_3(R_1 + R_4) + I_5 R_6$; $-E_2 = I_4 R_5 + I_5 R_6 - I_6(R_7 + R_{02})$.

5.9. 0,381 А; 0,301 А; 0,08 А. $P_{\text{ген}} = P_{\text{потр}} = 123,26$ Вт.

5.10. 0,222 А; 0,098 А; 0,124 А; $P_{\text{ген}} = P_{\text{потр}} = 24,4$ Вт.

5.11. 0,429 А; 0,445 А; 0,016 А; оба источника работают в режиме генератора; ток в R_5 направлен к узлу Б.

5.12. 0,321 А; 0,19 А; 0,131 А; 13,073 В; оба источника работают в режиме генератора; ток в R_5 направлен к узлу А.

5.13. 0; 8 А; 8 А.

5.14. 7,741 А; 15,614 А; 7,873 А.

5.15. 4,426 А; 14,468 А; 10,043 А.

5.16. 0,744 А; 0,916 А; 0,172 А; 0,378 А; 0,55 А.

5.17. 0,744 А; 0,916 А; 0,172 А; 0,378 А; 0,55 А.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

6.1. Расчет общей емкости соединения конденсаторов

Задача 6.1. В радиотехнической, электроизмерительной и другой аппаратуре, где часто требуется регулировать емкость в заданных пределах, которым не удовлетворяют готовые конденсаторы переменной емкости, применяется соединение конденсаторов по схеме, представленной на рис. 6.1. Вычислить пределы изменения общей емкости соединения, если емкость конденсатора переменной емкости $C_{\text{п}} = 10 \dots 200$ пФ, $C_1 = 300$ пФ и $C_2 = 50$ пФ.

Решение. Определим пределы изменения общей емкости C' параллельного соединения конденсаторов C_2 и $C_{\text{п}}$:

$$C'_{\text{min}} = C_2 + C_{\text{п min}} = 50 + 10 = 60 \text{ пФ};$$

$$C'_{\text{max}} = C_2 + C_{\text{п max}} = 50 + 200 = 250 \text{ пФ}.$$

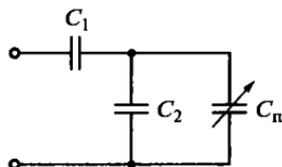
Определим пределы изменения общей емкости C цепи, приведенной на рис. 6.1:

$$C_{\text{min}} = \frac{C_1 C'_{\text{min}}}{C_1 + C'_{\text{min}}} = \frac{300 \cdot 60}{360} = 50 \text{ пФ};$$

$$C_{\text{max}} = \frac{C_1 C'_{\text{max}}}{C_1 + C'_{\text{max}}} = \frac{300 \cdot 250}{550} = 136,36 \text{ пФ}.$$

Таким образом, общая емкость цепи $C = 50 \dots 136,36$ пФ.

Рис. 6.1. Смешанное соединение конденсаторов



6.2. Распределение напряжений и зарядов в цепи конденсаторов

Задача 6.2. Диэлектрик плоского двухслойного конденсатора состоит из слюды (мусковита) и воздуха (рис. 6.2, а). Площадь каждой пластины конденсатора $S = 33 \text{ см}^2$. Толщина слюды $d_1 = 2,5 \text{ мм}$, толщина воздушной прослойки $d_2 = 3 \text{ мм}$. Найти емкость конденсатора и предельное напряжение, на которое можно включить конденсатор, соблюдая для более «слабого» слоя двойной запас прочности, если диэлектрическая проницаемость слюды $\epsilon_1 = 7,5$, а напряженность пробоя слюды $\xi_{\text{пр}1} = 200 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ (приложение 2). Диэлектрическая проницаемость воздушной прослойки $\epsilon_2 = 1$, а напряженность пробоя $\xi_{\text{пр}2} = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$. Определить, как распределится напряжение между диэлектриками после включения конденсатора на предельно допустимое напряжение, с каким запасом прочности будет работать слюдяной слой и какая энергия будет запасена при этом данным конденсатором.

Решение. 1. Определение емкости двухслойного конденсатора. Согласно теории плоский двухслойный конденсатор можно рассматривать как два последовательно соединенных плоских конденсатора (рис. 6.2, б) со следующими емкостями:

$$C_1 = \frac{S\epsilon_1\epsilon_0}{d_1}; \quad C_2 = \frac{S\epsilon_2\epsilon_0}{d_2}, \quad (6.1)$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

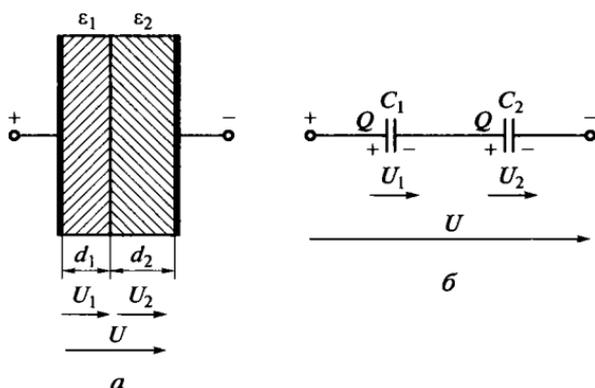


Рис. 6.2. Конструкция (а) и схема замещения (б) плоского двухслойного конденсатора

Тогда емкость двухслойного конденсатора

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}, \quad (6.2)$$

а с учетом данных задачи

$$C = \frac{S \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = \frac{33 \cdot 7,5 \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{(7,5 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,25) 100} = 8,77 \text{ пФ.}$$

2. Определение напряженности электростатического поля в воздушном слое. Сначала докажем, что «слабым» слоем, определяющим предельное напряжение, на которое можно включать двухслойный конденсатор, является воздушная прослойка.

При последовательном соединении конденсаторов их заряды одинаковы и равны заряду всей системы, поэтому для системы из конденсаторов C_1 и C_2 (см. рис. 6.2, б) справедливо равенство

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (6.3)$$

Так как $Q_1 = C_1 U_1$, $Q_2 = C_2 U_2$, $Q = CU$, то с учетом равенства (6.3) напряжения на слоях двухслойного конденсатора можно записать в виде

$$U_1 = \frac{CU}{C_1}; \quad U_2 = \frac{CU}{C_2}. \quad (6.4)$$

Подставив в равенство (6.4) выражения (6.1) и (6.2), получим:

$$U_1 = U \frac{\epsilon_2 d_1}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}; \quad U_2 = U \frac{\epsilon_1 d_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}. \quad (6.5)$$

Найдем напряженности поля в первом и втором диэлектрике с учетом выражения (6.5):

$$\xi_1 = \frac{U_1}{d_1} = U \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}; \quad \xi_2 = \frac{U_2}{d_2} = U \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}. \quad (6.6)$$

Из выражения (6.6) следует, что напряженности полей в диэлектриках обратно пропорциональны диэлектрическим проницаемостям:

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad (6.7)$$

следовательно, чем меньше диэлектрическая проницаемость диэлектрика, тем больше напряженность поля в нем. Это очень

важно учитывать при изготовлении конденсаторов, поскольку достаточно в диэлектрике конденсатора оказаться слою или пузырькам воздуха, как возникает опасность пробоя диэлектрика. Например, при изготовлении бумажных конденсаторов применяют пропитку парафином, что позволяет вытеснить все воздушные пузырьки, имеющие самую маленькую диэлектрическую проницаемость.

Приведенные рассуждения дают основание считать, что «слабым» звеном в рассматриваемой задаче является воздушная прослойка. В соответствии с требованием двойного запаса прочности для «слабого» слоя считаем, что запас прочности воздушной прослойки $k_{пр2} = 2$. Из соотношения $k_{пр2} = \xi_{пр2}/\xi_2$ определим допустимую напряженность ξ_2 электрического поля в воздушном слое:

$$\xi_2 = \frac{\xi_{пр2}}{k_{пр2}} = \frac{3 \cdot 10^6}{2} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

3. Определение предельно допустимых напряжений. Из выражения (6.6) найдем напряжение на обкладках двухслойного конденсатора:

$$U = \xi_2 \frac{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}{\epsilon_1} = 1,5 \cdot 10^6 \frac{7,5 \cdot 3 + 1 \cdot 2,5}{7,5 \cdot 10^3} = 5 \text{ кВ,}$$

а также напряжение между поверхностями воздушной прослойки:

$$U_2 = \xi_2 d_2 = 1,5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ В} = 4,5 \text{ кВ.}$$

Исходя из особенностей последовательного соединения, напряжение между границами слюдяного слоя запишем в виде

$$U_1 = U - U_2 = 5 - 4,5 = 0,5 \text{ кВ.}$$

4. Определение напряженности электрического поля в слюде и запаса ее прочности. В соответствии с выражением (6.6) напряженность электрического поля в слюде

$$\xi_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{500}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 200\,000 \text{ В/м.}$$

Запас прочности слюды

$$k_{пр1} = \frac{\xi_{пр1}}{\xi_1} = \frac{200 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5} = 1\,000.$$

5. Определение запаса энергии в конденсаторе. Запас энергии в конденсаторе

$$W_3 = \frac{CU^2}{2} = \frac{8,77 \cdot 10^{-12} \cdot 5^2 \cdot 10^6}{2} = 110 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.3. К конденсатору емкостью 2 мкФ последовательно подсоединен другой конденсатор. Общая емкость соединения составляет 1,2 мкФ. Определить емкость второго конденсатора.

6.4. Определить пределы изменения общей емкости соединения, представленного на рис. 6.3, если $C_1 = 450$ пФ, $C_2 = 50$ пФ, а переменная емкость C_3 регулируется в пределах 50...450 пФ.

6.5. Определить общую емкость соединения конденсаторов на рис. 6.4, если $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 9$ мкФ.

6.6. Конденсаторы с емкостями $C_1 = 450$ мкФ $\pm 10\%$ и $C_2 = 200$ мкФ $\pm 5\%$ соединены параллельно. Определить максимальное и минимальное значения общей емкости соединения, учитывая заданные допуски значений входящих в него емкостей.

6.7. К сети с напряжением 120 В присоединены последовательно два конденсатора с емкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ. Определить падения напряжений на каждом конденсаторе.

6.8. Определить полную емкость и напряжения на конденсаторах в соединении, представленном на рис. 6.4, если $C_1 = C_6 = 40$ мкФ, $C_2 = C_4 = 30$ мкФ, $C_3 = C_5 = 50$ мкФ, а $U = 300$ В.

6.9. При изготовлении плоского бумажного конденсатора создалась воздушная прослойка. Определить напряженность электрического поля на границе этой прослойки и запас ее прочности, если напряженность поля в среде парафинированной бумаги составляет $1,5 \cdot 10^5$ В/м.

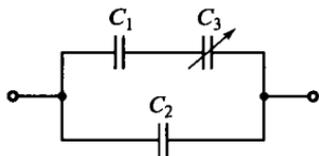


Рис. 6.3. Схема соединения конденсаторов к задаче 6.4

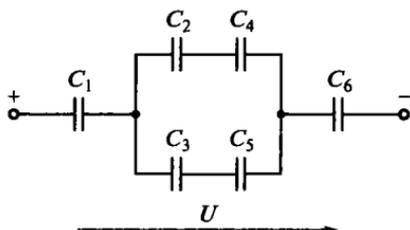


Рис. 6.4. Схема соединения конденсаторов к задаче 6.5

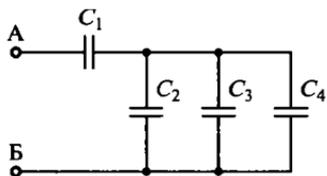


Рис. 6.5. Схема соединения конденсаторов к задаче 6.11

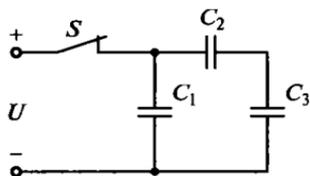


Рис. 6.6. Схема соединения конденсаторов к задаче 6.12

6.10. Определить, чему равна емкость плоского воздушного конденсатора, в который вставлена стеклянная пластина толщиной 3 см, если расстояние между его пластинами 4 см, а площадь обкладок составляет 300 см^2 . Найти падения напряжений на каждом из диэлектриков, если подводимое к конденсатору напряжение равно 6 кВ.

6.11. К выводам А и Б соединения конденсаторов, показанного на рис. 6.5, подведено напряжение 60 В. Вычислить общий заряд соединения, а также заряды и напряжения на конденсаторах, если $C_1 = 5 \text{ мкФ}$; $C_2 = 1 \text{ мкФ}$; $C_3 = 2,5 \text{ мкФ}$; $C_4 = 4 \text{ мкФ}$.

6.12. После замыкания ключа S в схеме на рис. 6.6 источник отдал в цепь заряд $35,4 \text{ мкКл}$ и конденсатор C_3 зарядился до напряжения 2,4 кВ. Определить напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 и емкости конденсаторов C_2 и C_3 , если $3C_2 = 4C_3$ и $C_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ пФ}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6.3. 3 мкФ.

6.4. 95...275 пФ.

6.5. 3 мкФ.

6.6. 705 мкФ; 595 мкФ.

6.7. 80 В; 40 В.

6.8. 13,33 мкФ; 100 В; 50 В; 50 В; 50 В; 100 В.

6.9. $6,45 \cdot 10^5 \text{ В/м}$; 4,65.

6.10. 18,6 пФ; 4,2 кВ; 1,8 кВ.

6.11. $Q = Q_1 = 180 \text{ мкКл}$; $Q_2 = 24 \text{ мкКл}$; $Q_3 = 60 \text{ мкКл}$; $Q_4 = 96 \text{ мкКл}$; $U_1 = 36 \text{ В}$; $U_2 = U_3 = U_4 = 24 \text{ В}$.

6.12. 4,2 кВ; 1,8 кВ; $8 \cdot 10^3 \text{ пФ}$; $6 \cdot 10^3 \text{ пФ}$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

7.1. Последовательное соединение нелинейных элементов

Задача 7.1. В цепи, показанной на рис. 7.1, *а*, терморезисторы — полупроводниковые нелинейные элементы НЭ1 и НЭ2, используемые в качестве нелинейных сопротивлений, соединены последовательно. Вольт-амперные характеристики (ВАХ) этих терморезисторов представлены на рис. 7.1, *б* в одной системе координат.

Рассчитать и построить график зависимости сопротивления терморезистора НЭ1 от силы тока I в цепи при изменении силы тока в диапазоне от 1 до 10 мА. Определить напряжения на терморезисторах и их общее напряжение при силе тока в цепи $I = 4$ мА, а также силу тока в цепи и напряжения на терморезисторах при напряжении $U = 7$ В.

Решение. 1. Построение графика зависимости сопротивления нелинейного элемента НЭ1 от силы тока. ВАХ терморезистора НЭ1 в диапазоне значений токов от 0 до 1 мА (на рис. 7.1, *б* от 0 до точки A_1) имеет линейный характер, поэтому в указанном диапазоне токов сопротивление терморезистора НЭ1 имеет постоянное значение:

$$R_{\text{НЭ1}} = \frac{U_{1A_1}}{I_{A_1}} = \frac{4,8}{1 \cdot 10^{-3}} = 4,8 \text{ кОм} = \text{const.}$$

Здесь U_{1A_1} — напряжение в точке A_1 ВАХ НЭ1 при токе в цепи $I_{A_1} = 1$ мА.

При дальнейшем увеличении силы тока вольт-амперная характеристика НЭ1 резко отклоняется от прямой.

Для построения графика зависимости $R_{\text{НЭ1}} = f(I)$ определим координаты ряда точек ВАХ терморезистора НЭ1 — значения силы тока I и соответствующие им значения напряжения U_1 (на рис. 7.1, *б* — координаты точек $B_1 \dots E_1$) с учетом выбранных мас-

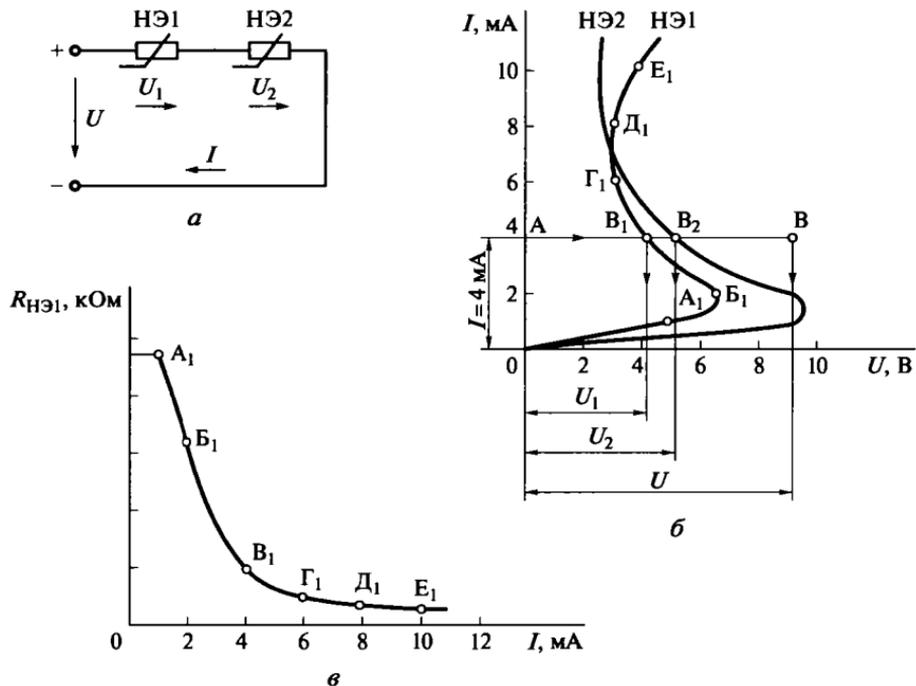


Рис. 7.1. Последовательное соединение нелинейных элементов: *а* — схема цепи; *б* — вольт-амперные характеристики терморезисторов и пример определения напряжений цепи по известной силе тока; *в* — график зависимости сопротивления терморезистора от силы тока

штабов по осям тока (m_I) и напряжения (m_U). Определим сопротивления терморезистора $R_{HЭ1}$ в этих точках как отношения U_1/I .

Полученные данные оформим в виде табл. 7.1.

По результатам расчета (см. табл. 7.1) построим график зависимости $R_{HЭ1} = f(I)$ (рис. 7.1, *в*).

Таблица 7.1

Зависимость сопротивления нелинейного элемента от силы тока в цепи

Точка ВАХ	I , мА	U_1 , В	$R_{HЭ1}$, кОм
A_1	1	4,8	4,800
$Б_1$	2	6,5	3,250
$В_1$	4	4,0	1,000

Точка ВАХ	I , мА	U_1 , В	$R_{НЭ1}$, кОм
Γ_1	6	3,1	0,516
D_1	8	3,2	0,400
E_1	10	3,9	0,325

График $R_{НЭ1} = f(I)$ показывает, что сопротивление нелинейного элемента непостоянно и зависит или от силы тока в нелинейном элементе, или от падения напряжения на нем.

Кроме того, график наглядно демонстрирует следующую особенность таких нелинейных элементов, как терморезисторы: с ростом тока и, следовательно, температуры терморезистора его сопротивление уменьшается, т.е. *терморезисторы имеют отрицательный температурный коэффициент*. Поэтому они широко применяются в устройствах регулировки, измерения и компенсации влияния температуры. Например, можно снизить температурную погрешность вольтметра, возникающую вследствие увеличения сопротивления его измерительной цепи с ростом температуры, заменив часть добавочного сопротивления вольтметра терморезистором.

2. Определение напряжений на терморезисторах и их общего напряжения при известной силе тока в цепи. Поскольку вольт-амперные характеристики терморезисторов имеют нелинейный характер (см. рис. 7.1, б), а следовательно, сопротивления терморезисторов не являются постоянными величинами, падения напряжений на них нельзя определить аналитически с помощью закона Ома, но легко определить графически с помощью ВАХ. Для этого достаточно на оси токов найти точку, соответствующую в выбранном масштабе известной силе тока I в цепи, и через эту точку провести прямую, параллельную оси напряжений, до пересечения с ВАХ каждого из терморезисторов. Искомые напряжения определим как проекции полученных точек пересечения на ось напряжений с учетом выбранного по оси напряжений масштаба.

Например, в заданной цепи силе тока $I = 4$ мА в выбранном по оси токов масштабе соответствует точка А (см. рис. 7.1, б). Проведем через эту точку прямую, параллельную оси напряжений, до пересечения с ВАХ нелинейных элементов в точках B_1 и B_2 . Искомые напряжения будут равны проекциям отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{AB_2}$ на ось напряжений с учетом выбранного по оси напряжений

масштаба. При масштабе $m_U = 2 \text{ В/см}$ длина отрезка $\overline{AB}_1 = 2,05 \text{ см}$, а длина отрезка $\overline{AB}_2 = 2,5 \text{ см}$. Следовательно,

$$U_1 = \overline{AB}_1 m_U = 2,05 \cdot 2 = 4,1 \text{ В}; \quad U_2 = \overline{AB}_2 m_U = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ В}.$$

Общее напряжение U последовательного соединения нелинейных элементов определим как сумму напряжений на каждом из этих элементов:

$$U = U_1 + U_2 = 4,1 + 5 = 9,1 \text{ В}.$$

Графически общее напряжение соответствует проекции отрезка $\overline{AB} = \overline{AB}_1 + \overline{AB}_2$ на ось напряжений с учетом выбранного по оси напряжений масштаба m_U .

3. Определение силы тока в цепи и напряжений на терморезисторах при заданном общем напряжении U . Из-за нелинейного характера ВАХ терморезисторов это задание также целесообразно выполнять графически. Этапы выполнения задания следующие:

а) построение общей вольт-амперной характеристики последовательного соединения терморезисторов;

б) определение силы тока в цепи и напряжений на нелинейных элементах по общей вольт-амперной характеристике.

Общую ВАХ последовательного соединения терморезисторов построим с использованием известных ВАХ нелинейных элементов в той же системе координат. Для этого на оси токов выберем

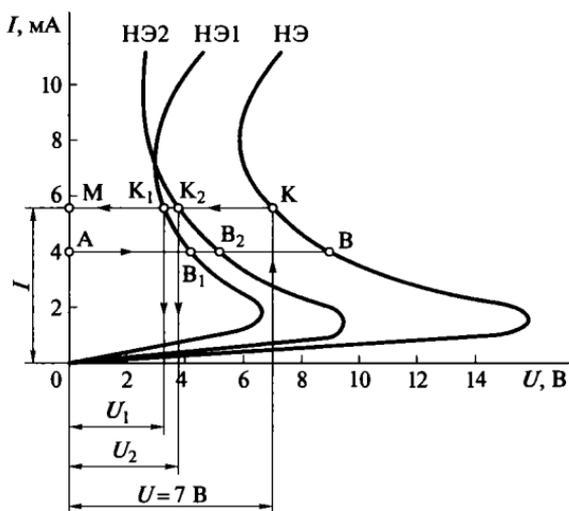


Рис. 7.2. Построение вольт-амперной характеристики последовательного соединения терморезисторов и использование ее для определения токов и напряжений

ряд значений силы тока и для каждого из этих значений определим графически напряжения на отдельных терморезисторах и их общее напряжение по методике, описанной в п. 2 решения для силы тока $I = 4$ мА. Кривая НЭ на рис. 7.2, проведенная через полученные точки, является общей ВАХ последовательного соединения терморезисторов.

Определим силу тока в цепи и напряжения на нелинейных элементах по общей вольт-амперной характеристике. Для этого на оси напряжений (см. рис. 7.2) отложим отрезок, соответствующий заданному напряжению $U = 7$ В с учетом масштаба, выбранного по оси напряжений. Из его конца проведем перпендикуляр до пересечения с общей ВАХ последовательного соединения и получим точку К. Проекция ординаты точки К на ось токов (отрезок OM) в выбранном по оси токов масштабе m_I равна силе тока I в цепи. Например, при $m_I = 2$ мА/см отрезок $OM = 2,8$ см, а сила тока

$$I = \overline{OM} m_I = 2,8 \cdot 2 = 5,6 \text{ см.}$$

Абсциссы точек K_1 и K_2 — точек пересечения горизонтали, проведенной через точку К, с вольт-амперными характеристиками терморезисторов НЭ1 и НЭ2 с учетом масштаба, выбранного по оси напряжений, равны соответственно напряжениям U_1 и U_2 на терморезисторах.

При $m_U = 2$ В/см отрезок $\overline{MK_1} = 1,65$ см, а отрезок $\overline{MK_2} = 1,85$ см. Таким образом, при общем напряжении $U = 7$ В получим следующие значения напряжений на терморезисторах:

$$U_1 = \overline{MK_1} m_U = 1,65 \cdot 2 = 3,3 \text{ В;}$$

$$U_2 = \overline{MK_2} m_U = 1,85 \cdot 2 = 3,7 \text{ В.}$$

7.2. Последовательное соединение нелинейного и линейного элементов. Метод пересечений

Задача 7.2. В электрической цепи, представленной на рис. 7.3, последовательно с нагрузочным сопротивлением R_H включен нелинейный элемент — бареттер (стальная нить в атмосфере водо-

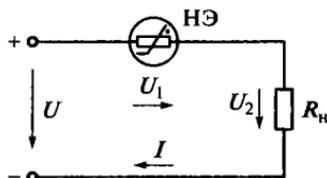


Рис. 7.3. Схема последовательного соединения бареттера (НЭ) и линейного сопротивления (R_H)

рода), служащий для поддержания неизменным тока в нагрузке при колебаниях входного напряжения U .

Определить напряжение U на входе цепи и напряжения U_1 и U_2 на участках цепи при силе тока в цепи $I = 4$ А, если сопротивление нагрузки $R_H = 2$ Ом и задана ВАХ бареттера $I = f(U_1)$ в виде следующей таблицы:

$U_1, \text{В}$	0	1	2	4	8	12	16	20	24	28
$I, \text{А}$	0	1,8	3,0	3,8	4,0	4,0	4,1	4,7	5,6	6,5

Построить график $I = f(U)$ изменения силы тока I в заданной цепи в зависимости от изменения напряжения U на ее входе, определить коэффициент стабилизации тока в этой цепи при $U_{\text{ном}} = 18$ В и $I_{\text{ном}} = 4$ А, а также найти, в каких пределах будет изменяться нагрузка цепи R_H , если сила тока I изменяется в диапазоне от 4 до 4,5 А при входном напряжении $U = 24$ В.

Решение. 1. Определение напряжений на входе цепи и на ее элементах при заданных ВАХ нелинейного элемента, сопротивлении нагрузки R_H и силе протекающего в ней тока I .

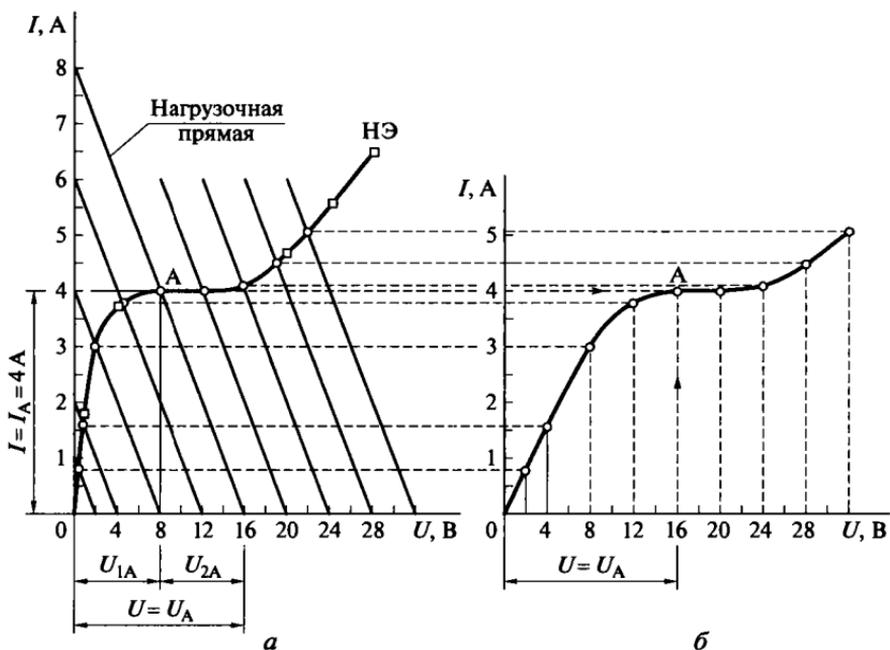


Рис. 7.4. Построение ВАХ бареттера и нагрузочной прямой линейного сопротивления (а) и общая ВАХ их последовательного соединения (б)

Построим вольт-амперную характеристику нелинейного элемента цепи. Для этого в прямоугольной системе координат (I , U) выберем масштабы по осям координат (например, $m_I = 1$ А/см, $m_U = 4$ В/см) и по заданным в условии задачи значениям ВАХ построим зависимость силы тока НЭ от напряжения на его выводах: $I = f(U_1)$, т. е. ВАХ бареттера (рис. 7.4, а).

ВАХ бареттера имеет следующую особенность: при изменении напряжения U на входе цепи и связанном с ним изменении напряжения U_1 на выводах бареттера в определенном диапазоне ток в бареттере и соответственно во всей цепи остается неизменным. Эта особенность используется для стабилизации тока в нагрузке цепи при колебаниях входного напряжения. В рассматриваемом случае сила тока в бареттере (и в цепи) остается постоянной ($I = 4$ А) в диапазоне изменения напряжения U_1 на бареттере от 6,3 до 14 В (см. рис. 7.4, а).

Определим напряжения в цепи при силе тока в ней $I = 4$ А. Поскольку заданная сила тока $I = 4$ А поддерживается в бареттере в диапазоне изменения напряжений U_1 от 6,3 до 14 В, выберем одну из точек указанного диапазона, например точку А, для которой $U_1 = U_{1А} = 8$ В.

Так как соединение элементов цепи последовательное, ток в нагрузке равен току бареттера: $I = I_A = 4$ А. При этом напряжение на нагрузке $U_{2А} = I_A R_n = 4 \cdot 2 = 8$ В, а напряжение на входе цепи равно сумме напряжений на ее элементах:

$$U = U_A = U_{1А} + U_{2А} = 8 + 8 = 16 \text{ В.}$$

Напряжения U_A и $U_{2А}$ показаны на рис. 7.4, а в той же системе координат в выбранном по оси напряжений масштабе m_U .

2. Построение графика зависимости силы тока I в цепи от напряжения U на ее входе методом пересечений. Для построения общей ВАХ нелинейного и линейного элементов можно применить метод, рассмотренный в п. 3 задачи 7.1. Для этого следует построить в одной системе координат $I = f(U)$ — ВАХ нелинейного и линейного элементов. Затем для ряда значений силы тока графически определить общее напряжение как сумму напряжений на нелинейном и линейном участках цепи и провести кривую через полученные точки.

Однако для последовательного соединения в цепи нелинейного и линейного элементов существует более удобный способ построения общей вольт-амперной характеристики — *метод пересечений*, который заключается в следующем.

Построим нагрузочную прямую и определим координаты первой точки зависимости $I = f(U)$. *Нагрузочная прямая* — это

график изменения тока в цепи в зависимости от изменения напряжения на нелинейном элементе: $I = f(U_1)$ при заданных напряжении цепи U и сопротивлении нагрузки R_n .

Зависимость $I = f(U_1)$ определяется уравнением тока в цепи:

$$I = (U - U_1)/R_n. \quad (7.1)$$

Для построения нагрузочной прямой зададим произвольное (одно из возможных) значение входного напряжения, например $U = 16$ В.

Нагрузочная прямая строится в соответствии с уравнением (7.1) в той же системе координат, что и ВАХ нелинейного элемента (см. рис. 7.4, а) по двум точкам со следующими координатами:

$$U_1 = 0, \quad I = U/R_n = 16/2 = 8 \text{ А};$$

$$U_1 = U = 16 \text{ В}, \quad I = 0.$$

Точка пересечения нагрузочной прямой с вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента (точка А), определяющая то единственное значение тока I в цепи, которое удовлетворяет обоим графикам при $R_n = 2$ Ом и $U = 16$ В, называется *рабочей точкой*.

Итак, с помощью нагрузочной прямой определены координаты первой точки (А) графика зависимости $I = f(U)$ — общей ВАХ заданной цепи (рис. 7.4, б): $U = 16$ В; $I = 4$ А.

Определим теперь координаты других точек зависимости $I = f(U)$ и построим общую ВАХ цепи. Значения токов для других значений общего напряжения цепи также можно получить с помощью нагрузочных прямых методом пересечений.

При этом важно учитывать следующее:

- наклон нагрузочной прямой определяется только заданным значением сопротивления нагрузки R_n и при $R_n = \text{const}$ не изменяется при изменении входного напряжения;

- при любом заданном значении входного напряжения нагрузочная прямая проходит через заданное значение U .

Таким образом, построение общей ВАХ методом пересечений выполняется в следующем порядке:

а) на оси напряжений (см. рис. 7.4, а) выберем ряд значений входного напряжения U и через выбранные точки проведем нагрузочные прямые, параллельные нагрузочной прямой, построенной для $U = 16$ В;

б) для каждого значения входного напряжения U определим значение силы тока I как ординату точки пересечения соответствующей нагрузочной прямой с ВАХ нелинейного элемента НЭ;

в) определив координаты точек, в той же или новой системе координат (см. рис. 7.4, б) построим точки графика $I = f(U)$. Кривая, проведенная через построенные точки, представляет собой общую ВАХ заданной цепи.

3. Определение коэффициента стабилизации тока в заданной цепи. В электрических цепях в качестве стабилизаторов тока применяются нелинейные элементы, ВАХ которых имеют участки, параллельные оси напряжений. В рассматриваемой цепи в качестве стабилизатора тока используется бареттер с вольт-амперной характеристикой, представленной на рис. 7.4, а. Включенный последовательно с линейным элементом (нагрузкой) бареттер позволяет получить в нагрузке практически неизменный ток при изменении входного напряжения в диапазоне от 14 до 23 В (см. рис. 7.4, б).

Эффективность стабилизации тока оценивается *коэффициентом стабилизации* S_I , показывающим, во сколько раз относительное изменение тока меньше относительного изменения напряжения:

$$S_I = \frac{\Delta U / U_{\text{ном}}}{\Delta I / I_{\text{ном}}}, \quad (7.2)$$

где ΔU и $U_{\text{ном}}$ — абсолютное изменение и номинальное значение входного напряжения; ΔI и $I_{\text{ном}}$ — абсолютное изменение и номинальное значение тока в нагрузке.

Итак, из графика на рис. 7.4, б следует, что при значениях напряжения от 14 до 23 В сила тока в цепи остается практически постоянной, т. е.

$$\Delta U = 23 - 14 = 9 \text{ В.}$$

Абсолютное изменение силы тока при этом

$$\Delta I = 4,05 - 3,95 = 0,1 \text{ А.}$$

При заданных номинальных значениях входного напряжения и тока цепи ($U_{\text{ном}} = 18 \text{ В}$, $I_{\text{ном}} = 4 \text{ А}$) коэффициент стабилизации тока согласно формуле (7.2)

$$S_I = \frac{\Delta U / U_{\text{ном}}}{\Delta I / I_{\text{ном}}} = \frac{9/18}{0,1/4} = 20.$$

4. Определение диапазона изменения сопротивления нагрузки при неизменном входном напряжении $U = 24 \text{ В}$ и изменении силы тока в цепи в пределах от 4 до 4,5 А.

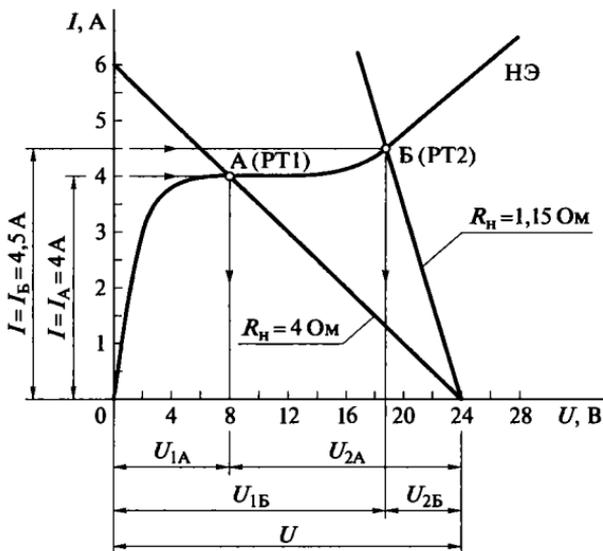


Рис. 7.5. Положение рабочей точки (РТ) в зависимости от сопротивления нагрузки R_n

Сопротивление нагрузки R_n при силе тока в цепи $I = 4$ А найдем следующим образом:

а) выбрав масштабы по осям (например, $m_U = 4$ В/см, $m_I = 1$ А/см), построим по заданным в условии задачи значениям вольт-амперную характеристику бареттера (рис. 7.5);

б) отметим на вольт-амперной характеристике бареттера точку А, соответствующую силе тока $I = 4$ А. Так как сила тока во всех участках цепи одинаковая, точка А определяет положение рабочей точки цепи РТ1, т.е. точки пересечения вольт-амперной характеристики нелинейного элемента и нагрузочной прямой;

в) построим нагрузочную прямую, проходящую через две точки: точку РТ1 и точку на оси напряжений, соответствующую напряжению $U = 24$ В в выбранном масштабе по оси напряжений;

г) определим напряжение на нагрузке (U_{2A}) как длину отрезка между значениями 8 и 24 (4 см) на оси напряжений, умноженную на выбранный масштаб по оси напряжений, т.е. $U_{2A} = 4 \cdot 4 = 16$ В;

д) по закону Ома определим сопротивление нагрузки:

$$R_n = \frac{U_{2A}}{I_A} = \frac{16}{4} = 4 \text{ Ом.}$$

Сопротивление нагрузки R_n при силе тока в цепи $I = 4,5$ А найдем следующим образом:

а) на вольт-амперной характеристике бареттера (см. рис. 7.5) определим положение новой рабочей точки РТ2 (точки Б), соответствующее силе тока $I = 4,5$ А, и построим новую нагрузочную прямую, проходящую через РТ2 и значение $U = 24$ В;

б) определим графически с учетом масштаба m_U напряжение на нагрузке: $U_{2Б} = 1,3 \cdot 4 = 5,2$ В;

в) определим соответствующее силе тока $I = 4,5$ А сопротивление нагрузки:

$$R_H = \frac{U_{2Б}}{I_B} = \frac{5,2}{4,5} = 1,15 \text{ Ом.}$$

Таким образом, при входном напряжении $U = 24$ В и изменении силы тока I в диапазоне от 4 до 4,5 А сопротивление нагрузки R_H изменяется в диапазоне от 1,15 до 4 Ом.

7.3. Параллельное соединение линейных и нелинейных элементов

Задача 7.3. В электрической цепи, приведенной на рис. 7.6, а, для стабилизации напряжения параллельно нагрузке $R_H = 1$ кОм включен стабилитрон VD , вольт-амперная характеристика которого представлена на рис. 7.6, б (кривая VD).

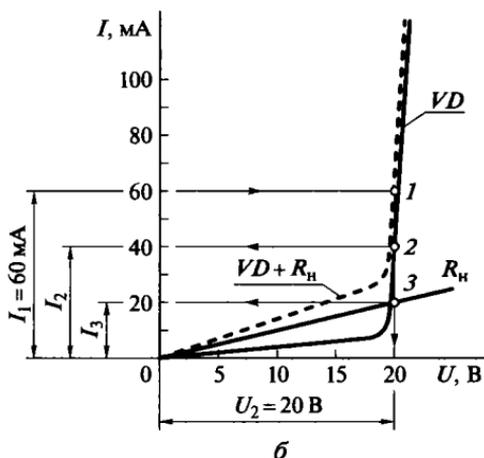
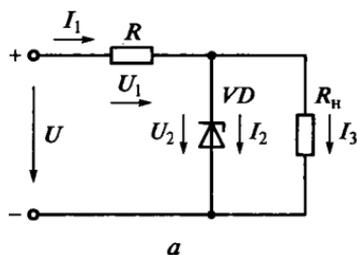


Рис. 7.6. Параллельное соединение стабилитрона и нагрузки:

а — схема цепи; б — построение ВАХ параллельного соединения стабилитрона и нагрузки; 1...3 — точки пересечения линий построения с ВАХ

Определить напряжение U_2 на сопротивлении нагрузки и силу токов в стабилитроне (I_2) и в нагрузке (I_3), если сила их общего тока $I_1 = 60$ мА.

Решение. 1. Построение ВАХ линейного элемента — нагрузки. ВАХ нагрузки строим в той же системе координат, в которой построена ВАХ стабилитрона (см. кривую VD на рис. 7.6, б), и при тех же масштабах по осям (например, $m_U = 5$ В/см; $m_I = 20$ мА/см). Так как ВАХ линейного элемента — прямая линия, то для ее построения достаточно двух точек, например со следующими координатами:

$$U_2 = 0; I_3 = 0;$$

$$U_2 = 20 \text{ В}; I_3 = U_2/R_n = 20/1000 = 20 \text{ мА}.$$

На рис. 7.6, б ВАХ нагрузки обозначена R_n .

2. Построение общей вольт-амперной характеристики параллельного соединения стабилитрона и сопротивления нагрузки. Для построения общей ВАХ используем следующие особенности параллельного соединения элементов:

- напряжение на параллельно соединенных участках цепи одинаковое;
- общий ток при параллельном соединении равен сумме токов в его параллельных участках.

На оси напряжений (см. рис. 7.6, б) выберем ряд точек, соответствующих отдельным напряжениям в выбранном по оси напряжений масштабе (например, 5, 10, 15 В и т. д.), и через каждую из них проведем прямую, параллельную оси токов.

Отрезки прямой между выбранной точкой на оси напряжений и точками пересечения прямой с кривыми VD и R_n в выбранном по оси токов масштабе соответствуют силам токов в стабилитроне (I_2) и нагрузке (I_3) для данного напряжения. Сложив указанные отрезки прямой, получим отрезок, соответствующий силе общего тока (в масштабе по оси токов) и одну из точек общей ВАХ параллельного соединения. Например, сложив отрезки 20...3 и 20...2 для напряжения $U_2 = 20$ В, получим отрезок 20...1, соответствующий силе общего тока I_1 , и точку 1 общей вольт-амперной характеристики параллельного соединения.

Аналогично найдем другие точки общей ВАХ (см. кривую $VD + R_n$ на рис. 7.6, б).

3. Определение силы токов в нагрузке и стабилитроне и напряжения на сопротивлении нагрузки при известной силе их общего тока. Отложим на оси токов (см. рис. 7.6, б) отрезок 3 см, соответствующий заданному в выбранном по оси токов масштабе ($m_I = 20$ мА/

см) значению общего тока $I_1 = 3 \cdot 20 = 60$ мА, и проведем горизонтальную прямую до пересечения с общей ВАХ (кривой $VD + R_n$) в точке I параллельного соединения. Из точки I опустим перпендикуляр на ось напряжений. Получим отрезок $0 \dots 20$ (4 см), соответствующий в выбранном по оси напряжений масштабе ($m_U = 5$ В/см) напряжению $U_2 = 4 \cdot 5 = 20$ В.

При этом точки 2 и 3 пересечения перпендикуляров с кривыми VD и R_n позволяют определить токи в стабилитроне I_2 и нагрузке I_3 при напряжении $U_2 = 20$ В как проекции отрезков $2 \dots 20$ (2 см) и $3 \dots 20$ (1 см) на ось токов, умноженные на выбранный по оси токов масштаб $m_I = 20$ мА/см:

$$I_2 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ мА}; \quad I_3 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ мА}.$$

7.4. Смешанное соединение линейных и нелинейных элементов

Задача 7.4. В схеме стабилизации напряжения, показанной на рис. 7.6, *а*, стабилитрон типа Д816А, ВАХ которого представлена на рис. 7.6, *б* (кривая VD), включен параллельно нагрузке $R_n = 1$ кОм через балластное сопротивление $R = 200$ Ом.

Определить колебания напряжения на нагрузке, если входное напряжение цепи $U = (30 \pm 5)$ В, и эффективность стабилизации напряжения в заданной цепи, если номинальное входное напряжение $U_{ном} = 30$ В, а номинальное напряжение на нагрузке $U_{2 ном} = 20$ В.

Решение. 1. Определение колебаний напряжения на нагрузке U_2 при заданном изменении входного напряжения U . Выполним графическую свертку заданной цепи. Для этого заменим параллельное соединение двух элементов (стабилитрона VD и сопротивления нагрузки R_n) одним эквивалентным нелинейным элементом (НЭ), имеющим общую вольт-амперную характеристику, полученную при решении задачи 7.3 (см. на рис. 7.6, *б* кривую $VD + R_n$). В результате свертки получим эквивалентную цепь, показанную на рис. 7.7, *а*, с последовательным соединением линейного элемента R и эквивалентного нелинейного элемента, имеющего ВАХ в виде кривой $VD + R_n$. Для такой цепи поставленная задача легко решается методом пересечений.

Определим пределы изменения напряжения U_2 , для чего в системе координат, показанной на рис. 7.7, *б*, изобразим кривую $VD + R_n$ с использованием масштабов по осям, принятых, например в задаче 7.3. Построим по двум точкам нагрузочную прямую при значении общего напряжения $U = 25$ В (левый предел изме-

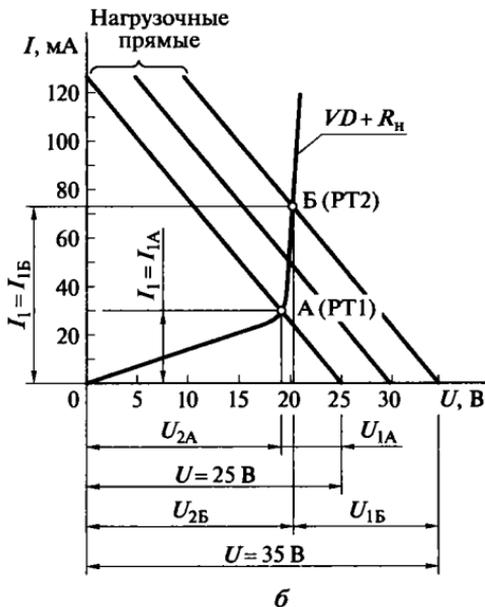
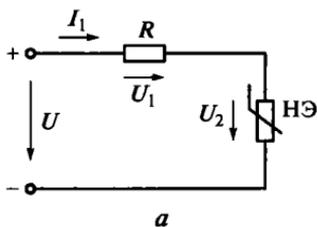


Рис. 7.7. Электрическая цепь стабилизации напряжения:

a — эквивалентная схема цепи; *б* — графики для определения пределов изменения тока в цепи и напряжений на ее участках при изменении входного напряжения в заданных пределах

нения напряжений цепи). Координаты точек этой прямой следующие:

$$U_2 = 0; I_1 = U/R = 25/200 = 125 \text{ мА};$$

$$U_2 = U = 25 \text{ В}; I_1 = 0.$$

Точка А пересечения нагрузочной прямой с ВАХ НЭ (рабочая точка РТ1) позволяет определить левый предел изменения напряжений на нагрузке R_H как произведение длины абсциссы точки РТ1 (3,8 см) на масштаб $m_U = 5 \text{ В/см}$:

$$U_{2A} = 3,8 \cdot 5 = 19 \text{ В}.$$

Посредством параллельного переноса получим нагрузочную прямую, проходящую через правый предел напряжений $U = 35 \text{ В}$. Точка В пересечения нагрузочной прямой с ВАХ НЭ (рабочая точка РТ2) позволяет аналогично определить правый предел изменения напряжения на нагрузке как произведение длины абсциссы точки РТ2 (4,04 см) на масштаб $m_U = 5 \text{ В/см}$:

$$U_{2B} = 4,04 \cdot 5 = 20,2 \text{ В}.$$

Таким образом, изменение напряжения U_2 на нагрузке R_H

$$\Delta U_2 = U_{2Б} - U_{2А} = 20,2 - 19 = 1,2 \text{ В.}$$

2. Определение эффективности стабилизации напряжения на нагрузке. Качество стабилизации напряжения оценивается *коэффициентом стабилизации* S_U , показывающим, во сколько раз относительное изменение стабилизированного напряжения на сопротивлении нагрузки меньше относительного изменения напряжения питания:

$$S_U = \frac{\Delta U / U_{\text{НОМ}}}{\Delta U_2 / U_{2 \text{НОМ}}}, \quad (7.3)$$

где ΔU и $U_{\text{НОМ}}$ — абсолютное изменение и номинальное значение входного напряжения; ΔU_2 и $U_{2 \text{НОМ}}$ — абсолютное изменение и номинальное значение напряжения в нагрузке.

Найти коэффициент стабилизации напряжения:

$$S_U = \frac{\Delta U / U_{\text{НОМ}}}{\Delta U_2 / U_{2 \text{НОМ}}} = \frac{10/30}{1,2/20} = 5,6.$$

7.5. Задачи для самостоятельного решения

7.5. Определить сопротивления электрической лампы накаливания с вольфрамовой нитью при значениях силы тока 0,2; 0,4; 0,6; 0,7; 0,75 А, если ВАХ лампы задана следующими значениями:

U , В	0	80	160	240	320	400
I , А	0	0,35	0,55	0,67	0,72	0,75

7.6. Два нелинейных элемента соединены последовательно (см. рис. 7.1, а). Определить силу тока I и напряжения U_1 и U_2 на нелинейных элементах при общем напряжении $U = 100$ В, если их ВАХ заданы следующими значениями:

I , А	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	2,8
U_1 , В	0	20	30	40	45	50	60
U_2 , В	0	25	38	50	60	70	80

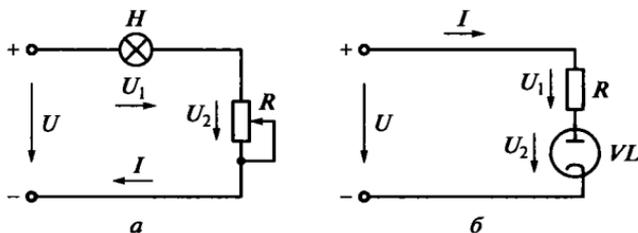


Рис. 7.8. Схемы последовательного соединения:

a — лампы накаливания и реостата; *б* — двухэлектродной лампы и линейного сопротивления

7.7. Последовательно с лампой накаливания включен реостат (рис. 7.8, *a*). Определить силу тока в цепи и напряжения на лампе (U_1) и реостате (U_2), если общее напряжение соединения $U = 140$ В, сопротивление реостата $R = 100$ Ом, а ВАХ лампы задана следующими значениями:

U_1 , В	0	20	40	60	80	100	120
I , А	0	0,12	0,22	0,3	0,38	0,43	0,48

7.8. Определить силу тока в цепи, приведенной на рис. 7.8, *a*, при значениях общего напряжения цепи 100, 180 и 300 В и неизменном сопротивлении реостата 100 Ом.

7.9. Определить, как изменятся сила тока и напряжение на лампе в цепи, показанной на рис. 7.8, *a*, если при общем напряжении 120 В сопротивление реостата изменилось с 60 до 200 Ом.

7.10. Два стабилизатора соединены последовательно. Графическим методом определить общее напряжение U на выводах соединения при токе 22 мА, если ВАХ стабилизаторов заданы следующими значениями:

I , мА	5	10	15	20	25	30
U_1 , В	50	50,1	50,3	50,6	51,0	51,5
U_2 , В	98	98,1	98,3	98,6	99,0	99,5

7.11. Кенотрон VL (двухэлектродная лампа) и линейное сопротивление $R = 2,27$ кОм присоединены последовательно к источнику питания с напряжением $U = 170$ В (рис. 7.8, *б*). Определить

силу тока в цепи, напряжения на линейном сопротивлении R и кенотроне, а также сопротивление кенотрона, если ВАХ кенотрона задана следующими значениями:

I , мА	0	3,5	9	28	56	84	112
U_2 , В	0	20	40	80	120	160	200

7.12. В цепи, показанной на рис. 7.3, для поддержания постоянного тока в нагрузке при колебаниях входного напряжения U последовательно с нагрузочным резистором $R_n = 3$ Ом включен бареттер. Методом пересечений получить зависимость $I = f(U)$, т. е. координаты точек общей ВАХ последовательного соединения, если ВАХ бареттера задана следующими значениями:

U_1 , В	0	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10	12	14
I , А	0	1,00	1,60	2,00	2,10	2,15	2,20	2,25	2,50	3,20

7.13. Последовательное соединение фотоэлемента и линейного сопротивления $R = 50$ МОм включено в сеть с напряжением 200 В. Определить силу тока в цепи и напряжения на фотоэлементе и сопротивлении, если ВАХ фотоэлемента задана следующими значениями:

U , В	0	50	100	150	200	250
I , мкА	0	0,2	0,6	1,4	2,6	5,6

7.14. По условию задачи 7.13 определить угол наклона нагрузочной прямой к оси тока при следующих масштабах по осям тока и напряжения: $m_I = 0,4$ мкА/см, $m_U = 20$ В/см.

7.15. По условию задачи 7.13 определить пределы колебания напряжения на фотоэлементе при изменении сопротивления R в диапазоне на $\pm 20\%$.

7.16. Два нелинейных элемента, значения ВАХ которых указаны в задаче 7.6, соединены параллельно. Определить токи в нелинейных элементах и напряжение на них, если сила общего тока равна 1,5 А.

7.17. Лампа накаливания включена параллельно с линейным резистором $R = 50$ Ом. Определить напряжение на выводах параллельного соединения и токи в лампе и сопротивлении, если сила тока в неразветвленной части цепи $I = 4$ А, а ВАХ лампы накаливания задана следующими значениями:

$U, \text{ В}$	0	20	40	60	80	100	120
$I, \text{ А}$	0	0,6	1,1	1,5	1,85	2,15	2,4

7.18. Нелинейный элемент и сопротивление нагрузки $R_n = 100 \text{ Ом}$ соединены параллельно и включены на постоянное напряжение $U = 25 \text{ В}$ через сопротивление $R = 50 \text{ Ом}$. Определить напряжение на нагрузке, общий ток и токи в ветвях цепи, если ВАХ нелинейного элемента задана следующими значениями:

$U, \text{ В}$	0	8	16	24	32
$I, \text{ А}$	0	0,2	0,28	0,3	0,31

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

7.5. 200 Ом; 250 Ом; 308 Ом; 388 Ом; 533 Ом.

7.6. 1,83 А; 43 В; 57 В.

7.7. 0,4 А; 90 В; 50 В.

7.8. 0,31 А; 0,48 А; 0,68 А.

7.9. От 0,4 до 0,3 А; от 88 до 60 В.

7.10. 149,5 В.

7.11. 35 мА; 90 В; 80 В; 2,57 кОм.

7.12. Координаты точек общей ВАХ следующие:

$U, \text{ В}$	0	2	4	6	8	10	12	14
$I, \text{ А}$	0	0,55	1,10	1,65	2,00	2,10	2,12	2,20

7.13. 1,2 мкА; 140 В; 60 В.

7.14. 45°.

7.15. От 134 до 147 В.

7.16. 0,9 А; 0,6 А; 27,5 В.

7.17. 96 В; 2,08 А; 1,92 А.

7.18. 9,4 В; 0,312 А; 0,22 А; 0,092 А.

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

8.1. Неразветвленная неоднородная магнитная цепь при заданном магнитном потоке

Задача 8.1. Магнитопровод электромагнитного устройства (рис. 8.1, *a*), размеры которого (в миллиметрах) указаны на рис. 8.1, *б*, изготовлен из литой стали. Толщина магнитопровода 25 мм. В местах стыка ярма 3 с П-образной частью 1 магнитопровода имеются воздушные зазоры 2 и 4, длиной $\delta = 0,25$ мм каждый.

Вычислить силу тока в катушке, необходимую для создания магнитного потока $\Phi = 3,5 \cdot 10^{-4}$ Вб, если число витков в катушке $w = 100$. Найти абсолютную и относительную магнитные проницаемости стали и магнитное сопротивление всех участков магнитной цепи при заданном значении магнитного потока. Определить силу тока в катушке, необходимую для создания такого же потока ($\Phi = 3,5 \cdot 10^{-4}$ Вб) при отсутствии воздушных зазоров в магнитопроводе устройства.

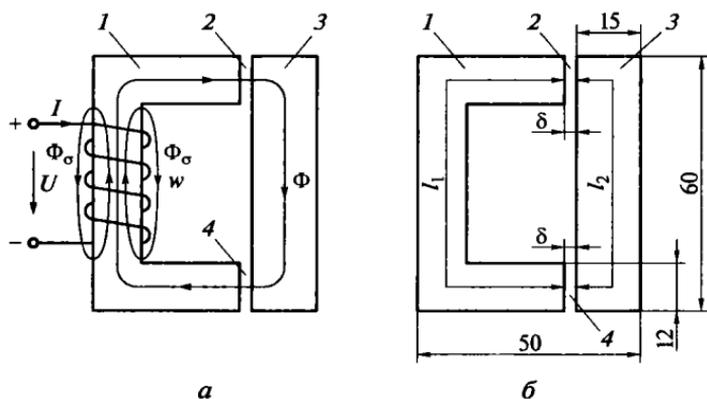


Рис. 8.1. Неразветвленная магнитная цепь:

a — графическое изображение; *б* — геометрические размеры магнитопровода; 1 — П-образная часть; 2, 4 — воздушные зазоры; 3 — ярмо

Решение. 1. Расчет силы тока в катушке устройства, необходимой для создания заданного магнитного потока. Оценим влияние стального магнитопровода на магнитное поле катушки. Наличие стального магнитопровода внутри катушки определяет картину магнитного поля, создаваемого током катушки. Сталь, имеющая высокую магнитную проницаемость, предоставляет для потока путь с гораздо меньшим магнитным сопротивлением, чем воздух. Поэтому большая часть магнитных силовых линий замыкается по стали, а не по воздуху, как бы удлиняя катушку, размещенную на сердечнике, и превращая ее в подобие тороидальной. Только незначительная часть магнитных линий замыкается по воздуху вокруг витков катушки, образуя поток рассеяния Φ_{σ} , значение которого по сравнению с значением потока Φ в стали мало, и его не учитывают при расчете.

Таким образом, длина магнитного пути определяется длиной магнитопровода, и поток Φ , замыкающийся по магнитопроводу, считается одинаковым по всей его длине ($\Phi = \text{const}$).

При расчете магнитопровод разбивают на участки. При этом каждый участок должен по всей длине иметь одинаковую площадь поперечного сечения ($S = \text{const}$) и быть выполнен из одного материала (с одинаковой магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$). В этом случае участок по всей длине имеет одинаковую индукцию $B = \text{const}$, так как $B = \Phi/S$, и неизменную напряженность $H = \text{const}$, так как $H = B/\mu_a$ (где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость материала участка).

Таких участков в магнитной цепи, показанной на рис. 8.1, *a*, четыре ($n = 1 \dots 4$, где n соответствует номеру позиции участка).

Определим индукции магнитного поля участков цепи, для чего сначала найдем площади поперечного сечения этих участков:

$$S_1 = S_2 = S_4 = 12 \cdot 25 = 300 \text{ мм}^2 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$S_3 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ мм}^2 = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Тогда магнитные индукции участков цепи запишем в следующем виде:

$$B_1 = B_2 = B_4 = \Phi/S_1 = 3,5 \cdot 10^{-4} / (3 \cdot 10^{-4}) = 1,17 \text{ Тл};$$

$$B_3 = \Phi/S_3 = 3,5 \cdot 10^{-4} / (3,75 \cdot 10^{-4}) = 0,93 \text{ Тл}.$$

Определим напряженности магнитного поля участков цепи. Так как относительная и абсолютная магнитные проницаемости воздушных зазоров (участков 2 и 4) составляют

$$\mu_2 = \mu_4 = 1; \mu_{a2} = \mu_{a4} = \mu_2 \mu_0 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м},$$

то напряженности воздушных участков можно записать в виде

$$H_2 = H_4 = B_2/\mu_{a2} = B_2/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 1,17/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 9,28 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

Для определения напряженностей ферромагнитных участков (участков 1 и 3) рассматриваемой цепи нельзя использовать соотношение $H = B/\mu_a$, так как абсолютная магнитная проницаемость ферромагнитных материалов не является постоянной, а зависит от неизвестной пока напряженности. Напряженности в этом случае определяются по значениям известных индукций — по кривым намагничивания $B = f(H)$, часто представляемым в виде таблиц. Для получения более точного значения напряженности целесообразно по таблице строить кривую намагничивания заданного материала. По данным такой таблицы (приложение 4) построим кривую намагничивания для литой стали (рис. 8.2).

По кривой намагничивания, приведенной на рис. 8.2, определим напряженности, соответствующие значениям индукций $B_1 = 1,17 \text{ Тл}$ и $B_3 = 0,93 \text{ Тл}$ стальных участков. С учетом выбранных по осям графика масштабов получим следующие напряженности ферромагнитных участков:

$$H_1 = 1220 \text{ А/м (точка А);}$$

$$H_3 = 840 \text{ А/м (точка Б).}$$

Определим намагничивающую силу и силу тока в катушке устройства. По закону полного тока полный ток $\sum(Iw)$ (алгебраическая сумма ампер-витков, или магнитодвижущая — намагничивающая — сила (МДС) катушки устройства) равен сумме магнитных напряжений U_{m_n} участков контура, совпадающего с любой выбранной магнитной силовой линией:

$$\sum(Iw) = \sum U_{m_n} = \sum H_n l_n,$$

где H_n — напряженность магнитного поля; l_n — длина n -го участка.

Выберем контур, совпадающий со средней силовой линией магнитного поля устройства (см. рис. 8.1, а). Длины участков выбранного контура определим по размерам, указанным на рис. 8.1, б:

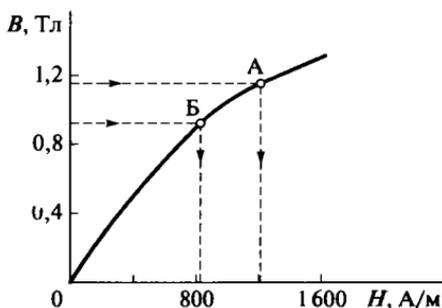


Рис. 8.2. Кривая намагничивания литой стали

$$l_1 = (50 - 15 - 0,25 - 6) \cdot 2 + (60 - 6 - 6) = 105,5 \text{ мм};$$

$$l_2 = 60 - 6 - 6 + 7,5 + 7,5 = 63 \text{ мм}.$$

МДС (ампер-витки) катушки рассматриваемого устройства запишем в виде

$$Iw = H_1 l_1 + H_2 \delta + H_3 l_2 + H_4 \delta = H_1 l_1 + 2H_2 \delta + H_3 l_2. \quad (8.1)$$

Подставив значения H_n , l_n и δ в уравнение (8.1), определим МДС рассматриваемого устройства:

$$Iw = 1220 \cdot 105,5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 9,28 \cdot 10^5 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} + \\ + 840 \cdot 63 \cdot 10^{-3} = 645,83 \text{ А}.$$

В этом случае сила тока в катушке устройства

$$I = Iw/w = 645,83/100 = 6,5 \text{ А}.$$

2. Расчет абсолютной и относительной магнитных проницаемостей стали и магнитного сопротивления всех участков магнитной цепи на рис. 8.1, *a* при заданном значении магнитного потока. Найдем абсолютные магнитные проницаемости ферромагнитных (стальных) участков *I* и *3*:

$$\mu_{a1} = B_1/H_1 = 1,17/1220 = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м};$$

$$\mu_{a3} = B_3/H_3 = 0,93/840 = 11,1 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м}.$$

Определим относительные магнитные проницаемости стальных участков:

$$\mu_1 = \mu_{a1}/\mu_0 = 9,6 \cdot 10^{-4}/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 764;$$

$$\mu_3 = \mu_{a3}/\mu_0 = 11,1 \cdot 10^{-4}/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 883.$$

Полученные результаты показывают, что стальные участки заданной цепи имеют в 764 и 883 раза большую магнитную проницаемость, чем воздух.

Найдем магнитные сопротивления участков магнитной цепи:

$$R_{m1} = l_1/(\mu_{a1} S_1) = 105,5 \cdot 10^{-3}/(9,6 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}) = 3,67 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн};$$

$$R_{m2} = R_{m4} = \delta/(\mu_0 S_1) = 0,25 \cdot 10^{-3}/(4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-4}) = 6,63 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн};$$

$$R_{m3} = l_2/(\mu_{a3} S_3) = 63 \cdot 10^{-3}/(11,1 \cdot 10^{-4} \cdot 3,75 \cdot 10^{-4}) = 1,52 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн}.$$

Оказывается, что магнитные сопротивления стальных и воздушных участков имеют один и тот же порядок, несмотря на огромную (в сотни раз) разницу в их длине. В рассматриваемом примере воздушные зазоры (участки *2* и *4*), длины которых соответственно в 422 и 252 раза меньше длин стальных участков (участков *1* и *3*), имеют приблизительно в 2—3 раза большее сопротивление. Дело в том, что магнитная проницаемость воздуш-

ных зазоров в рассматриваемом примере приблизительно в 800...900 раз меньше, чем магнитная проницаемость стали.

3. Расчет силы тока в катушке устройства, необходимой для создания потока $\Phi = 3,5 \cdot 10^{-4}$ Вб в магнитопроводе при отсутствии в нем воздушных зазоров. Если уменьшить до нуля воздушные зазоры в магнитопроводе на рис. 8.1, рассматриваемая магнитная цепь останется неоднородной, состоящей из двух участков (1 и 3) с различными площадями поперечного сечения: $S_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ м², а $S_3 = 3,75 \cdot 10^{-4}$ м².

В этом случае согласно закону полного тока намагничивающая сила

$$\begin{aligned} Iw &= U_{m1} + U_{m3} = H_1 l_1 + H_3 l_2 = \\ &= 1220 \cdot 105,5 \cdot 10^{-3} + 840 \cdot 63 \cdot 10^{-3} = 181,6 \text{ А/м.} \end{aligned}$$

При известных магнитных сопротивлениях участков намагничивающую силу можно определить и по закону Ома для магнитной цепи. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} Iw &= U_{m1} + U_{m3} = \Phi(R_{m1} + R_{m3}) = \\ &= 3,5 \cdot 10^{-4}(3,67 + 1,52)10^5 = 181,6 \text{ А/м.} \end{aligned}$$

Практически одинаковый результат подтверждает правильность методики расчета.

В данном случае сила тока в катушке

$$I = Iw/w = 181,6/100 = 1,82 \text{ А.}$$

Следовательно, при отсутствии воздушных зазоров сила тока в катушке рассматриваемого устройства уменьшится от 6,5 до 1,82 А.

Итак, отсутствие воздушных промежутков в магнитной цепи дает возможность значительно уменьшить МДС, а следовательно, и силы токов катушек, создающие МДС, необходимые для создания заданного потока. Однако часто воздушные промежутки неизбежны, например при необходимости включения в состав магнитной цепи устройства вращающихся или подвижных элементов.

8.2. Неразветвленная неоднородная магнитная цепь при заданной намагничивающей силе

Задача 8.2. Для электромагнитного устройства, рассмотренного в задаче 8.1, определить значение магнитного потока Φ , созданного намагничивающей силой, равной 400 А.

Решение. 1. Расчет и построение зависимости потока Φ от намагничивающей силы Iw . Сначала определим приблизительное значение магнитного потока Φ , созданного заданной намагничивающей силой $Iw = 400$ А. Для заданной магнитной цепи можно составить уравнения, соответствующие закону полного тока и закону Ома:

$$Iw = U_{M1} + U_{M2} + U_{M3} + U_{M4} = \Phi R_{M.общ},$$

где $R_{M.общ} = R_{M1} + R_{M2} + R_{M3} + R_{M4}$.

Пренебрегая сопротивлениями стальных участков (из-за их незначительности по сравнению с сопротивлениями воздушных зазоров) и учитывая равенство магнитных сопротивлений воздушных зазоров ($R_{M2} = R_{M4}$), получим

$$\begin{aligned} R_{M.общ} &= 2R_{M2} = 2\delta/(\mu_0 S_2) = \\ &= 2 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-4}) = 13,27 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн.} \end{aligned}$$

Тогда при заданном значении $Iw = 400$ А поток

$$\Phi = Iw/R_{M.общ} = 400/(13,27 \cdot 10^5) = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Теперь найдем МДС для ряда значений магнитного потока. Зададим несколько значений потока Φ вблизи его вычисленного приблизительного значения. По методике, рассмотренной в задаче 8.1, определим соответствующие этим потокам намагничивающие силы Iw . Результаты расчетов оформим в виде табл. 8.1.

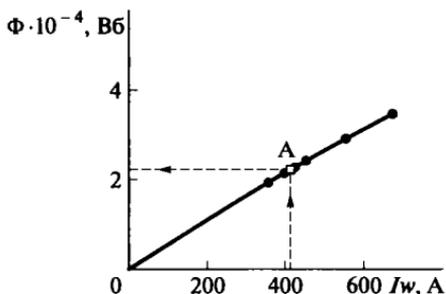
Таблица 8.1

Определение МДС по заданному потоку Φ

$\Phi \cdot 10^{-4}$, Вб	2,0	2,2	2,3	2,5	3,0	3,5
B_1 , Тл	0,67	0,73	0,77	0,83	1,00	1,17
$B_2 = B_4$, Тл	0,67	0,73	0,77	0,83	1,00	1,17
B_3 , Тл	0,53	0,59	0,61	0,67	0,80	0,93
H_1 , А/м	550	610	650	720	920	1220
$H_2 = H_4$, А/м	$5,31 \cdot 10^5$	$5,84 \cdot 10^5$	$6,10 \cdot 10^5$	$6,63 \cdot 10^5$	$7,96 \cdot 10^5$	$9,28 \cdot 10^5$
H_3 , А/м	420	470	490	550	690	840
Iw	350	386	404	442	538	646

По данным табл. 8.1 построим зависимость потока Φ в магнитопроводе рассматриваемого устройства от намагничивающей силы его катушки Iw (рис. 8.3).

Рис. 8.3. Зависимость потока Φ от намагничивающей силы Iw катушки устройства



2. Определение потока, соответствующего заданному значению намагничивающей силы, по кривой $\Phi = f(Iw)$.

На оси намагничивающих сил

Iw (см. рис. 8.3) отложим отрезок, соответствующий заданному значению $Iw = 400$ А, и из его конца проведем перпендикуляр до пересечения с кривой намагничивания в точке А. Определим ординату точки А с учетом масштаба по оси потоков.

Для заданного значения намагничивающей силы $Iw = 400$ А поток $\Phi = 2,27 \cdot 10^{-4}$ Вб.

8.3. Разветвленная несимметричная магнитная цепь

Задача 8.3. Магнитопровод устройства, представленного на рис. 8.4, а, выполненный из электротехнической стали марки 1512 (Э42), имеет размеры, показанные на рис. 8.4, б, и толщину 20 мм.

Определить магнитодвижущую силу обмотки, создающую в воздушном зазоре $\delta = 1$ мм магнитопровода магнитный поток $\Phi_3 = 2 \cdot 10^{-4}$ Вб, если поток в левом стержне магнитопровода в 3 раза больше потока в зазоре δ .

Решение. 1. Определение числа ветвей в заданной магнитной цепи. Разветвленную магнитную цепь

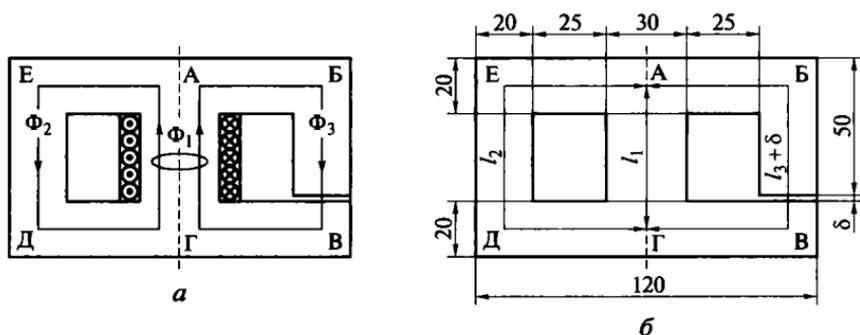


Рис. 8.4. Разветвленная магнитная цепь:

а — графическое изображение; б — геометрические размеры магнитопровода

(см. рис. 8.4) можно представить состоящей из трех ветвей (АГ, АЕДГ, АБВГ) с разными магнитными потоками (Φ_1 , Φ_2 и Φ_3).

2. Выделение участков магнитной цепи с одинаковой напряженностью и определение их размеров. Магнитную цепь рассматриваемого устройства можно разделить на четыре участка: АГ, АЕДГ, АБВГ (сумма двух ферромагнитных частей) и δ , каждый из которых характеризуется одинаковыми по всей длине участка потоком, площадью поперечного сечения и материалом, а следовательно, и одинаковым значением напряженности магнитного поля.

Длины и площади поперечного сечения каждого из участков определим по размерам магнитопровода, приведенным на рис. 8.4, б:

$$l_1 = l_{\text{АГ}} = 50 - 10 + 1 = 51 \text{ мм};$$

$$l_2 = l_{\text{АЕДГ}} = 2(10 + 25 + 15) + 51 = 151 \text{ мм};$$

$$l_3 = l_{\text{АБВГ}} - \delta = 151 - 1 = 150 \text{ мм};$$

$$l_4 = \delta = 1 \text{ мм};$$

$$S_1 = 30 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$S_2 = S_3 = S_4 = 20 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

3. Вычисление напряженностей магнитного поля в различных ветвях магнитной цепи. Определим поток в ветви АГ используя первый закон Кирхгофа для магнитной цепи и учитывая, что по условию задачи $\Phi_2 = 3\Phi_3$:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 3\Phi_3 + \Phi_3 = 4\Phi_3 = 4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Индукция

$$B_1 = \Phi_1/S_1 = 8 \cdot 10^{-4}/(6 \cdot 10^{-4}) = 1,33 \text{ Тл}.$$

Напряженность H_1 на участке АГ, выполненном из ферромагнитного материала, определим по значению индукции B_1 . Для стали 1512 (приложение 4) напряженность

$$H_1 = 850 \text{ А/м}.$$

(Для получения более точного значения напряженности целесообразно построить кусочек кривой намагничивания.)

Определим поток Φ_2 в ветви АЕДГ:

$$\Phi_2 = 3\Phi_3 = 3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Индукция

$$B_2 = \Phi_2/S_2 = 6 \cdot 10^{-4}/(4 \cdot 10^{-4}) = 1,5 \text{ Тл}.$$

Напряженность H_2 на участке АЕДГ, выполненном из ферромагнитного материала, определим по значению индукции B_2 . Для стали 1512 (приложение 4) напряженность

$$H_2 = 2750 \text{ А/м.}$$

Согласно заданию поток в зазоре, а следовательно, и во всей неразветвленной неоднородной ветви АБВГ

$$\Phi_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Индукция в ферромагнитных участках ветви АБВГ, общая длина которых обозначена l_3 ,

$$B_3 = \Phi_3/S_3 = 2 \cdot 10^{-4}/(4 \cdot 10^{-4}) = 0,5 \text{ Тл.}$$

Напряженность H_3 на участках ветви АБВГ, выполненных из ферромагнитного материала, определим по значению индукции B_3 . Для стали 1512 (приложение 4) напряженность

$$H_3 = 85 \text{ А/м.}$$

Так как на всех участках ветви АБВГ поток Φ_3 одинаковый, а площадь поперечного сечения воздушного зазора S_4 считается равной площади прилегающего ферромагнитного участка S_3 , индукция в воздушном зазоре δ

$$B_4 = B_3 = 0,5 \text{ Тл.}$$

Напряженность в воздушном зазоре

$$H_4 = B_4/\mu_0 = 0,5/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 39,8 \cdot 10^4 \text{ А/м.}$$

4. Определение МДС катушки. Определить магнитодвижущую силу Iw можно, составив уравнение по закону полного тока (второму закону Кирхгофа для магнитной цепи) для любого из следующих контуров: АЕДГА или АБВГА. Рассмотрим оба варианта.

Определим МДС катушки по контуру АЕДГА

$$\begin{aligned} Iw &= H_2l_2 + H_1l_1 = 2750 \cdot 151 \cdot 10^{-3} + 850 \cdot 51 \cdot 10^{-3} = \\ &= 415,25 + 43,35 = 458,6 \text{ А.} \end{aligned}$$

Определим МДС катушки по контуру АБВГА

$$\begin{aligned} Iw &= H_1l_1 + H_3l_3 + H_4\delta = 850 \cdot 51 \cdot 10^{-3} + 85 \cdot 150 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 39,8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} = 43,35 + 12,75 + 398 = 454,1 \text{ А.} \end{aligned}$$

При расчете по обоим контурам получены практически одинаковые результаты, различие которых обусловлено выбранной точностью расчетов и составляет менее 1 %.

Таким образом, для создания в магнитопроводе устройства заданных потоков требуется намагничивающая сила, равная 458,6 А.

8.4. Задачи для самостоятельного решения

8.4. В тороидальном сердечнике кольцевой формы из электротехнической стали марки 1511 (приложение 4) необходимо получить магнитный поток $\Phi = 2 \cdot 10^{-3}$ Вб. Размеры сердечника в миллиметрах указаны на рис. 8.5. Определить силу тока в обмотке, имеющей 100 витков, магнитную проницаемость стали (абсолютную и относительную) и индуктивность катушки.

8.5. Тороидальное кольцо из литой стали (приложение 4), размеры которого в миллиметрах указаны на рис. 8.6, выполнено из двух частей с зазорами $\delta = 0,2$ мм. На кольцо размещена обмотка из 925 витков провода. Найти силу тока в обмотке, создающую внутри кольца магнитный поток $\Phi = 1,25 \cdot 10^{-3}$ Вб.

8.6. Стальное кольцо из задачи 8.5 выполнено без зазоров. Определить силу тока в обмотке, при которой сохранится прежнее значение магнитного потока, и относительную магнитную проницаемость стали.

8.7. Определить магнитный поток и магнитное сопротивление сердечника электромагнитного устройства, размеры которого в миллиметрах заданы на рис. 8.7, если в катушке с числом витков $w = 200$ сила тока $I = 6$ А. Сердечник изготовлен из электротехнической стали 1512, причем 10 % его сечения занимает изоляция между листами.

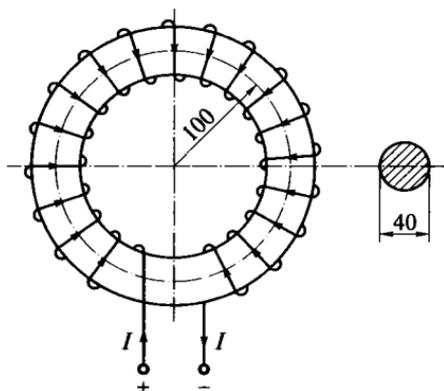


Рис. 8.5. Электромагнитное устройство к задаче 8.4

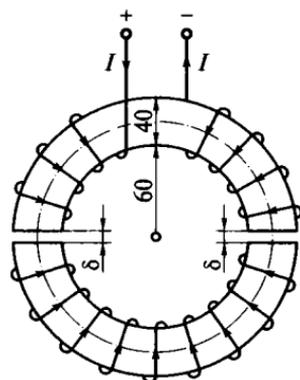


Рис. 8.6. Электромагнитное устройство к задаче 8.5

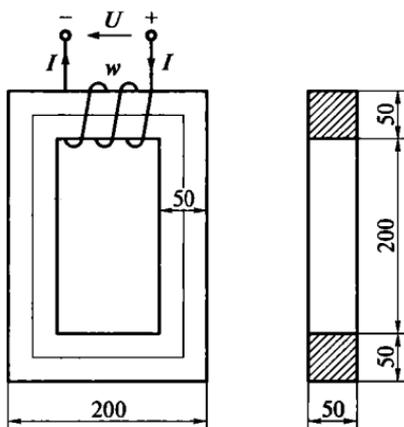


Рис. 8.7. Электромагнитное устройство к задаче 8.7

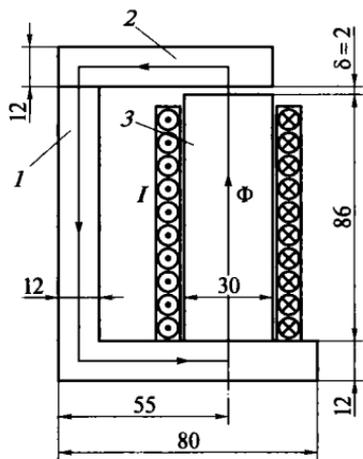


Рис. 8.8. Электромагнитное устройство к задаче 8.8:

1 — ярмо; 2 — якорь; 3 — сердечник

8.8. Определить магнитный поток и магнитное сопротивление сердечника электромагнитного устройства по данным задачи 8.7 при силе тока в катушке, равной 3 А.

8.9. В стальном сердечнике электромагнитного устройства, показанного на рис. 8.5, выпилен поперечный воздушный зазор $\delta = 2$ мм. Определить число витков катушки при данных задачи 8.4, если сила тока в обмотке равна 31,4 А.

8.10. Магнитная цепь электромагнитного реле клапанного типа (рис. 8.8) изготовлена из стали (приложение 4). Ярмо 1 и якорь 2 реле имеют прямоугольное сечение 75×12 мм, а сердечник 3 — круглое сечение диаметром 30 мм. Другие его размеры в миллиметрах указаны на рис. 8.8.

Определить число витков катушки реле, необходимое для возбуждения магнитного потока $\Phi = 1,2 \cdot 10^{-3}$ Вб при силе тока 0,2 А.

8.11. В магнитопроводе электромагнитного устройства создается магнитный поток $\Phi = 0,45 \cdot 10^{-4}$ Вб. Магнитопровод изготовлен из электротехнической стали марки 1311 (приложение 4), имеет толщину 5 мм. Другие его размеры в миллиметрах указаны на рис. 8.9. Определить силу тока в обмотке, если число ее витков $w = 1000$.

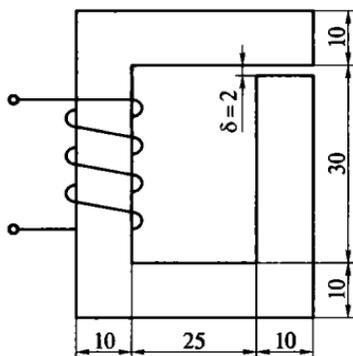


Рис. 8.9. Электромагнитное устройство к задаче 8.11

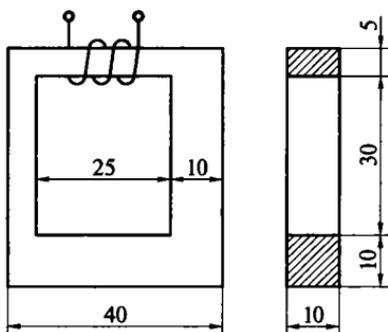


Рис. 8.10. Электромагнитное устройство к задаче 8.12

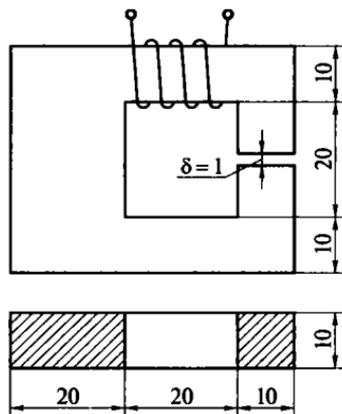


Рис. 8.11. Электромагнитное устройство к задаче 8.14

8.12. В магнитопроводе электромагнитного устройства создается магнитный поток $\Phi = 0,35 \cdot 10^{-4}$ Вб. Магнитопровод изготовлен из электротехнической стали марки 1311 (приложение 4) и имеет толщину 10 мм. Другие его размеры в миллиметрах указаны на рис. 8.10. Определить силу тока в обмотке, если число ее витков $w = 500$.

8.13. Определить поток в магнитопроводе, показанном на рис. 8.9, если сила тока в обмотке с числом витков $w = 1000$ составляет 1 А. Материал и размеры магнитопровода указаны в задаче 8.11.

8.14. В магнитной цепи, размеры магнитопровода которой указаны на рис. 8.11, определить намагничивающую силу, создающую в воздушном зазоре $\delta = 1$ мм индукцию, равную 1,4 Тл. Материал магнитопровода — сталь 1211 (приложение 4).

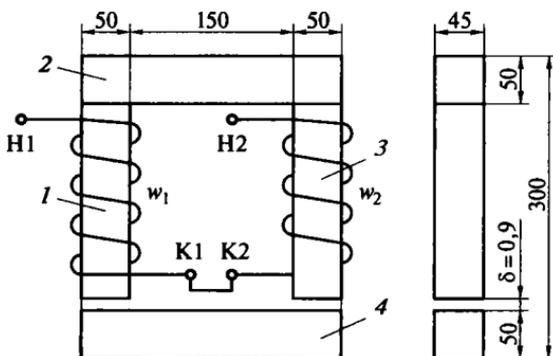


Рис. 8.12. Электромагнитное реле:

1, 3 — стержни сердечника; 2 — ярмо; 4 — якорь

8.15. Определить магнитный поток в магнитной цепи, показанной на рис. 8.11, если МДС в ней равна 1000 А. Материал магнитопровода — сталь 1211.

8.16. Магнитная цепь электромагнитного реле, показанного на рис. 8.12, изготовлена из электротехнической стали 1211 (приложение 4). На стержни 1 и 3 сердечника насажены две катушки. Направление намотки катушек, соединение их начал (Н1, Н2) и концов (К1, К2), а также размеры магнитопровода показаны на рис. 8.12. Определить магнитный поток в цепи при силе тока в катушках 0,8 А, если число витков первой катушки $w_1 = 2000$, а второй — $w_2 = 600$.

8.17. Катушка, имеющая 500 витков, расположена на среднем стержне магнитопровода (рис. 8.13, а), изготовленного из стали 1511 (приложение 4). Определить силу тока в катушке, если в крайних стержнях поток $\Phi_2 = \Phi_3 = 2 \cdot 10^{-3}$ Вб.

8.18. Определить, как следует изменить силу тока в катушке электромагнитного устройства, представленного в задаче 8.17, чтобы сохранить прежнее значение потока Φ_3 в крайнем правом стержне, если в нем создать поперечный воздушный зазор $\delta = 1$ мм (рис. 8.13, б).

8.19. На двух стержнях магнитопровода электромагнитного устройства, показанного на рис. 8.14, размещены две обмотки с числом витков w_1 и w_2 . В местах стыка ярма 1 и стержней сердечника 2, выполненных из электротехнической стали 1512 (приложение 4), имеются воздушные зазоры $\delta = 0,1$ мм. Толщина магнитопровода 20 мм. Определить МДС обмоток, если в каждом из двух стержней магнитопровода магнитная индукция равна 0,9 Тл.

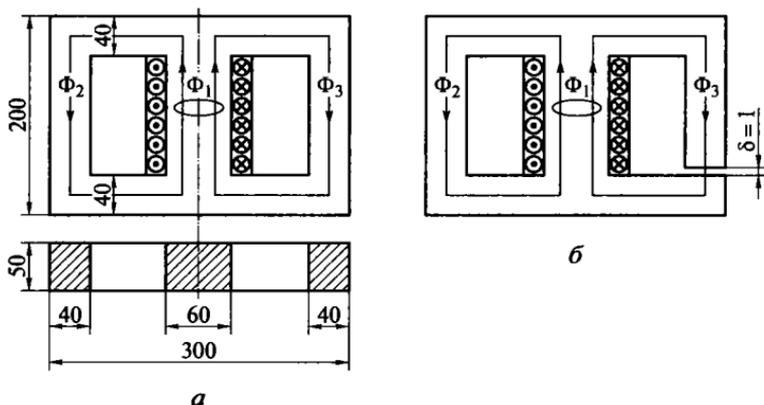


Рис. 8.13. Разветвленные магнитные цепи:

а — симметричная; б — несимметричная

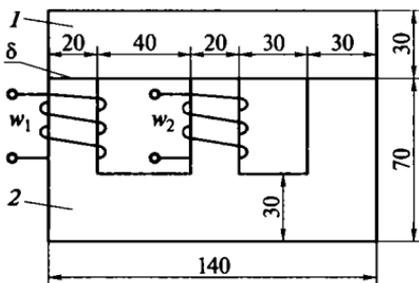


Рис. 8.14. Разветвленная несимметричная магнитная цепь к задаче 8.19:

1 — ярмо; 2 — сердечник

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

- 8.4. 31,4 А; $3,2 \cdot 10^{-4}$ Гн/м; 254; $6,36 \cdot 10^{-3}$ Гн.
 8.5. 0,74 А.
 8.6. 0,5 А; 870.
 8.7. $32 \cdot 10^{-4}$ Вб; $3,74 \cdot 10^5$ 1/Гн.
 8.8. $29,3 \cdot 10^{-4}$ Вб; $2,06 \cdot 10^5$ 1/Гн.
 8.9. 181.
 8.10. 17840.
 8.11. 1,6 А.
 8.12. 0,068 А.
 8.13. $0,3 \cdot 10^{-4}$ Вб.
 8.14. 1224 А.
 8.15. $1,2 \cdot 10^{-4}$ Вб.
 8.16. $24,4 \cdot 10^{-4}$ Вб.
 8.17. 0,51 А.
 8.18. Чтобы сохранить в крайнем правом стержне магнитопровода прежнее значение магнитного потока Φ_3 при создании в магнитопроводе воздушного зазора $\delta = 1$ мм, следует увеличить силу тока в катушке до 4,06 А, т.е. почти в восемь раз.
 8.19. $I_1 w_1 = 294$ А; $I_2 w_2 = 281$ А.

НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

**9.1. Изображение синусоидальных величин.
Волновая и векторная диаграммы**

Задача 9.1. Синусоидальный ток имеет амплитуду $I_m = 5$ А, угловую частоту $\omega = 314$ рад/с и начальную фазу $\psi = 30^\circ$.

Составить уравнение мгновенного значения синусоидального тока. Определить период, частоту и мгновенные значения тока при $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = 30^\circ$ и $\omega t_3 = 60^\circ$. Построить соответствующий полученному уравнению график тока $i(\omega t)$.

Решение. 1. Составление уравнения мгновенного значения синусоидального тока. Синусоидальный ток в общем виде выражается уравнением

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (9.1)$$

Подставив в уравнение (9.1) заданные значения амплитуды, угловой частоты и начальной фазы, получим требуемое уравнение

$$i = 5 \sin(314t + 30^\circ).$$

2. Определение характеристик синусоидального тока.

Период синусоидального тока

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{314} = 0,02 \text{ с};$$

частота (циклическая) синусоидального тока

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ Гц.}$$

Мгновенные значения тока при $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = 30^\circ$, $\omega t_3 = 60^\circ$ найдем по уравнению (9.1):

$$i_1 = 5 \sin 30^\circ = 2,5 \text{ А};$$

$$i_2 = 5 \sin(30^\circ + 30^\circ) = 2,5\sqrt{3} \text{ A};$$

$$i_3 = 5 \sin(60^\circ + 30^\circ) = 5 \text{ A}.$$

3. Построение графика тока $i(\omega t)$. Для построения графика заданного тока $i = 5 \sin(314t + 30^\circ)$ вычислим ряд мгновенных значений тока, соответствующих различным значениям угла ωt в пределах 360° .

Полученные значения тока сведем в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Координаты точек волновой диаграммы за период

ωt	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$i, \text{ A}$	$\frac{I_m}{2}$	$I_m \frac{\sqrt{3}}{2}$	I_m	$I_m \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{I_m}{2}$	0	$-\frac{I_m}{2}$
ωt	210°	240°	270°	300°	330°	360°	—
$i, \text{ A}$	$-I_m \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-I_m$	$-I_m \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{I_m}{2}$	0	$\frac{I_m}{2}$	—

Выбрав масштабы по осям тока i и фазы ωt , в соответствии с табл. 9.1 построим график $i(\omega t)$, называемый *волновой диаграммой* (рис. 9.1). Значения синусоидальной величины через период (соответствующий углу 360°) повторяются, поэтому для получения представления о характере изменения тока достаточно построить один цикл изменения его мгновенных значений за время одного периода.

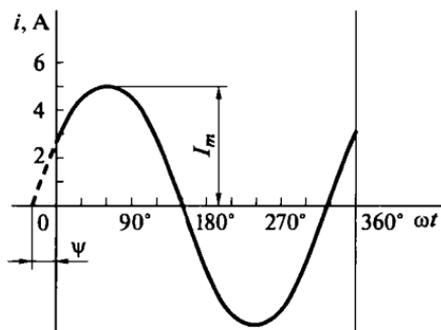


Рис. 9.1. Волновая диаграмма к задаче 9.1

Задача 9.2. В двух последовательно соединенных генераторах переменного тока создаются синусоидальные электродвижущие силы e_1 и e_2 , изменяющиеся с частотой 50 Гц и сдвинутые по фазе относительно друг друга на 60° , причем e_1 опережает e_2 . Амплитуды ЭДС: $E_{1m} = 50 \text{ В}$ и $E_{2m} = 30 \text{ В}$.

Составить уравнения мгновенных значений ЭДС e_1 , e_2 и e (суммарной ЭДС последовательно соединенных генерато-

ров). Построить их волновые и векторные диаграммы. Определить действующие значения ЭДС E_1 , E_2 и E . Объяснить, почему последовательное соединение генераторов переменного тока не применяется на практике.

Решение. 1. Составление уравнений мгновенных значений ЭДС e_1 и e_2 . Синусоидальная ЭДС, возникающая на концах обмотки якоря генератора переменного тока, в общем виде выражается уравнением

$$e = E_m \sin \beta = E_m \sin (\omega t + \psi), \quad (9.2)$$

где E_m — амплитудное значение ЭДС; $\beta = \omega t + \psi$ — текущий электрический угол; $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; ψ — начальная фаза.

По условию задачи ЭДС (e_1 и e_2) изменяются с одинаковой циклической частотой $f = 50$ Гц, а следовательно, с одинаковой угловой частотой

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/с.}$$

Благодаря равенству угловых частот фазовый сдвиг φ между ЭДС e_1 и e_2 с течением времени остается неизменным: $\varphi = \text{const} = 60^\circ$.

Предположим, что в начальный момент времени ($t = 0$) начальная фаза ψ_1 ЭДС e_1 равна 0. Так как ЭДС e_1 опережает e_2 на угол $\varphi = 60^\circ$, то начальная фаза ЭДС e_2

$$\psi_2 = \psi_1 - \varphi = -60^\circ.$$

Таким образом, в соответствии с выражением (9.2) уравнения мгновенных значений ЭДС e_1 и e_2 запишем в виде

$$\begin{aligned} e_1 &= E_{1m} \sin (\omega t + \psi_1) = 50 \sin 314t; \\ e_2 &= E_{2m} \sin (\omega t + \psi_2) = 30 \sin (314t - 60^\circ). \end{aligned} \quad (9.3)$$

2. Построение графиков (волновых диаграмм) синусоидальных ЭДС e_1 и e_2 . Порядок построения следующий:

а) по формулам (9.3) найдем мгновенные значения ЭДС e_1 и e_2 для ряда значений текущего фазового угла ωt в пределах 360° . При этом следует учитывать, что мгновенные значения синусоидальной величины повторяются не только в следующем периоде, но и в пределах одного периода в соответствии с известными тригонометрическими соотношениями $\sin \beta = \sin (\pi - \beta)$, а $-\sin \beta = \sin (\pi + \beta)$. Результаты расчетов ЭДС e_1 и e_2 оформим в виде табл. 9.2;

б) в прямоугольной системе координат выберем масштабы по оси абсцисс (ωt) и оси ординат (ЭДС);

Изменение ЭДС e_1 , e_2 и e при изменении угла ωt в течение одного периода

ωt	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$e_1, \text{В}$	0	25	$25\sqrt{3}$	50	$25\sqrt{3}$	25	0
$e_2, \text{В}$	$7,5\sqrt{3}$	-15	0	15	$7,5\sqrt{3}$	30	$7,5\sqrt{3}$
$e, \text{В}$	$-7,5\sqrt{3}$	10	$25\sqrt{3}$	65	$32,5\sqrt{3}$	55	$7,5\sqrt{3}$
ωt	210°	240°	270°	300°	330°	360°	—
$e_1, \text{В}$	-25	$-25\sqrt{3}$	-50	$-25\sqrt{3}$	-25	0	—
$e_2, \text{В}$	15	0	-15	$-7,5\sqrt{3}$	-30	$-7,5\sqrt{3}$	—
$e, \text{В}$	-10	$-25\sqrt{3}$	-65	$-25\sqrt{3}$	-55	$-7,5\sqrt{3}$	—

в) по данным табл. 9.2 с учетом выбранных масштабов по осям построим графики $e_1(\omega t)$ и $e_2(\omega t)$ (волновые диаграммы) в одной системе координат для удобства их последующего сложения (рис. 9.2, а).

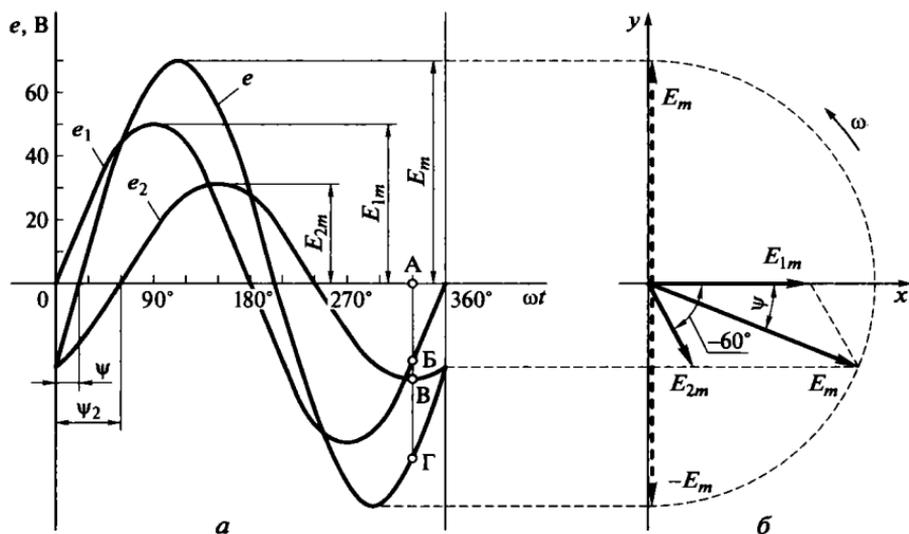


Рис. 9.2. Построение суммарной ЭДС двух генераторов ($e = e_1 + e_2$) с помощью волновых диаграмм (а) и посредством сложения векторов (б)

3. Построение графика (волновой диаграммы) суммарной ЭДС генераторов. При построении графика суммарной ЭДС $e = e_1 + e_2$ будем руководствоваться тем, что ранее изученные законы последовательного соединения справедливы и для переменного тока, но применительно к мгновенным значениям в следующем виде: *в каждый момент времени суммарная ЭДС равна алгебраической сумме (с учетом знака слагаемой ординаты) ЭДС отдельных генераторов.*

Например, построим ординату кривой e (см. рис. 9.2, а) для момента времени, соответствующего абсциссе $\omega t = 330^\circ$ (точка А). Для этого из точки А проведем перпендикуляр до пересечения с кривыми e_1 (точка Б) и e_2 (точка В). Так как ординаты кривых e_1 и e_2 (отрезки $\overline{АБ}$ и $\overline{АВ}$) имеют одинаковый знак, то ордината суммарной кривой e отрезок $\overline{АГ} = \overline{АВ} + \overline{АБ}$, и для его построения достаточно на линии перпендикуляра вниз от точки В отложить отрезок $\overline{ВГ} = \overline{АБ}$.

Выполним аналогичные построения для ряда других значений ωt (от 0 до 360°). Проведя кривую через построенные точки, получим график суммарной ЭДС — кривую e .

4. Построение векторной диаграммы и вектора суммарной ЭДС генераторов. Порядок построения следующий:

а) в прямоугольной системе координат в выбранном масштабе для ЭДС построим векторы синусоидальных ЭДС e_1 и e_2 (векторную диаграмму) с длинами, равными их амплитудным значениям E_{1m} и E_{2m} , под углами начальных фаз ψ_1 и ψ_2 относительно положительного направления оси абсцисс (рис. 9.2, б), отложенными с помощью транспортира;

б) сложим векторы e_1 и e_2 одним из существующих способов сложения векторов, например, по правилу параллелограмма.

Длина результирующего вектора равна амплитуде суммарной ЭДС E_m . Угол ψ между направлением результирующего вектора и положительным направлением оси абсцисс является углом начальной фазы результирующего вектора.

Результирующий вектор вращается с той же угловой скоростью $\omega = 314$ рад/с, что и суммируемые векторы.

5. Составление уравнения мгновенного значения суммарной ЭДС. Известно, что при сложении синусоидально изменяющихся величин результирующая величина также имеет синусоидальный характер и ту же угловую частоту ω . Следовательно, в общем виде уравнение мгновенного значения суммарной ЭДС имеет вид уравнения (9.2): $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Таким образом, для составления уравнения мгновенного значения суммарной синусоидально изменяющей-

ся величины достаточно определить ее амплитуду и начальную фазу.

Выполнить такое сложение математически достаточно сложно, так как нет тригонометрических формул сложения синусоидальных величин с разными амплитудами. Проще, но с определенной степенью точности, обусловленной точностью графических построений, составить уравнение мгновенного значения суммарной синусоидальной величины, используя волновую или векторную диаграмму.

Рассмотрим использование волновой диаграммы для составления уравнения мгновенного значения суммарной ЭДС генераторов (см. рис. 9.2, *a*, кривая *e*). При выбранных по осям координат масштабах (например, $m_e = 20$ В/см и $m_{\omega t} = 60^\circ/\text{см}$) определим длину отрезка \bar{E}_m по оси ординат, соответствующую амплитуде суммарной синусоидальной ЭДС, и длину отрезка $\bar{\psi}$ по оси абсцисс, соответствующую начальной фазе суммарной ЭДС:

$$\bar{E}_m = 3,5 \text{ см}; \quad \bar{\psi} = 0,37 \text{ см}.$$

Найдем амплитуду и начальную фазу суммарной синусоидальной ЭДС:

$$E_m = \bar{E}_m m_e = 3,5 \cdot 20 = 70 \text{ В}; \quad \psi = -\bar{\psi} m_{\omega t} = -0,37 \cdot 60 = -22^\circ.$$

Таким образом, при угловой частоте $\omega = 314$ рад/с уравнение мгновенного значения ЭДС *e* имеет следующий вид:

$$e = 70 \sin(314t - 22^\circ) \text{ В}. \quad (9.4)$$

Теперь рассмотрим использование векторной диаграммы для составления уравнения мгновенного значения суммарной ЭДС генераторов:

а) определим значение ЭДС E_m , для чего измерим на рис. 9.2, *b* длину вектора \bar{E}_m . Масштаб $m_e = 20$ В/см, длина результирующего вектора $\bar{E}_m = 3,5$ см, следовательно,

$$E_m = \bar{E}_m m_e = 3,5 \cdot 20 = 70 \text{ В};$$

б) измерим транспортиром угол начальной фазы результирующего вектора:

$$\psi = -22^\circ;$$

в) составим уравнение мгновенного значения результирующей ЭДС, подставив в выражение (9.2) полученные значения E_m , ψ и ω ,

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi) = 70 \sin(314t - 22^\circ) \text{ В};$$

г) сравним полученный результат с выражением (9.4).

Итак, способы сложения синусоидальных величин с помощью волновой и векторной диаграмм обеспечивают получение одинакового результата — уравнение вида (9.4) для мгновенного значения результирующей ЭДС.

С помощью векторной диаграммы можно не только графически, но и математически точно определить амплитуду и начальную фазу суммарной ЭДС.

Угол начальной фазы ψ в общем виде можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_{1m} \sin \psi_1 + E_{2m} \sin \psi_2}{E_{1m} \cos \psi_1 + E_{2m} \cos \psi_2}.$$

Для любого из косоугольных треугольников на рис. 9.2, б

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{50 \sin 0^\circ + 30 \sin(-60^\circ)}{50 \cos 0^\circ + 30 \cos(-60^\circ)} = -0,399; \quad \psi = -22^\circ.$$

Для определения амплитуды E_m можно использовать известную из тригонометрии теорему косинусов. Для любого из косоугольных треугольников на рис. 9.2, б):

$$\begin{aligned} E_m^2 &= E_{1m}^2 + E_{2m}^2 - 2E_{1m}E_{2m} \cos(180^\circ - \varphi) \\ &= 50^2 + 30^2 - 2 \cdot 50 \cdot 30 \cos 120^\circ = 4900; \quad E_m = 70 \text{ В.} \end{aligned}$$

6. Вычисление действующих значений ЭДС. Действующие значения синусоидально изменяющихся величин в $\sqrt{2}$ раз меньше максимальных, поэтому

$$E_1 = E_{1m} / \sqrt{2} = 50 / \sqrt{2} = 35,4 \text{ В;}$$

$$E_2 = E_{2m} / \sqrt{2} = 30 / \sqrt{2} = 21,2 \text{ В;}$$

$$E = E_m / \sqrt{2} = 70 / \sqrt{2} = 49,5 \text{ В.}$$

Векторные диаграммы принято строить для действующих значений, а не для амплитуд. Это условие в дальнейшем будет соблюдаться. Чтобы векторы отражали действующие значения, достаточно уменьшить их масштаб в $\sqrt{2}$ раз.

7. Поясним, почему последовательное соединение генераторов переменного тока не применяется на практике. Из векторных диаграмм сложения ЭДС (например, на рис. 9.2, б) видно, что амплитуда суммарной ЭДС зависит не только от амплитуд ЭДС отдельных генераторов, но и от фазового сдвига φ между этими ЭДС, определяемого углами их начальных фаз, которые зависят от положения обмоток в момент включения. При отсутствии согласования начальных фаз

обмоток якорей при включении генераторов начальные фазы ЭДС e_1 и e_2 и, следовательно, углы сдвига фаз между ними могут принимать любое значение от 0 до 360° . Это влияет на значение амплитуды суммарной ЭДС, что недопустимо.

Например, при совпадении фаз ($\varphi = 0$) амплитуда суммарной ЭДС

$$E_m = E_{1m} + E_{2m} = 50 + 30 = 80 \text{ В.}$$

При противофазном включении ($\varphi = 180^\circ$)

$$E_m = E_{1m} - E_{2m} = 50 - 30 = 20 \text{ В.}$$

Из-за необходимости согласования фаз для получения приемлемой ЭДС последовательное соединение генераторов переменного тока практически не применяют.

9.2. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью

Задача 9.3. Для определения параметров R и L катушки z электрическую цепь, показанную на рис. 9.3, *а*, включили сначала в сеть постоянного тока, а затем в сеть переменного тока с частотой $f = 50$ Гц. При постоянном токе $I_1 = 4$ А вольтметр по-

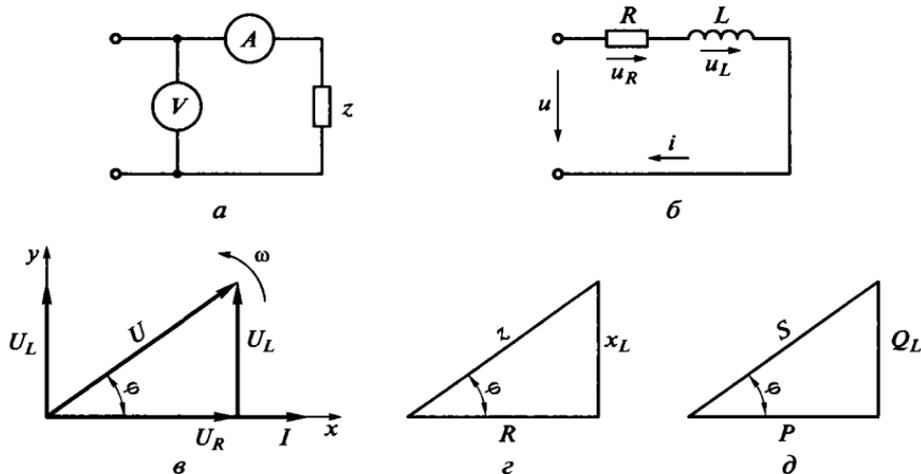


Рис. 9.3. Реальная катушка индуктивности:

а — электрическая цепь к задаче 9.3; *б* — схема замещения с последовательным соединением активного и реактивного элементов; *в* — векторная диаграмма; *г* — треугольник сопротивлений; *д* — треугольник мощностей

казал напряжение $U_1 = 80$ В, а при переменном токе $I_2 = 2$ А — напряжение $U_2 = 50$ В.

Определить активную, реактивную и полную мощности и наибольшую энергию, запасаемую в магнитном поле катушки, при напряжении питания цепи $U = 220$ В и частоте 50 Гц. Построить векторную диаграмму цепи и треугольники напряжений, сопротивлений и мощностей. Определить коэффициент мощности цепи. Пояснить, в чем заключается особенность применения второго закона Кирхгофа при переменном токе.

Решение. 1. Определение параметров катушки. При постоянном токе частота $f = 0$, и индуктивное сопротивление катушки $x_L = 0$. Катушка обладает только активным сопротивлением R , которое определяется по закону Ома:

$$R = U_1/I_1 = 80/4 = 20 \text{ Ом.}$$

При переменном токе катушка обладает полным сопротивлением z , которое определяется по закону Ома в действующих значениях:

$$z = U_2/I_2 = 50/2 = 25 \text{ Ом.}$$

Индуктивное сопротивление катушки

$$x_L = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ Ом.}$$

Индуктивность катушки $x_L = 2\pi fL$, откуда

$$L = \frac{x_L}{2\pi f} = \frac{15}{314} = 47,8 \text{ мГн.}$$

2. Вычисление мощностей и магнитной энергии катушки. Действующее значение тока в цепи при напряжении питания 220 В

$$I = \frac{U}{z} = \frac{220}{25} = 8,8 \text{ А.}$$

Активная и реактивная индуктивная мощности цепи составляют соответственно

$$P = I^2 R = 8,8^2 \cdot 20 = 1548,8 \text{ Вт} = 1,6 \text{ кВт};$$

$$Q_L = I^2 x_L = 8,8^2 \cdot 15 = 1161,6 \text{ вар} = 1,16 \text{ квар.}$$

Полную мощность можно определить по любой из следующих формул:

$$S = I^2 z; \quad S = UI; \quad S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}.$$

Таким образом,

$$S = UI = 220 \cdot 8,8 = 1936 \text{ В} \cdot \text{А} = 1,94 \text{ кВ} \cdot \text{А}.$$

Наибольшую энергию, запасаемую в магнитном поле катушки, можно определить по следующим формулам:

$$W_{L \max} = LI^2; \quad W_{L \max} = \frac{Q_L}{\omega} = \frac{Q_L}{2\pi f}.$$

Таким образом,

$$W_{L \max} = \frac{Q_L}{2\pi f} = \frac{1161,6}{2\pi \cdot 50} = 3,7 \text{ Дж}.$$

3. Построение векторной диаграммы и треугольника напряжений катушки индуктивности. Векторная диаграмма — это совокупность векторов, представляющих собой синусоидальные токи и напряжения цепи и построенных в одной системе координат с учетом углов сдвига фаз относительно друг друга. Длины векторов равны амплитудным или действующим значениям синусоидальных величин с учетом выбранных масштабов по току (m_i) и напряжению (m_u).

Известно, что катушку индуктивности можно представить схемой замещения с последовательным соединением активного и индуктивного элементов (рис. 9.3, б).

Таким образом, векторная диаграмма катушки индуктивности — это совокупность следующих векторов: тока \vec{I} , напряжений \vec{U}_R и \vec{U}_L (на активном и индуктивном элементах соответственно) и общего напряжения \vec{U} .

Действующие значения активной и реактивной составляющих напряжения катушки определяем по закону Ома:

$$U_R = RI = 20 \cdot 8,8 = 176 \text{ В}; \quad U_L = x_L I = 15 \cdot 8,8 = 132 \text{ В}.$$

При построении векторной диаграммы последовательного соединения элементов цепи за основание векторной диаграммы (вектор, относительно которого строятся остальные векторы) целесообразно принять вектор тока, общий для всех элементов цепи. Это позволит однозначно определить взаимное расположение остальных векторов диаграммы. Выберем масштаб по току, например $m_i = 2 \text{ А/см}$, и из начала прямоугольной системы координат (рис. 9.3, б) построим вектор тока, для удобства совместив его с положительным направлением оси абсцисс.

Поскольку мгновенное значение общего напряжения катушки равно сумме мгновенных значений активной и реактивной составляющих:

$$u = u_R + u_L = U_{Rm} \sin \omega t + U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2),$$

то вектор общего напряжения равен геометрической сумме векторов:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L.$$

Выбрав масштаб по напряжению, например $m_u = 55$ В/см, из начала системы координат построим вектор активной составляющей напряжения катушки \bar{U}_R в направлении вектора тока, так как активная составляющая напряжения u_R совпадает по фазе с током. Для сложения векторов \bar{U}_R и \bar{U}_L в том же масштабе m_u из конца вектора \bar{U}_R построим вектор реактивной составляющей \bar{U}_L . Так как реактивная индуктивная составляющая u_L опережает ток на угол $\pi/2$, то \bar{U}_L строится перпендикулярно оси абсцисс в положительном направлении оси ординат. Тогда вектор, построенный из начала координат в конец вектора \bar{U}_L , будет соответствовать вектору общего напряжения \bar{U} . При выбранном масштабе $m_u = 55$ В/см отрезок $\bar{U} = 4$ см, следовательно, общее напряжение

$$U = \bar{U}m_u = 4 \cdot 55 = 220 \text{ В.}$$

Треугольник напряжений катушки индуктивности образуют напряжения U_R , U_L и U (см. рис. 9.3, *в*).

4. Построение треугольников сопротивлений и мощностей заданной цепи. Треугольник сопротивлений (рис. 9.3, *г*) получим, разделив все стороны треугольника напряжений на значение, равное действующему значению тока I в цепи. Стороны полученного подобного треугольника в соответствующем масштабе равны сопротивлениям цепи:

$$R = U_R/I = 176/8,8 = 20 \text{ Ом;}$$

$$x_L = U_L/I = 132/8,8 = 15 \text{ Ом;}$$

$$z = U/I = 220/8,8 = 25 \text{ Ом.}$$

Сопротивления не являются синусоидальными величинами, поэтому изображаются они не векторами, имеющими направления, а скалярными отрезками, которые характеризуются только числовыми значениями их длины.

Треугольник мощностей (рис. 9.3, *д*) получим, умножив все стороны треугольника напряжений на действующее значение тока I в цепи. Стороны полученного подобного треугольника в соответствующем масштабе равны мощностям цепи, которые (как и сопротивления) — не векторные величины, а скалярные:

$$P = U_R I = 176 \cdot 8,8 = 1,6 \text{ кВт; } Q_L = U_L I = 132 \cdot 8,8 = 1,16 \text{ вар;}$$

$$S = UI = 220 \cdot 8,8 = 1,94 \text{ кВ} \cdot \text{А.}$$

5. Определение коэффициента мощности заданной цепи. Коэффициент мощности цепи ($\cos \varphi$) можно определить из любого полученного треугольника — напряжений, сопротивлений или мощностей (см. рис. 9.3, *в...д*):

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{z} = \frac{P}{S}.$$

Например, для заданной цепи

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{176}{220} = 0,8.$$

6. Особенность применения второго закона Кирхгофа при переменном токе. В цепях переменного тока законы Кирхгофа справедливы только для мгновенных значений или в векторной форме.

Например, общее напряжение последовательного соединения элементов R и L можно выразить либо уравнением

$$u = u_R + u_L = U_{Rm} \sin \omega t + U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2),$$

либо в векторной форме

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L,$$

т.е. вектор общего напряжения \bar{U} равен геометрической сумме векторов напряжений элементов.

При этом действующее значение общего напряжения последовательного соединения $U \neq U_R + U_L$, так как гипотенуза прямоугольного треугольника не равна сумме катетов, т.е. справедливо выражение

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} < U_R + U_L.$$

9.3. Общий случай неразветвленной RLC-цепи

Задача 9.4. Электрическая цепь, схема замещения которой представлена на рис. 9.4, *а*, включена в сеть переменного тока с частотой 50 Гц и напряжением $U = 214$ В. Известны сопротивления участков цепи: $R_1 = 30$ Ом; $R_2 = 60$ Ом; $R_3 = 40$ Ом; $x_{L1} = 100$ Ом; $x_{L2} = 70$ Ом; $x_{C1} = 70$ Ом; $x_{C2} = 30$ Ом.

Построить топографическую диаграмму заданной цепи. Определить: ток I в цепи; индуктивности (L_1, L_2) и емкости (C_1, C_2); напряжения $U_{12}, U_{23}, U_{45}, U_{36}$ на отдельных участках цепи;

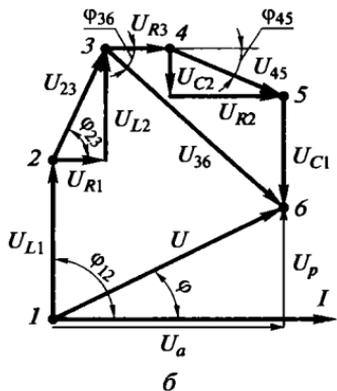
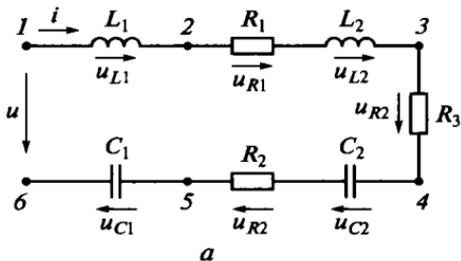


Рис. 9.4. Неразветвленная RLC-цепь:

a — схема замещения; *б* — векторная диаграмма цепи

активную, реактивную и полную мощности цепи; углы сдвига фаз между напряжениями u , u_{23} , u_{45} , u_{36} и током i в цепи. Составить уравнения мгновенных значений тока i и напряжений u , u_{12} , u_{23} , u_{45} , u_{36} , если начальная фаза тока $\psi_i = 0$.

Решение. 1. Построение топографической диаграммы заданной цепи. На рис. 9.4, *a* точки соединения элементов цепи (катушек индуктивности, резистора и конденсаторов) $1 \dots 6$ обозначены в соответствии с их чередованием на схеме. Известно, что топографическая диаграмма — это векторная диаграмма, построенная в соответствии с чередованием элементов цепи. Тогда точки соединения векторов друг с другом соответствуют точкам соединения элементов цепи, и каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка на векторной диаграмме. Если известны напряжения на всех участках схемы замещения цепи и все векторы напряжений построены на диаграмме в выбранном масштабе, то напряжение между любыми точками цепи определяется как длина вектора между соответствующими точками векторной диаграммы, умноженная на масштаб напряжения.

На рис. 9.4, *б* представлен общий вид топографической диаграммы заданной цепи, в которой за основание взят вектор тока, для большей наглядности направленный в положительном направлении оси абсцисс. Так как вектор общего напряжения равен геометрической сумме векторов напряжений на отдельных участках схемы, то из начала системы координат (точки 1) строится первый вектор (напряжение u_{L1}), из его конца (точки 2) строится следующий вектор и т. д., пока не будет построен последний вектор. При этом напряжения на участках, имеющих индуктивный характер, опережают ток на 90° ; напряжение на участках, имеющих

активный характер, совпадают с током; на участках с емкостным характером отстают от тока на 90° .

Вектор, проведенный из начала координат (точки I) в конец последнего вектора (в точку b), соответствует общему напряжению u .

2. Определение тока I в цепи. Расчет выполним в следующем порядке (см. рис. 9.4, a):

а) активное сопротивление цепи

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 30 + 60 + 40 = 130 \text{ Ом};$$

б) реактивное сопротивление цепи

$$x = x_{L1} + x_{L2} - x_{C1} - x_{C2} = 100 + 70 - 70 - 30 = 70 \text{ Ом};$$

в) общее сопротивление цепи

$$z = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{130^2 + 70^2} = 147,65 \text{ Ом};$$

г) ток в цепи

$$I = U/z = 214/147,65 = 1,45 \text{ А.}$$

3. Определение индуктивностей и емкостей заданной цепи. Расчет выполним, используя заданные значения реактивных сопротивлений:

$$L_1 = \frac{x_{L1}}{2\pi f} = \frac{100}{2\pi \cdot 50} = 0,318 \text{ Гн} = 318 \text{ мГн};$$

$$L_2 = \frac{x_{L2}}{2\pi f} = \frac{70}{2\pi \cdot 50} = 0,223 \text{ Гн} = 223 \text{ мГн};$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi f x_{C1}} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 70} = 45,5 \text{ мкФ};$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi f x_{C2}} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 30} = 106,1 \text{ мкФ.}$$

4. Определение напряжений на участках цепи. Расчет выполним на основании закона Ома

а) напряжение на участке 1—2

$$U_{12} = I z_{12} = U_{L1} = I x_{L1} = 1,45 \cdot 100 = 145 \text{ В};$$

б) общее сопротивление участка 2—3

$$z_{23} = \sqrt{R_1^2 + x_{L2}^2} = \sqrt{30^2 + 70^2} = 76,16 \text{ Ом},$$

а напряжение на этом участке

$$U_{23} = I z_{23} = 1,45 \cdot 76,16 = 110 \text{ В};$$

в) общее сопротивление участка 4—5

$$z_{45} = \sqrt{R_2^2 + x_{C2}^2} = \sqrt{60^2 + 30^2} = 67,08 \text{ Ом},$$

а напряжение на этом участке

$$U_{45} = I z_{45} = 1,45 \cdot 67,08 = 97 \text{ В};$$

г) общее сопротивление участка 3—6

$$\begin{aligned} z_{36} &= \sqrt{R_{36}^2 + x_{36}^2} = \sqrt{(R_2 + R_3)^2 + (x_{C1} + x_{C2})^2} = \\ &= \sqrt{(60 + 40)^2 + (70 + 30)^2} = 141,42 \text{ Ом}, \end{aligned}$$

а напряжение на этом участке

$$U_{36} = I z_{36} = 1,45 \cdot 141,42 = 205 \text{ В}.$$

5. Определение мощностей цепи. Активная мощность цепи

$$P = I^2 R = 1,45^2 \cdot 130 = 273 \text{ Вт};$$

реактивная мощность цепи

$$Q = I^2 x = 1,45^2 \cdot 70 = 147 \text{ вар};$$

полная мощность цепи

$$S = UI = 214 \cdot 1,45 = 310 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

6. Определение углов сдвига фаз между напряжениями u , u_{23} , u_{45} , u_{36} и током i в цепи. Углы сдвига фаз, соответствующие напряжениям u , u_{23} , u_{45} , u_{36} , следующие:

$$\varphi = \arctg(x/R) = \arctg(70/130) = \arctg 0,54 = 28^\circ 18';$$

$$\varphi_{23} = \arctg(x_{L2}/R_1) = \arctg(70/30) = \arctg 2,33 = 66^\circ 48';$$

$$\varphi_{45} = \arctg(x_{C2}/R_2) = \arctg(30/60) = \arctg 0,5 = 26^\circ 36';$$

$$\varphi_{36} = \arctg((x_{C1} + x_{C2})/(R_2 + R_3)) = \arctg(100/100) = \arctg 1 = 45^\circ.$$

7. Уравнения тока и напряжений в цепи при $\psi_i = 0$. Составим уравнения мгновенных значений тока и напряжений при $\psi_i = 0$:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I\sqrt{2} \sin(2\pi f t + \psi_i) = 1,45\sqrt{2} \sin 314t;$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_i + \varphi) = 214\sqrt{2} \sin(314t + 28^\circ 18');$$

$$u_{12} = U_{12m} \sin(\omega t + \psi_i + \varphi_{12}) = 145\sqrt{2} \sin(314t + 90^\circ);$$

$$u_{23} = U_{23m} \sin(\omega t + \psi_i + \varphi_{23}) = 110\sqrt{2} \sin(314t + 66^\circ 48');$$

$$u_{45} = U_{45m} \sin(\omega t + \psi_i - \varphi_{45}) = 97\sqrt{2} \sin(314t - 26^\circ 36');$$

$$u_{36} = U_{36m} \sin(\omega t + \psi_i - \varphi_{36}) = 205\sqrt{2} \sin(314t - 45^\circ).$$

9.4. Задачи для самостоятельного решения

9.5. Определить, чему равны период и угловая частота синусоидального тока при частоте 50 Гц.

9.6. Пояснить, может ли одна и та же начальная фаза синусоидальной величины иметь и положительное, и отрицательное значение.

9.7. Найти временной сдвиг двух синусоидальных токов, изменяющихся с частотой 50 Гц, если ему соответствует фазовый сдвиг в 90° .

9.8. Построить векторные диаграммы синусоидальных ЭДС

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$$

для следующих вариантов их расположения относительно положительного направления оси абсцисс в начальный момент времени при неизменном в обоих вариантах сдвиге фаз между ними:

а) при $t = 0$ фаза $\psi_1 = 30^\circ$, а фаза $\psi_2 = -60^\circ$;

б) при $t = 0$ ЭДС $e_2(0) = 0$.

Составить уравнения мгновенных значений для обоих вариантов.

9.9. Написать уравнения трех токов, векторная диаграмма которых изображена на рис. 9.5, а, и суммы этих токов, если частота токов $f = 50$ Гц, $I_{1m} = I_{2m} = I_{3m} = 5$ А.

9.10. Написать уравнения трех синусоидальных напряжений, представленных на векторной диаграмме, изображенной на рис. 9.5, б, при частоте $f = 50$ Гц.

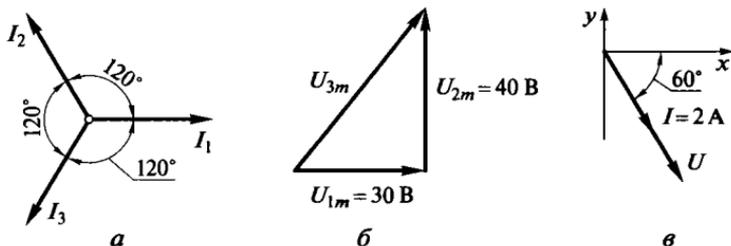


Рис. 9.5. Векторные диаграммы:

а — к задаче 9.9; б — к задаче 9.10; в — к задаче 9.12

9.11. Два тока заданы следующими уравнениями:

$$i_1 = 2 \sin(\omega t + 90^\circ); \quad i_2 = 3 \sin(\omega t + 30^\circ).$$

Составить уравнения мгновенных значений токов $i_3 = i_1 + i_2$, $i_4 = i_1 - i_2$ и $i_5 = i_2 - i_1$.

9.12. Активное сопротивление цепи переменного тока равно 100 Ом, частота сети 50 Гц. Векторная диаграмма цепи показана на рис. 9.5, в. Написать уравнения тока и напряжения и определить активную мощность этой цепи.

9.13. Нагревательный прибор мощностью 1 кВт включен в сеть переменного тока с напряжением $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + \pi/2)$. Написать уравнение тока, протекающего в этой цепи. Найти сопротивление цепи и действующее значение тока.

9.14. Построить в масштабе графики тока, напряжения и активной мощности в одной системе координат и векторную диаграмму для цепи из задачи 9.13. Определить по условию этой задачи мгновенные значения мощности в следующие моменты времени: $t_1 = 0$, $t_2 = 0,005$ с, $t_3 = 0,01$ с, $t_4 = 0,0175$ с.

9.15. Катушка с индуктивностью $L = 17$ мГн и малым активным сопротивлением, величиной которого можно пренебречь, включена в сеть переменного тока. Напряжение сети $U = 22$ В поддерживается постоянным. Составить таблицу расчета индуктивного сопротивления катушки x_L , силы тока I в цепи, реактивной мощности Q_L , а также максимальной энергии $W_{L \max}$, запасаемой в магнитном поле катушки, при частотах 0, 25, 50 и 75 Гц. Описать характер изменения указанных величин при изменении частоты f от 0 до 75 Гц.

9.16. Катушка индуктивности включена в сеть с напряжением $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ)$. Определить активную и реактивную составляющие заданного напряжения и параметры катушки R и L , если сила тока в цепи $I = 5$ А.

9.17. При включении катушки индуктивности в цепь постоянного тока вольтметр показал напряжение $U_1 = 12$ В при силе тока $I_1 = 4$ А. При работе этой катушки на переменном токе с частотой $f = 50$ Гц при силе тока $I_2 = 5$ А вольтметр показал напряжение $U_2 = 25$ В. Определить активное сопротивление, индуктивность, активную, реактивную, полную мощности и коэффициент мощности катушки при работе на переменном токе.

9.18. Электрический двигатель включается в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц через последовательно включенный гасящий резистор R . Этот же двигатель включается непосредственно, без гасящего резистора, в сеть переменного тока с напряжением $U_2 = 127$ В и той же частоте 50 Гц. При этом активная мощность двигателя $P_d = 10$ Вт,

а $\cos \varphi_d = 0,9$. Найти параметры элементов цепи (сопротивление R гасящего резистора, активное сопротивление R_d и индуктивность L_d обмотки двигателя), а также ток в цепи и напряжения на ее участках (резисторе и двигателе), если ток двигателя одинаковый в обоих случаях. Определить активную мощность и коэффициент мощности всей цепи при напряжении сети $U_1 = 220$ В.

9.19. Определить, будет ли гореть осветительная лампа, присоединенная к источнику постоянного напряжения через конденсатор.

9.20. Для контроля исправности сети ($U = 220$ В, $f = 50$ Гц) к ней присоединили через конденсатор C осветительную лампу, рассчитанную на напряжение 70 В и мощность 50 Вт. Определить, при каких значениях емкости и напряжения на конденсаторе обеспечивается номинальный режим горения лампы и каким эквивалентным активным сопротивлением можно заменить емкость.

9.21. Определить, как изменится (возрастет или уменьшится) напряжение U_2 в цепи, показанной на рис. 9.6, а, при увеличении частоты f синусоидального напряжения u_1 и пояснить назначение переменного сопротивления R_2 в цепи.

9.22. Определить, как изменятся (увеличатся или уменьшатся) показания приборов в цепи, показанной на рис. 9.6, б, в следующих случаях:

- короткое замыкание сопротивления R ;
- пробой (короткое замыкание пластин) конденсатора C_2 ;
- увеличение частоты напряжения источника питания.

Потреблением мощности измерительными приборами пренебречь.

9.23. Построить векторную диаграмму цепи, показанной на рис. 9.4, если за ее основание принят вектор \vec{U}_{C1} . Определить, чему в этом случае равна начальная фаза общего напряжения ψ_U .

9.24. К источнику питания с $U = 220$ В, $f = 50$ Гц подключена цепь из последовательно включенной катушки индуктивности, активное сопротивление которой $R = 100$ Ом, а индуктивность

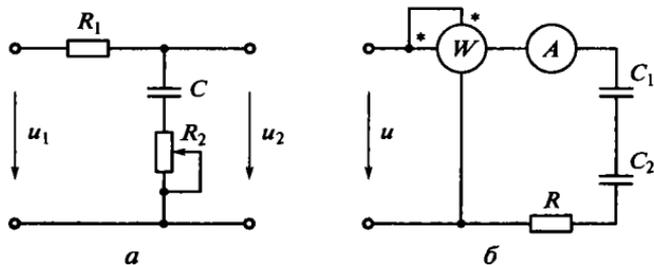


Рис. 9.6. Схемы электрических цепей к задаче 9.21 (а) и к задаче 9.22 (б)

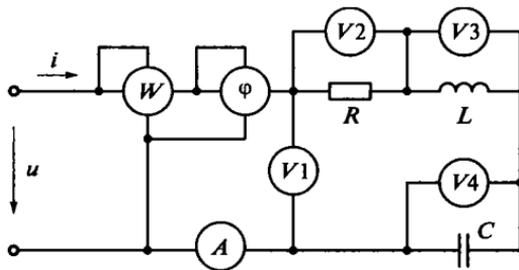


Рис. 9.7. Схема неразветвленной RLC -цепи с подключенными электроизмерительными приборами

$L = 70$ мГн, и конденсатора с емкостью $C = 150$ мкФ. Определить ток в цепи, напряжения на элементах, активную, реактивную и полную мощности, а также коэффициент мощности цепи.

9.25. На выводах участка цепи, состоящего из активного сопротивления, индуктивности и емкости, соединенных последовательно, напряжение $U = 50$ В. Ток в цепи $I = 2$ А, частота питающей сети $f = 400$ Гц, а напряжение на емкости $U_C = 70$ В. Определить активное сопротивление, емкость и два возможных значения индуктивности цепи, если коэффициент мощности $\cos \varphi = 0,7$.

9.26. В цепи, представленной на рис. 9.7, амперметр A и вольтметры $V_2 \dots V_4$ показывают следующие значения: $I = 0,5$ А; $U_2 = 45$ В; $U_3 = 120$ В; $U_4 = 60$ В. Определить показание вольтметра V_1 (напряжение U_1) и параметры цепи, если угловая частота напряжения питания $\omega = 1000$ рад/с.

9.27. В цепи, представленной на рис. 9.7, известны показания вольтметров: $V_1 - 200$ В; $V_3 - 60$ В; $V_4 - 220$ В. Определить показания вольтметра V_2 и фазометра.

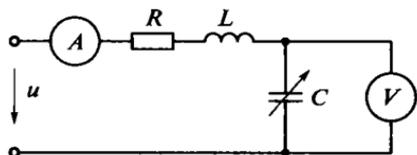
9.28. В последовательной цепи, показанной на рис. 9.7, установили резонанс, изменяя индуктивность. Указать, какие приборы, включенные в цепь, позволят зафиксировать режим резонанса.

9.29. Определить, в каком соотношении должны находиться сопротивления цепи на рис. 9.7, чтобы напряжения на всех ее элементах оказались одинаковыми.

9.30. Определить условие, при котором в последовательной RLC -цепи напряжения на индуктивности и емкости в 2 раза больше напряжения на выводах цепи.

9.31. Амперметр в цепи, представленной на рис. 9.7, показывает 0,2 А. Показания вольтметров $V_2 \dots V_4$ при этом соответственно 220, 170 и 170 В. Определить параметры цепи и показания вольтметра V_1 , ваттметра W и фазометра φ , если частота напряжения питания $f = 50$ Гц.

Рис. 9.8. Схема неразветвленной RLC -цепи с переменной емкостью



9.32. Для определения параметров катушки индуктивности последовательно с ней включили идеальный регулируемый конденсатор. Полученную цепь (рис. 9.8) включили в сеть с напряжением 10 В и частотой 50 Гц. Изменяя емкость, при $C = 4$ мкФ добились резонанса напряжений, фиксируя его по максимальному показанию амперметра. При этом напряжение на конденсаторе оказалось равным 150 В. Определить параметры катушки (R и L), резонансный ток и добротность контура.

9.33. В неразветвленной RLC -цепи катушка индуктивности ($L = 30$ мкГн, $R = 10$ Ом) и конденсатор ($C = 3000$ пФ), потерями энергии в котором пренебрегаем, питаются от генератора с синусоидальным напряжением $U = 5,3$ В, частота которого изменяется от 200 до 700 кГц. Определить резонансные значения частоты, тока, напряжений на конденсаторе и катушке, а также отношение напряжений на конденсаторе и источнике питания, т. е. коэффициент усиления напряжения k_U или добротность контура Q .

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

9.5. 0,02 с; 314 рад/с.

9.6. Может; например, начальная фаза 60° может быть представлена углом -300° .

9.7. 5 мс.

9.8. а) векторная диаграмма показана на рис. 9.9, а; уравнения мгновенных значений: $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + 30^\circ)$, $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t - 60^\circ)$;

б) возможны два случая: векторная диаграмма показана на рис. 9.9, б; уравнения мгновенных значений: $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + 90^\circ)$, $e_2 = E_{2m} \sin \omega t$;

векторная диаграмма показана на рис. 9.9, в; уравнения мгновенных значений: $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t - 90^\circ)$, $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t \pm 180^\circ)$.

9.9. $i_1 = 5 \sin 314t$; $i_2 = 5 \sin(314t + 120^\circ)$; $i_3 = 5 \sin(314t - 120^\circ)$; $i = i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

9.10. $u_1 = 30 \sin 314t$; $u_2 = 40 \sin(314t + 90^\circ)$; $u_3 = 50 \sin(314t + 53^\circ)$.

9.11. $i_3 = 4,4 \sin(\omega t + 53^\circ)$; $i_4 = 2,6 \sin(\omega t + 169^\circ)$; $i_5 = 2,6 \sin(\omega t - 11^\circ)$.

9.12. $i = 2,82 \sin(314t - 60^\circ)$; $u = 282 \sin(314t - 60^\circ)$; 400 Вт.

9.13. $i = 4,55\sqrt{2} \sin(314t + \pi/2)$; $R = 48,35$ Ом; 4,55 А.

9.14. Рис. 9.10, а, б; 2 кВт; 0; 2 кВт; 1 кВт.

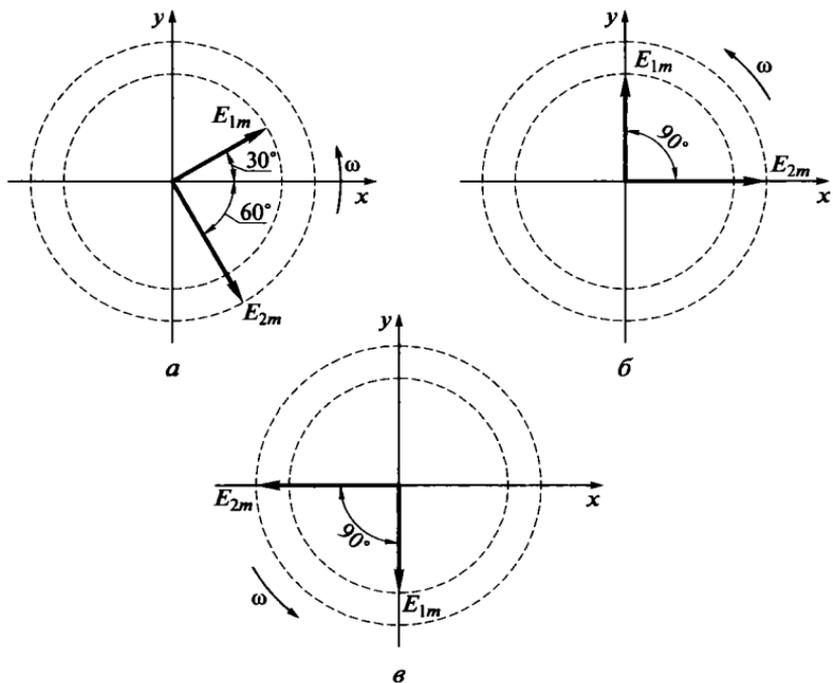


Рис. 9.9. Варианты (а...в) векторных диаграмм к задаче 9.8

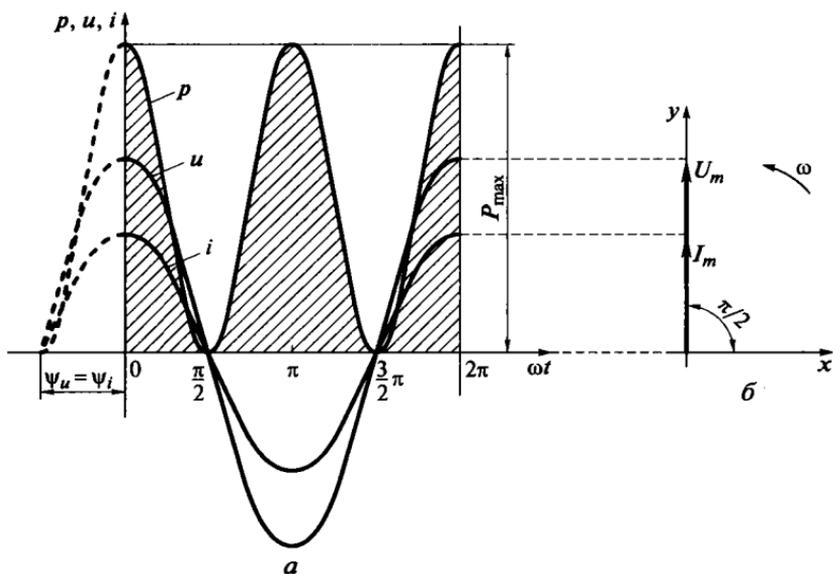


Рис. 9.10. Волновая (а) и векторная (б) диаграммы к задаче 9.14

9.15. Таблица расчета следующая:

f , Гц	0	25	50	75
x_L , Ом	0	2,67	5,34	8,00
I , А	∞	8,24	4,12	2,75
Q_L , вар	∞	181,28	90,64	60,50
$W_{L \max}$, Дж	∞	1,15	0,29	0,13

С возрастанием частоты f величина x_L увеличивается прямо пропорционально частоте, а величины I , Q_L и $W_{L \max}$ уменьшаются по гиперболическому закону.

9.16. 190,5 В; 110 В; 38,1 Ом; 70 мГн.

9.17. 3 Ом; 12,75 мГн; 75 Вт; 100 вар; 125 В·А; 0,6.

9.18. $R = 1127$ Ом; $R_d = 1306$ Ом; $L_d = 2$ Гн; $I = 87,5$ мА; $U_R = 98,6$ В; $U_d = 127$ В; $P = 18,6$ Вт; $\cos \varphi = 0,97$.

9.19. Нет, так как при частоте $f = 0$ сопротивление $x_C = 1/(2\pi fC) = \infty$ (обрыв цепи).

9.20. 11 мкФ; 209 В; 210 Ом.

9.21. Уменьшится; сопротивление R_2 служит для регулировки напряжения U_2 при изменении частоты напряжения u_1 .

9.22. а) показание ваттметра уменьшится до нуля, показание амперметра увеличится; б) и в) показания обоих приборов увеличатся.

9.23. Рис. 9.11; угол $\psi_U = 90^\circ + \varphi$, где φ — угол сдвига фаз между векторами \vec{U} и \vec{I} ; $\varphi = \arctg((x_{L1} + x_{L2} - x_{C1} - x_{C2})/(R_1 + R_2 + R_3))$.

9.24. 2,2 А; 220 В; 48,4 В; 46,7 В; 484 Вт; 3,7 вар; 484 В·А; 1.

9.25. 17,5 Ом; 11,4 мкФ; 21 мГн; 6,8 мГн.

9.26. 75 В; 90 Ом; 0,24 Гн; 8,33 мкФ.

9.27. 120 В; $-53^\circ 8'$.

9.28. Режим резонанса зафиксирует амперметр и ваттметр (максимальные показания), а также фазометр (нулевое показание).

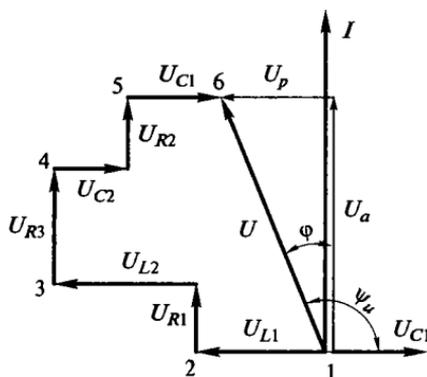


Рис. 9.11. Векторная диаграмма к задаче 9.23

9.29. При $R = x_L = x_C$ напряжения на участках цепи одинаковы и равны напряжению сети: $U_2 = U_3 = U_4 = U_1$, т. е. $I_p R = I_p x_L = I_p x_C = U_1$, где I_p — значение тока в режиме резонанса.

9.30. $x_L = x_C = 2R$.

9.31. 1,1 кОм; 2,7 Гн; 3,74 мкФ; 220 В; 44 Вт; 0.

9.32. 53,1 Ом; 2,54 Гн; 0,188 А; 15.

9.33. 530,5 кГц; 0,53 А; 53 В; 53,3 В; 10.

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

10.1. Общий случай разветвленной RLC-цепи

Задача 10.1. Для электрической цепи, представленной на рис. 10.1, а, определить токи, мощности и построить векторную диаграмму. Напряжение сети $u = 311 \sin 314 t$. Параметры цепи: $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 170 \text{ Ом}$, $R_3 = 500 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,5 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 250 \text{ мкФ}$.

Составить уравнения мгновенных значений токов цепи. Определить полное ее сопротивление и коэффициент мощности. Рассчитать параметры эквивалентной неразветвленной цепи, которой можно заменить заданную цепь.

Решение. 1. Определение токов в ветвях цепи. Найдем реактивные сопротивления ветвей:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 0,5 = 157 \text{ Ом};$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \text{ Ом};$$

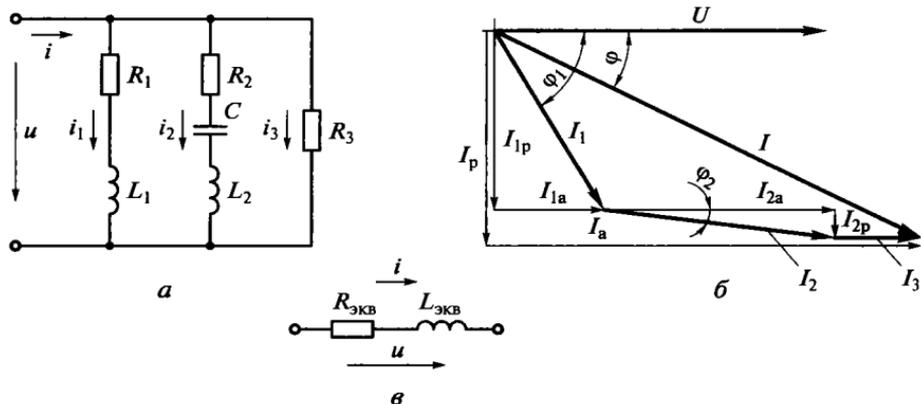


Рис. 10.1. Электрическая схема разветвленной RLC-цепи переменного тока (а), ее векторная диаграмма (б) и схема эквивалентной неразветвленной цепи (в)

$$x_C = 1/(\omega C) = 1/314/250 \cdot 10^6 = 12,739 \text{ Ом.}$$

Определим полные сопротивления ветвей:

$$z_1 = \sqrt{R_1^2 + x_{L1}^2} = \sqrt{100^2 + 157^2} = 186,142 \text{ Ом;}$$

$$z_2 = \sqrt{R_2^2 + (x_{L2} - x_C)^2} = \sqrt{170^2 + (31,4 - 12,739)^2} = 171,021 \text{ Ом.}$$

Действующее значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 219,91 \text{ В.}$$

Определим действующие значения токов в ветвях цепи в соответствии с законом Ома

$$I_1 = \frac{U}{z_1} = \frac{219,91}{186,142} = 1,181 \text{ А;}$$

$$I_2 = \frac{U}{z_2} = \frac{219,91}{171,021} = 1,286 \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{219,91}{500} = 0,44 \text{ А.}$$

2. Определение общего тока цепи. Найдем активные проводимости ветвей:

$$g_1 = \frac{R_1}{z_1^2} = \frac{100}{186,142^2} = 0,0029 \text{ См;}$$

$$g_2 = \frac{R_2}{z_2^2} = \frac{170}{171,021^2} = 0,0058 \text{ См;}$$

$$g_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{500} = 0,002 \text{ См.}$$

Общая активная проводимость цепи

$$g = g_1 + g_2 + g_3 = 0,0029 + 0,0058 + 0,002 = 0,0107 \text{ См.}$$

Определим реактивные проводимости ветвей:

$$b_{L1} = \frac{x_{L1}}{z_1^2} = \frac{157}{186,142^2} = 0,0045 \text{ См;}$$

$$b_{L2} = \frac{x_{L2}}{z_2^2} = \frac{31,4}{171,021^2} = 0,0011 \text{ См;}$$

$$b_C = \frac{x_C}{z_2^2} = \frac{12,739}{171,021^2} = 0,0004 \text{ См.}$$

Общая индуктивная проводимость цепи

$$b_L = b_{L1} + b_{L2} = 0,0045 + 0,0011 = 0,0056 \text{ См.}$$

Общая реактивная проводимость цепи

$$b = b_L - b_C = 0,0056 - 0,0004 = 0,0052 \text{ См.}$$

Полная проводимость цепи

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{0,0107^2 + 0,0052^2} = 0,0119 \text{ См.}$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = Uy = 219,91 \cdot 0,0119 = 2,613 \text{ А.}$$

3. Определение активной (P), реактивной (Q) и полной (S) мощностей цепи. По вычисленным значениям напряжения U и проводимостей (g , b , y) найдем мощности:

$$P = U^2g = 219,91^2 \cdot 0,0107 = 517 \text{ Вт;}$$

$$Q = U^2b = 219,91^2 \cdot 0,0052 = 250 \text{ вар;}$$

$$S = U^2y = 219,91^2 \cdot 0,0119 = 575 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

4. Построение векторной диаграммы цепи. Заданная на рис. 10.1, *a* цепь представляет собой параллельное соединение нескольких ветвей с общим для всех ветвей напряжением на их концах (напряжением на входе), равным напряжению сети. С этой общей величины, приняв ее за основание, и целесообразно начинать построение векторной диаграммы (рис. 10.1, *б*). Так как по условию задачи начальная фаза напряжения сети $\psi_U = 0$, то вектор напряжения \vec{U} отложим в выбранном масштабе в положительном направлении оси абсцисс.

Вектор тока \vec{I}_1 отстает от вектора напряжения \vec{U} на угол φ_1 , поскольку левая ветвь имеет активно-индуктивный характер. Средняя ветвь имеет тот же характер, и следовательно, вектор \vec{I}_2 также отстает от напряжения \vec{U} на угол φ_2 . Правая ветвь имеет активный характер, и вектор \vec{I}_3 совпадает по фазе с вектором \vec{U} . Угол сдвига фаз $\varphi_3 = 0$. Так как общая индуктивная проводимость цепи больше емкостной проводимости ($b_L = b_{L1} + b_{L2} > b_C$), вся заданная цепь также имеет активно-индуктивный характер, и вектор общего тока \vec{I} отстает от вектора \vec{U} на угол φ .

Углы сдвига фаз между напряжением на входе \vec{U} и токами цепи $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3, \vec{I}$ соответственно равны:

$$\varphi_1 = \text{arctg} \frac{b_{L1}}{g_1} = \text{arctg} \frac{0,0045}{0,0029} = \text{arctg} 1,57 = 57^\circ 30';$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{b_{L2} - b_C}{g_2} = \arctg \frac{0,0011 - 0,0004}{0,0058} = \arctg 0,12 = 6^\circ 18'; \quad \varphi_3 = 0;$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{g} = \arctg \frac{0,0052}{0,0107} = \arctg 0,483 = 25^\circ 48'.$$

Выберем масштаб по току и построим векторы токов под углами сдвига фаз относительно вектора напряжения, откладывая углы φ_1 , φ_2 и φ в направлении движения часовой стрелки, так как векторы токов I_1 и I_2 отстают от вектора напряжения U .

Сложив геометрически (например, по правилу многоугольника, как показано на рис. 10.1, б) векторы токов, построенные в выбранном масштабе, можно убедиться в справедливости первого закона Кирхгофа в векторной форме:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}.$$

Построенная совокупность векторов и представляет собой векторную диаграмму цепи. Составляющие соответствующих токов — активные I_a , I_{1a} , I_{2a} (совпадающие по направлению с вектором напряжения) и реактивные I_p , I_{1p} , I_{2p} (направленные под углом 90° к вектору напряжения), определяемые как произведение напряжения U на соответствующую проводимость (например, $I_{1a} = Ug_1$; $I_{1p} = Ub_{L1}$ и т. д.), можно использовать для построения векторов токов.

5. Составление уравнений мгновенных значений токов. Для составления уравнения мгновенного значения синусоидальной величины необходимо знать ее амплитуду, угловую частоту и начальную фазу.

Найдем амплитуды токов цепи:

$$I_{1m} = \sqrt{2}I_1 = \sqrt{2} \cdot 1,181 = 1,671 \text{ A};$$

$$I_{2m} = \sqrt{2}I_2 = \sqrt{2} \cdot 1,286 = 1,818 \text{ A};$$

$$I_{3m} = \sqrt{2}I_3 = \sqrt{2} \cdot 0,44 = 0,622 \text{ A};$$

$$I = \sqrt{2}I = \sqrt{2} \cdot 2,613 = 3,7 \text{ A}.$$

Угловая частота токов цепи равна угловой частоте напряжения сети: $\omega = 314 \text{ рад/с}$.

Определим начальные фазы токов цепи:

$$\psi_{I1} = \psi_U - \varphi_1 = 0 - 57,5^\circ = -57^\circ 30';$$

$$\psi_{I2} = \psi_U - \varphi_2 = 0 - 6^\circ 18' = -6^\circ 18';$$

$$\psi_{I3} = \psi_U - \varphi_3 = 0;$$

$$\psi_I = \psi_U - \varphi = 0 - 25^\circ 48' = -25^\circ 48'.$$

Запишем уравнения мгновенных значений токов цепи:

$$i_1 = I_{1m} \sin(314t + \psi_{I1}) = 1,67 \sin(314t - 57^\circ 30');$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(314t + \psi_{I2}) = 1,82 \sin(314t - 6^\circ 18');$$

$$i_3 = I_{3m} \sin(314t + \psi_{I3}) = 0,622 \sin 314t;$$

$$i = I_m \sin(314t + \psi_I) = 3,7 \sin(314t - 25^\circ 48').$$

6. Определение полного сопротивления и коэффициента мощности цепи. Найдем указанные величины следующим образом:

$$z = \frac{1}{y} = \frac{1}{0,0119} = 84,2 \text{ Ом};$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{517}{575} = 0,9.$$

Коэффициент мощности близок к единице. Это означает, что почти вся мощность цепи необратимо преобразуется в другой вид энергии, например в теплоту.

7. Определение параметров эквивалентной неразветвленной цепи. Заданная цепь эквивалентна такой неразветвленной цепи, у которой при одинаковом напряжении сети потребляемые цепями мощности одинаковые. При этом из равенства полных мощностей S следует равенство общих токов I цепей и их полных сопротивлений z .

Из равенства активных мощностей $P = U^2 g = I^2 R_{\text{эКВ}}$ следует, что активное сопротивление эквивалентной неразветвленной цепи

$$R_{\text{эКВ}} = U^2 g / I^2 = g z^2 = 0,0107 \cdot 84,2^2 = 75,8 \text{ Ом}.$$

Из равенства реактивных мощностей $Q = U^2 b = I^2 x_{\text{эКВ}}$ следует, что реактивное сопротивление эквивалентной неразветвленной цепи

$$x_{\text{эКВ}} = U^2 b / I^2 = b z^2 = 0,0052 \cdot 84,2^2 = 36,6 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление носит индуктивный характер, поэтому $x_{\text{эКВ}} = \omega L_{\text{эКВ}}$, откуда эквивалентная индуктивность

$$L_{\text{эКВ}} = \frac{x_{\text{эКВ}}}{\omega} = \frac{36,6 \cdot 1000}{314} = 117 \text{ мГн}.$$

Схема замещения заданной цепи последовательным соединением активного сопротивления и индуктивности представлена на рис. 10.1, в.

10.2. Улучшение коэффициента мощности

Задача 10.2. К трансформатору с номинальной мощностью $S_H = 200 \text{ кВ} \cdot \text{А}$ и номинальным напряжением $U_H = 220 \text{ В}$ подключена группа электродвигателей (рис. 10.2, а), общая активная мощность которых $P_1 = 140 \text{ кВт}$.

Определить мощность загрузки и общий ток (нагрузку) трансформатора при частоте питания $f = 50 \text{ Гц}$, если при этом коэффициент мощности цепи $\cos \varphi' = 0,7$. Найти емкость и мощность батареи конденсаторов (обладающих пренебрежимо малым активным сопротивлением), которую следует подключить к трансформатору, чтобы коэффициент мощности цепи повысился до $\cos \varphi'' = 0,95$ при сохранении активно-индуктивного характера нагрузки. Определить при этом мощность загрузки и нагрузку при этом трансформатора. Определить емкость и мощность батареи конденсаторов, необходимые для сохранения коэффициента мощности цепи ($\cos \varphi''' = \cos \varphi'' = 0,95$) и характера нагрузки трансформатора при параллельном подключении к ней дополнительной активной (например, осветительной) нагрузки, обеспечивающей полную загрузку трансформатора, а также мощность этой дополнительной нагрузки.

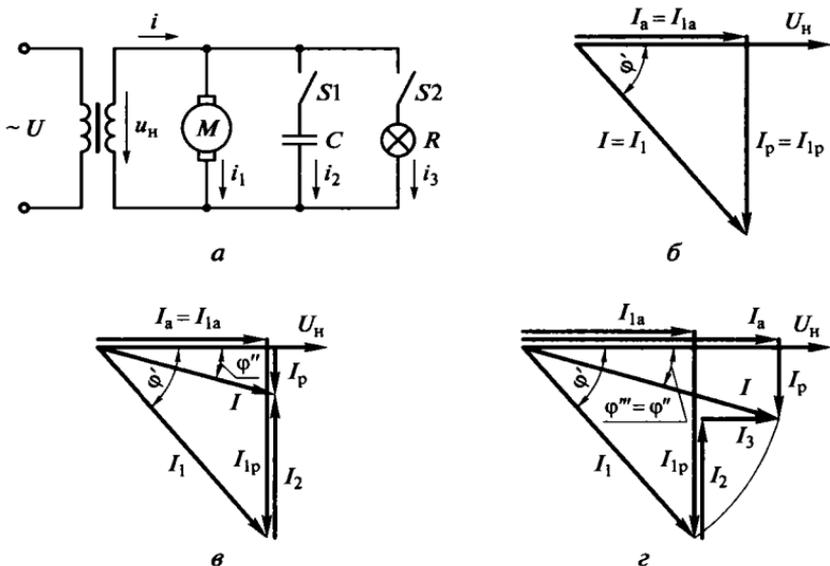


Рис. 10.2. Электрическая цепь к задаче 10.2:

а — схема цепи; б — векторная диаграмма при разомкнутых рубильниках $S1$ и $S2$; в — векторная диаграмма при разомкнутом рубильнике $S2$; г — векторная диаграмма при замкнутых рубильниках

Решение. 1. Работа трансформатора на группу электродвигателей. При разомкнутых на рис. 10.2, а рубильниках $S1$ и $S2$ мощность загрузки трансформатора

$$S' = \frac{P_1}{\cos \varphi'} = \frac{140}{0,7} = 200 \text{ кВ} \cdot \text{А}; \quad S' = S_n.$$

В рассматриваемом случае трансформатор загружен полностью до установленной номинальной мощности S_n .

Общий ток нагрузки трансформатора равен номинальному току трансформатора I_n :

$$I = I_1 = S_n / U_n = I_n = 200\,000 / 220 = 909,1 \text{ А}.$$

Найдем активные и реактивные составляющие токов I и I_1 :

$$I_a = I_{1a} = I_1 \cos \varphi' = 909,1 \cdot 0,7 = 636,4 \text{ А};$$

$$\varphi' = \arccos 0,7 = 45^\circ 36';$$

$$I_p = I_{1p} = I_1 \sin \varphi' = 909,1 \cdot \sin 45^\circ 36' = 649,2 \text{ А}.$$

На рис. 10.2, б представлена векторная диаграмма цепи для рассматриваемого случая. За основание векторной диаграммы здесь принят вектор напряжения \bar{U}_n . Так как электродвигатели создают активно-индуктивную нагрузку, то вектор тока $\bar{I} = \bar{I}_1$ отстает от вектора \bar{U}_n на угол $\varphi' = 45^\circ 36'$.

Рассматриваемая схема подключения электродвигателей имеет недостаток: она характеризуется большим значением реактивного тока (осуществляющего обмен энергией между магнитным полем индуктивности электродвигателей и сетью) и, следовательно, большими потерями энергии на нагрев проводов, что неэкономично.

2. Повышение коэффициента мощности до 0,95 с помощью батареи конденсаторов. В этом случае на рис. 10.2, а рубильник $S1$ замкнут, а рубильник $S2$ разомкнут. Убедимся в том, что если параллельно группе двигателей включить батарею конденсаторов (коэффициент мощности цепи повысится), мощность загрузки и нагрузка трансформатора (общий ток цепи) снизится.

Так как активная мощность цепи в рассматриваемом случае равна активной мощности электродвигателей ($P = P_1$), то мощность загрузки трансформатора

$$S'' = \frac{P}{\cos \varphi''} = \frac{140}{0,95} = 147,368 \text{ кВ} \cdot \text{А}; \quad S'' < S_n = 200 \text{ кВ} \cdot \text{А}.$$

Очевидно, что номинальная (установленная) мощность трансформатора используется не полностью, что говорит о нерациональном использовании оборудования.

Общий ток нагрузки (нагрузка) трансформатора

$$I = S''/U_n = 147368/220 = 669,9 \text{ А}; I < I_n = 909,1 \text{ А}.$$

Ток I_1 в ветви с электродвигателями и коэффициент мощности ветви $\cos \varphi'$, а следовательно, активная I_{1a} и реактивная I_{1p} составляющие тока I_1 в рассматриваемой цепи не изменятся, так как остаются неизменными напряжения U_n на концах ветви, а также значения и характер сопротивления ветви:

$$I_1 = 909,1 \text{ А}; \cos \varphi' = 0,7; I_{1a} = 636,4 \text{ А}; I_{1p} = 649,2 \text{ А}.$$

Векторная диаграмма цепи для рассматриваемого случая представлена на рис. 10.2, в. За основание векторной диаграммы здесь, как и в предыдущем случае, принят вектор напряжения \bar{U}_n . Вектор тока \bar{I}_1 отстает от вектора \bar{U}_n на угол $\varphi' = \arccos 0,7 = 45^\circ 36'$. Вектор тока \bar{I}_2 батареи конденсаторов (по условию задачи обладающих практически идеальной емкостью) опережает вектор \bar{U}_n на 90° и направлен противоположно вектору \bar{I}_{1p} .

Вектор общего тока согласно первому закону Кирхгофа равен геометрической сумме векторов параллельных ветвей: $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$. При этом получение заданного коэффициента мощности $\cos \varphi'' = 0,95$ возможно в двух случаях:

а) $I_2 > I_{1p}$. При этом цепь имеет активно-емкостной характер, что не соответствует условию задачи;

б) $I_2 < I_{1p}$. При этом цепь имеет активно-индуктивный характер, что соответствует условию задачи.

При $I_2 < I_{1p}$ вектор общего тока \bar{I} отстает от вектора \bar{U}_n на угол $\varphi'' = \arccos 0,95 = 18^\circ 12'$.

Так как активным сопротивлением батареи конденсаторов пренебрегаем, активная проводимость цепи g остается равной активной проводимости первой ветви g_1 , а следовательно, активная составляющая общего тока цепи

$$I_a = Ug = Ug_1 = I_{1a} = 636,4 \text{ А}.$$

Реактивная составляющая общего тока цепи

$$I_p = I \sin \varphi'' = 669,9 \sin 18^\circ 12' = 209,2 \text{ А}.$$

Рассматриваемая цепь характеризуется уменьшением реактивного тока и соответственно потерь энергии на нагревание проводов по сравнению с первой цепью в $I_{1p}/I_p = 649,2/209,2 = 3,1$ раза.

Согласно векторной диаграмме на рис. 10.2, *в* общий ток батареи конденсаторов, повышающих коэффициент мощности до 0,95,

$$I_2 = I_{1p} - I_p = 649,2 - 209,2 = 440 \text{ А.}$$

Емкость батареи конденсаторов

$$C = \frac{I_2}{2\pi f U_n} = \frac{440}{2\pi \cdot 50 \cdot 220} = 6\,367 \text{ мкФ.}$$

Мощность батареи конденсаторов

$$Q_C = U_n I_2 = 220 \cdot 440 \cdot 10^{-3} = 96,81 \text{ квар.}$$

3. Включение дополнительной активной нагрузки, обеспечивающей полную загрузку трансформатора. В этом случае рубильники *S1* и *S2* на рис. 10.2, *а* замкнуты. Разгрузка трансформатора от части реактивного тока и соответственно части реактивной (обменной) мощности за счет подключения батареи конденсаторов позволяет подсоединить к нему дополнительную, например осветительную, нагрузку до обеспечения полной загрузки трансформатора (мощность загрузки $S''' = S_n$) и номинального режима его работы. Общий ток *I* цепи при этом должен быть равен номинальному току I_n при $\cos \varphi''' = \cos \varphi'' = 0,95$:

$$I = S'''/U_n = S_n/U_n = I_n = 200\,000/220 = 909,1 \text{ А.}$$

Рассматриваемому случаю соответствует векторная диаграмма на рис. 10.2, *з*, с помощью которой легко определить активную и реактивную составляющие общего тока *I*:

$$I_a = I \cos \varphi'' = 909,1 \cdot 0,95 = 863,6 \text{ А;}$$

$$I_p = I \sin \varphi'' = 909,1 \sin 18^\circ 12' = 283,9 \text{ А.}$$

При этом общий ток батареи конденсаторов

$$I_2 = I_{1p} - I_p = 649,2 - 283,9 = 365,3 \text{ А.}$$

Емкость батареи конденсаторов

$$C = \frac{I_2}{2\pi f U_n} = \frac{365,3 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 220} = 5\,286 \text{ мкФ.}$$

Мощность батареи конденсаторов

$$Q_C = U_n I_2 = 220 \cdot 365,3 \cdot 10^{-3} = 80,4 \text{ квар.}$$

Активный ток дополнительной осветительной нагрузки (см. рис. 10.2, *з*)

$$I_3 = I_a - I_{1a} = I \cos \varphi'' - I \cos \varphi' = 909,1 (0,95 - 0,7) = 227,3 \text{ А.}$$

Мощность осветительной нагрузки

$$P_3 = U_n I_3 = 220 \cdot 227,3 \cdot 10^{-3} = 50 \text{ кВт.}$$

Мощность P_3 можно определить и другим способом:

$$P_3 = S''' \cos \varphi''' - P_1 = 200 \cdot 0,95 - 140 = 50 \text{ кВт.}$$

10.3. Задачи для самостоятельного решения

10.3. Катушка индуктивности (с параметрами $R_k = 150$ Ом и $L_k = 0,5$ Гн) и параллельно присоединенный к ней резистор с сопротивлением $R = 200$ Ом питаются от источника переменного тока напряжением $u = 100 \sin 314t$. Вычислить токи ветвей, ток источника, угол сдвига фаз между напряжением и током источника и полное сопротивление цепи.

10.4. К источнику переменного тока с частотой 50 Гц присоединены две ветви: первая содержит активное сопротивление $R = 70$ Ом и индуктивность L , а вторая — только емкость C . Коэффициент мощности первой ветви 0,57, а всей цепи 0,92. Определить L и C .

10.5. Двигатель, работающий при напряжении 220 В и частоте 400 Гц, имеет активную мощность 150 кВт. К его выводам присоединили конденсатор емкостью 500 мкФ. При этом коэффициент мощности цепи повысился до 0,87. Определить коэффициент мощности двигателя до присоединения к нему конденсатора.

10.6. Участок цепи переменного тока с напряжением $U = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц представляет собой параллельное соединение катушки индуктивности (с $R = 10$ Ом и $L = 30$ мГн) и идеального конденсатора с емкостью $C = 70$ мкФ. Определить общий ток и токи в ветвях, активную, реактивную и полную мощности катушки, конденсатора и всей цепи.

10.7. По данным условия задачи 10.6 определить резонансную частоту f_p .

10.8. Электрическая цепь, состоящая из трех параллельно соединенных ветвей, включена на напряжение $u = 310 \sin 314t$. Первая ветвь цепи состоит из катушки индуктивности с параметрами $R_1 = 170$ Ом и $L_1 = 0,5$ Гн, вторая представляет собой последовательное соединение катушки индуктивности ($R_2 = 130$ Ом и $L_2 = 0,1$ Гн) и конденсатора ($C = 60$ мкФ), а третья ветвь содержит резистор с сопротивлением $R_3 = 200$ Ом. Определить токи I_1, I_2, I_3, I , их активные и реактивные составляющие $I_{1a}, I_{2a}, I_{3a}, I_a, I_{1p}, I_{2p}, I_{3p}, I_p$ и мощности P, Q, S цепи. Построить векторную диаграмму цепи.

10.9. По данным задачи 10.8 составить уравнения мгновенных значений токов в ветвях и общего тока цепи. Определить полное сопротивление цепи, коэффициент мощности и параметры эквивалентной неразветвленной цепи.

10.10. К источнику питания с напряжением 220 В и частотой 50 Гц подключена цепь, содержащая две параллельные ветви. Первая ветвь имеет активно-индуктивный характер и потребляет мощность 200 Вт при коэффициенте мощности 0,7. Вторая ветвь содержит конденсатор, активным сопротивлением которого можно пренебречь. Определить емкость конденсатора, если коэффициент мощности всей цепи 0,95.

10.11. Определить параметры эквивалентной последовательной цепи при частоте сети $f = 50$ Гц, которой можно заменить параллельное соединение идеального конденсатора емкостью 25 мкФ и активного сопротивления 200 Ом. Найти коэффициент мощности цепи.

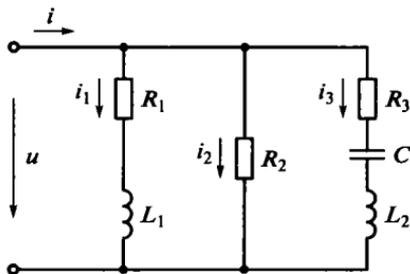
10.12. Обмотка возбуждения двигателя подключена к источнику питания, установленная мощность которого 200 В·А, напряжение 220 В и частота 50 Гц. Обмотка возбуждения потребляет мощность 100 Вт и имеет коэффициент мощности 0,7. Для повышения коэффициента мощности параллельно обмотке возбуждения двигателя подключен конденсатор емкостью 3 мкФ. Определить максимальное сопротивление, которое можно подключить параллельно нагрузке источника, чтобы его мощность не превысила установленную. Найти коэффициент мощности цепи.

10.13. Определить токи в цепи, представленной на рис. 10.3, посредством вычисления активных и реактивных составляющих токов, а также активную, реактивную и полную мощности цепи. Построить векторную диаграмму токов и напряжений при напряжении на зажимах цепи $u = 70 \sin 314t$, если параметры цепи следующие: $R_1 = 30$ Ом; $L_1 = 220$ мГн; $R_2 = 82,5$ Ом; $L_2 = 63$ мГн; $R_3 = 22$ Ом; $C = 50$ мкФ.

10.14. Решить задачу 10.13 посредством определения проводимостей ветвей и всей цепи. Найти коэффициент мощности и параметры эквивалентной последовательной цепи, которой можно заменить рассматриваемую параллельную цепь.

10.15. Определить резонансную частоту и добротность параллельного контура, состоящего из катушки с $R = 100$ Ом, $L = 10$ мГн и конденсатора $C = 0,5$ мкФ.

Рис. 10.3. Схема разветвленной RLC-цепи



10.16. Параллельно катушке с активным сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$ и индуктивностью $L = 15 \text{ мГн}$ присоединен конденсатор. В контуре возник резонанс при частоте $f_p = 100 \text{ Гц}$. Определить общий ток в цепи и емкость конденсатора при резонансе, если напряжение на ее зажимах $U = 70 \text{ В}$.

10.17. По данным задачи 10.10 определить мощность дополнительной активной нагрузки, которую можно включить параллельно источнику, если его номинальная мощность $S_H = 300 \text{ В}\cdot\text{А}$. Найти коэффициент мощности цепи при включенной дополнительной нагрузке.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

10.3. 0,33 А; 0,35 А; 0,62 А; $22^\circ 6'$; 113,2 Ом.

10.4. 0,32 Гн; 15 мкФ.

10.5. 0,717.

10.6. 5,12 А; 2,19 А; 4,84 А; 480 Вт; 45 вар; 482 В·А; 0; 1064 вар; 1064 В·А; 480 Вт; 1019 вар; 1126 В·А.

10.7. 96,2 Гц.

10.8. 0,95 А; 1,66 А; 1,1 А; 3,45 А; 0,7 А; 1,64 А; 1,1 А; 3,43 А; 0,64 А; 0,27 А; 0; 0,37 А; 752 Вт; 81 вар; 757 В·А.

10.9. $i_1 = 1,34 \sin(314t - 42^\circ 42')$; $i_2 = 2,35 \sin(314t + 9^\circ 30')$; $i_3 = 1,55 \sin 314t$; $i = 4,88 \sin(314t - 6^\circ 6')$; 63,5 Ом; 0,994; 63,1 Ом; 21,6 мГн.

10.10. 9,1 мкФ или 17,7 мкФ.

10.11. $R_{\text{экв}} = 57,7 \text{ Ом}$; $C_{\text{экв}} = 35,1 \text{ мкФ}$; $\cos \varphi = 0,54$.

10.12. 527 Ом; 0,96.

10.13. 0,66 А; 0,6 А; 1,01 А; 1,35 А; 65 Вт; 14,8 вар; 66,7 В·А; векторная диаграмма показана на рис. 10.4.

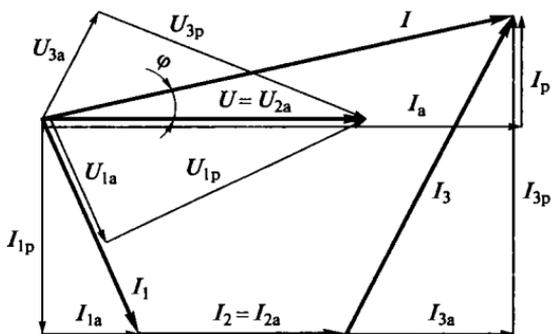


Рис. 10.4. Векторная диаграмма RLC -цепи к задаче 10.13

10.14. 0,975; 35,8 Ом; 391,3 мкФ.

10.15. $1 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$; 1,41.

10.16. 3,7 А; 79,4 мкФ.

10.17. 92,7 Вт; 0,976.

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

11.1. Неразветвленная цепь синусоидального тока

Задача 11.1. На рис. 11.1, *а* представлена комплексная плоскость с изображенной на ней векторной диаграммой неразветвленной электрической цепи переменного тока.

Выразить напряжения и ток цепи комплексными числами в трех формах (алгебраической, тригонометрической и показательной), если $U_1 = 100$ В, $U_2 = 50$ В и $I = 0,9$ А. Составить комплексное выражение (комплекс) для напряжения u на входе цепи и записать мгновенное значение входного напряжения по его комплексному значению. Определить комплексы сопротивлений цепи и ее участков. Представить мощность цепи в комплексной форме. Определить активные и реактивные составляющие напряжений и тока цепи.

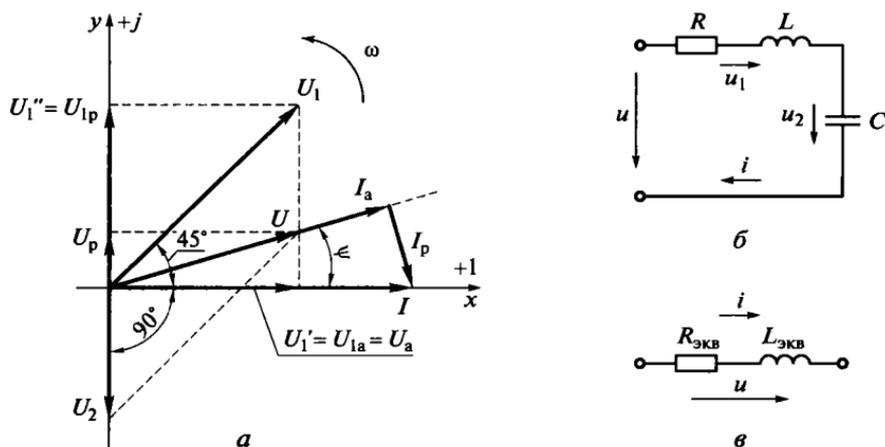


Рис. 11.1. Векторная диаграмма неразветвленной электрической цепи переменного тока в комплексной плоскости (*а*), ее схема (*б*) и эквивалентная схема замещения (*в*)

Решение. 1. Три формы представления напряжения u_1 комплексным числом. Так как оси x и y векторной диаграммы совмещены с осями комплексной плоскости (см. рис. 11.1, a), то, зная модуль (U_1) и аргумент (45°) вектора напряжения, легко записать искомый комплекс *в показательной форме*:

$$\dot{U}_1 = U_1 e^{j45^\circ} = 100 e^{j45^\circ} \text{ В.} \quad (11.1)$$

Показательная форма (11.1) неудобна для сложения комплексных. С помощью формулы Эйлера показательную форму комплекса можно преобразовать *в тригонометрическую*:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= U_1 e^{j45^\circ} = U_1 (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \\ &= 100 (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) \text{ В.} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Тригонометрическая форма служит для перевода комплексных из показательной формы в алгебраическую форму, удобную для их сложения. При этом первое слагаемое выражения (11.2), равное проекции U_1' вектора напряжения u_1 на действительную ось, представляет собой действительную часть комплекса $\text{Re} \dot{U}_1$, а второе слагаемое, равное проекции U_1'' вектора напряжения u_1 на мнимую ось комплексной плоскости, представляет собой мнимую часть комплекса $\text{Im} \dot{U}_1$:

$$\begin{aligned} \text{Re} \dot{U}_1 &= U_1' = U_1 \cos 45^\circ = 100 \frac{\sqrt{2}}{2} = 70,7 \text{ В;} \\ \text{Im} \dot{U}_1 &= U_1'' = U_1 \sin 45^\circ = 100 \frac{\sqrt{2}}{2} = 70,7 \text{ В.} \end{aligned}$$

Запишем комплекс напряжения u_1 в *алгебраической* форме:

$$\dot{U}_1 = \text{Re} \dot{U}_1 + j \text{Im} \dot{U}_1 = (70,7 + j70,7) \text{ В.} \quad (11.3)$$

2. Три формы представления напряжения u_2 и тока i комплексными числами. По аналогии с выражениями (11.1) ... (11.3) представим показательную, тригонометрическую и алгебраическую формы комплексных напряжений u_2 и тока i :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= U_2 e^{-j90^\circ} = U_2 (\cos 90^\circ - j \sin 90^\circ) = -j U_2; \\ \dot{I} &= I e^{j0} = I (\cos 0 - j \sin 0) = I. \end{aligned}$$

После подстановки в выражения комплексных \dot{U}_2 и \dot{I} заданных значений U_2 и I получим:

$$\dot{U}_2 = 50 e^{-j90^\circ} = 50 (\cos 90^\circ - j \sin 90^\circ) = -j50 \text{ В;}$$

$$\dot{I} = 0,9e^{j0^\circ} = 0,9(\cos 0 - j \sin 0) = 0,9 \text{ А.}$$

3. Составление комплекса входного напряжения. Запись мгновенного значения напряжения по его комплексу. Так как рассматриваемая цепь неразветвленная, напряжение на ее входе равно сумме напряжений на ее отдельных участках. В алгебраической форме комплекс входного напряжения имеет вид

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = (70,7 + j70,7) + (-j50) = (70,7 + j20,7) \text{ В.}$$

При этом $\text{Re} \dot{U}_1 = 70,7 \text{ В}$, а $\text{Im} \dot{U}_1 = 20,7 \text{ В}$.

Для получения показательной формы комплекса \dot{U} необходимо определить модуль U и аргумент ψ вектора напряжения на входе.

Модуль напряжения на входе

$$U = \sqrt{\text{Re} \dot{U}^2 + \text{Im} \dot{U}^2} = \sqrt{70,7^2 + 20,7^2} = 73,7 \text{ В.}$$

Аргумент напряжения на входе

$$\psi = \arctg(\text{Im} \dot{U} / \text{Re} \dot{U}) = \arctg(20,7/70,7) 180/\pi = 16,3^\circ.$$

Показательная форма комплекса напряжения на входе

$$\dot{U} = Ue^{j\psi} = 73,7e^{j16,3^\circ} \text{ В.}$$

Для записи мгновенного значения синусоидальной величины необходимо знать ее максимальное значение и значение начальной фазы, что легко определить по показательной форме комплекса. Так, мгновенное значение входного напряжения

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) = 73,7\sqrt{2} \sin(\omega t + 16,3^\circ).$$

4. Определение комплексов сопротивлений цепи. Для определения комплексов сопротивлений цепи можно применить закон Ома в комплексной форме. Так, комплекс сопротивления участка цепи с напряжением U_1 в показательной форме имеет вид

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}} = \frac{100e^{j45^\circ}}{0,9} = 111,1e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Перевод комплекса сопротивления из показательной формы (через тригонометрическую форму) в алгебраическую позволяет получить активную и реактивную составляющие сопротивления схемы замещения участка с напряжением U_1 :

$$\underline{Z}_1 = 111,1e^{j45^\circ} = 111,1(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = (78,6 + j78,6) \text{ Ом.}$$

Из полученного выражения следует, что этот участок имеет активно-индуктивный характер с параметрами

$$R = \operatorname{Re} \underline{Z}_1 = 78,6 \text{ Ом}; \quad x_L = \operatorname{Im} \underline{Z}_1 = 78,6 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление участка цепи с напряжением U_1 равно модулю комплекса \underline{Z}_1 :

$$z_1 = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \underline{Z}_1 + \operatorname{Im}^2 \underline{Z}_1} = \sqrt{R^2 + x_L^2} = 78,6\sqrt{2} = 111,1 \text{ Ом}.$$

Комплекс сопротивления участка с напряжением U_2

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}} = \frac{-j50}{0,9} = -j55,6 \text{ Ом}$$

содержит только мнимую часть, причем с отрицательным знаком, следовательно, схема замещения участка цепи с напряжением U_2 — это емкостное сопротивление

$$x_C = 55,6 \text{ Ом}.$$

Таким образом, схема заданной цепи соответствует изображенной на рис. 11.1, б.

Определим комплекс полного сопротивления этой цепи с напряжением U на входе по закону Ома в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{73,7e^{j16^\circ 18'}}{0,9} = 81,9e^{j16^\circ 18'} = \\ &= 81,9(\cos 16^\circ 18' + j \sin 16^\circ 18') = (78,6 + j23) \text{ Ом}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Из выражения (11.4) следует, что вся цепь с напряжением U имеет активно-индуктивный характер и может быть представлена схемой замещения, показанной на рис. 11.1, в, со следующими эквивалентными параметрами:

$$R_{\text{экв}} = \operatorname{Re} \underline{Z} = 78,6 \text{ Ом}; \quad x_{L_{\text{экв}}} = \operatorname{Im} \underline{Z} = 23 \text{ Ом}.$$

При этом полное сопротивление цепи с напряжением U на входе равно модулю комплекса \underline{Z} :

$$z = \sqrt{R_{\text{экв}}^2 + x_{L_{\text{экв}}}^2} = \sqrt{78,6^2 + 23^2} = 81,9 \text{ Ом}.$$

При последовательном соединении участков полное сопротивление цепи можно определить и как сумму комплексов этих участков:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (78,6 + j78,6) + (-j55,6) = (78,6 + j23) \text{ Ом}. \quad (11.5)$$

Выражения (11.4) и (11.5) совпадают, что подтверждает правильность выполненных расчетов.

5. Определение мощности цепи в комплексной форме. Комплекс мощности цепи запишем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \dot{U} \dot{I}^* = 73,7 e^{j16^\circ 18'} \cdot 0,9 = 66,3 e^{j16^\circ 18'} = \\ &= 66,3 (\cos 16^\circ 18' + j \sin 16^\circ 18') = (63,7 + j18,6) \text{ В} \cdot \text{А}.\end{aligned}$$

При этом действительная часть комплекса мощности равна активной мощности цепи P , мнимая часть — реактивной индуктивной мощности Q_L , а модуль комплекса — полной мощности S :

$$P = \operatorname{Re} \tilde{S} = 63,7 \text{ Вт}; \quad Q_L = \operatorname{Im} \tilde{S} = 18,6 \text{ вар}; \quad S = 66,3 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

6. Активные и реактивные составляющие напряжений и тока. Активные составляющие напряжений — это проекции векторов напряжений на вектор тока. Так как в рассматриваемой задаче вектор тока направлен вдоль действительной оси, активные составляющие напряжений совпадают с проекциями векторов напряжений на действительную ось и равны действительным частям соответствующих комплексов:

$$U_{1a} = U_a = \operatorname{Re} \dot{U}_1 = 70,7 \text{ В}; \quad U_{2a} = \operatorname{Re} \dot{U}_2 = 0.$$

Реактивные составляющие напряжений — это проекции векторов напряжений на прямую, перпендикулярную направлению тока, т. е. на мнимую ось, и поэтому равны мнимым частям соответствующих комплексов:

$$U_{1p} = \operatorname{Im} \dot{U}_1 = 70,7 \text{ В}; \quad U_{2p} = \operatorname{Im} \dot{U}_2 = -50 \text{ В};$$

$$U_p = \operatorname{Im} \dot{U} = 20,7 \text{ В}.$$

Очевидно, что в общем случае активная и реактивная составляющие вектора не имеют отношения к действительным и мнимым частям комплексов, как, например, активная и реактивная составляющие тока заданной цепи.

Чтобы определить активную и реактивную составляющие тока какой-либо цепи, необходимо из конца вектора тока этой цепи опустить перпендикуляр на направление ее вектора напряжения. Таким образом, активная составляющая тока I_a — составляющая, совпадающая с вектором входного напряжения, а реактивная составляющая I_p — составляющая, перпендикулярная вектору входного напряжения.

Для цепи на рис. 11.1, a составляющие тока имеют вид

$$I_a = I \cos \psi = 0,9 \cos 16^\circ 18' = 0,9 \text{ А};$$

$$I_p = I \sin \psi = 0,9 \sin 16^\circ 18' = 0,3 \text{ А}.$$

11.2. Разветвленная цепь синусоидального тока с одним источником энергии

Задача 11.2. Для цепи с одним источником синусоидального напряжения и нагрузкой, состоящей из трех параллельно подключенных к нему ветвей (см. рис. 10.1, а), при данных задачи 10.1, определить токи, полную мощность и полное сопротивление комплексным методом.

Решение. 1. Определение токов в ветвях цепи. Найдем комплексы полных сопротивлений ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_{L1} = R_1 + j\omega L_1 = 100 + j314 \cdot 0,5 = (100 + j157) \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= R_2 + j(x_{L2} - x_C) = R_2 + j(\omega L_2 - 1/(\omega C)) = \\ &= 170 + j(314 \cdot 0,1 - 1/314/250 \cdot 10^6) = 170 + j(31,4 - 12,74) = \\ &= (170 + j18,66) \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 = 500 \text{ Ом}.$$

Мысленно совместим плоскость векторной диаграммы, показанной на рис. 10.1, б, с комплексной плоскостью, причем действительную ось совместим с осью x системы координат векторной диаграммы, а мнимую — с осью y .

Тогда комплекс напряжения сети можно определить в виде

$$\dot{U} = U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 219,91 \text{ В}.$$

Найдем комплекс тока первой ветви \dot{I}_1 в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{219,91}{100 + j157} = \frac{219,91(100 - j157)}{100^2 + 157^2} = \\ &= \frac{21991 - j34526}{34649} = (0,63 - j) \text{ А}. \end{aligned}$$

Определим комплекс тока первой ветви \dot{I}_1 в показательной форме:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \sqrt{(\text{Re } \dot{I}_1)^2 + (\text{Im } \dot{I}_1)^2} e^{j \left(\arctg \frac{\text{Im } \dot{I}_1}{\text{Re } \dot{I}_1} \right) \frac{180}{\pi}} = \\ &= \sqrt{0,63^2 + (-1)^2} e^{j \left(\arctg \frac{-1}{0,63} \right) \frac{180}{\pi}} = 1,18 e^{-j57^\circ 48'} \text{ А}. \end{aligned}$$

Модуль комплекса \dot{I}_1 соответствует действующему значению тока первой ветви I_1 , а аргумент — углу сдвига фаз φ_1 между то-

ком \dot{I}_1 и напряжением \dot{U} , причем ток \dot{I}_1 отстает от напряжения \dot{U} (см. рис. 10.1, б). Итак,

$$I_1 = 1,18 \text{ А}; \varphi_1 = 57^\circ 48'.$$

Найдем комплекс тока второй ветви \dot{I}_2 в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{219,91}{170 + j18,7} = \frac{219,91(170 - j18,66)}{170^2 + 18,66^2} = \\ &= \frac{37\,385 - j4\,104}{29\,248} = (1,28 - j0,14) \text{ А}. \end{aligned}$$

Определим комплекс тока второй ветви \dot{I}_2 в показательной форме:

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \sqrt{(\operatorname{Re} \dot{I}_2)^2 + (\operatorname{Im} \dot{I}_2)^2} e^{j \left(\arctg \frac{\operatorname{Im} \dot{I}_2}{\operatorname{Re} \dot{I}_2} \right) \frac{180}{\pi}} = \\ &= \sqrt{1,28^2 + (-0,14)^2} e^{j \left(\arctg \frac{-0,14}{1,28} \right) \frac{180}{\pi}} = 1,29 e^{-j6^\circ 14'} \text{ А}. \end{aligned}$$

Действующее значение тока I_2 равно модулю комплекса \dot{I}_2 , т.е. $I_2 = 1,29$ А. При этом ток \dot{I}_2 отстает от напряжения \dot{U} на угол $\varphi_2 = 6^\circ 14'$.

Найдем комплекс тока третьей ветви:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{U}{R_3} = \frac{219,91}{500} = 0,44 \text{ А}.$$

Действующее значение тока I_3 равно модулю комплекса \dot{I}_3 , т.е. $I_3 = 0,44$ А. При этом ток \dot{I}_3 совпадает по фазе с напряжением \dot{U} (см. рис. 10.1, б), т.е. $\varphi_3 = 0$.

2. Определение общего тока цепи. В соответствии с первым законом Кирхгофа в комплексном виде общий ток цепи

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (0,63 - j) + (1,28 - j0,14) + 0,44 = \\ &= (2,35 - j1,14) \text{ А}. \end{aligned}$$

Алгебраическую форму комплекса \dot{I} легко преобразовать в показательную:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \sqrt{(\operatorname{Re} \dot{I})^2 + (\operatorname{Im} \dot{I})^2} e^{j \left(\arctg \frac{\operatorname{Im} \dot{I}}{\operatorname{Re} \dot{I}} \right) \frac{180}{\pi}} = \\ &= \sqrt{2,35^2 + (-1,14)^2} e^{j \left(\arctg \frac{-1,14}{2,35} \right) \frac{180}{\pi}} = 2,61 e^{-j25^\circ 54'} \text{ А}. \end{aligned}$$

Действующее значение тока I равно модулю комплекса \dot{I} , т.е. $I = 2,61$ А. При этом ток \dot{I} отстает от напряжения \dot{U} на угол $\varphi = 25^\circ 54'$ (см. рис. 10.1, б).

3. Определение полной мощности цепи. Найдем комплекс полной мощности цепи в алгебраической форме:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 219,91 \cdot (2,35 + j1,14) = (516,78 + j250,69) \text{ В} \cdot \text{А};$$

Определим этот комплекс в показательной форме:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 219,91 \cdot 2,61e^{j25^\circ 54'} = 573,97e^{j25^\circ 54'} \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Активная мощность цепи равна действительной части комплекса \tilde{S} :

$$P = \text{Re} \tilde{S} = 516,78 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность цепи равна мнимой части комплекса \tilde{S} и имеет индуктивный характер:

$$Q_L = \text{Im} \tilde{S} = 250,69 \text{ вар}.$$

Полная мощность цепи равна модулю комплекса мощности \tilde{S} :

$$S = 573,97 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

4. Определение полного сопротивления цепи. Найдем комплекс полного сопротивления цепи в показательной форме:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{219,91}{2,61 \cdot e^{-j25^\circ 54'}} = 84,26e^{j25^\circ 54'} \text{ Ом}.$$

Алгебраическая форма этого комплекса:

$$\underline{Z} = 84,26e^{j25^\circ 54'} = 84,26(\cos 25^\circ 54' + j\sin 25^\circ 54') = (75,8 + j36,8) \text{ Ом}.$$

Цепь имеет активно-индуктивный характер с эквивалентными параметрами:

$$R_{\text{экв}} = \text{Re} \underline{Z} = 75,8 \text{ Ом}; \quad x_{L\text{экв}} = \text{Im} \underline{Z} = 36,8 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление цепи z равно модулю комплекса \underline{Z} :

$$z = 84,26 \text{ Ом}.$$

Результаты, полученные при решении задач 11.2 и 10.1, имеют незначительное расхождение, что объясняется степенью точности расчетов.

Задача 11.3. Определить характер и значение реактивного сопротивления x , при котором в цепи, показанной на рис. 11.2, а,

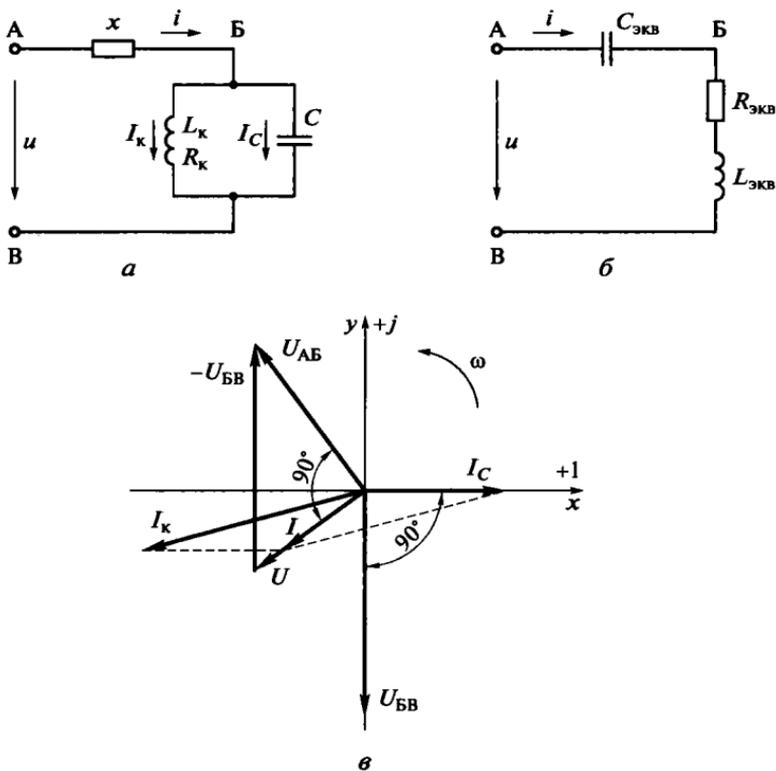


Рис. 11.2. Электрическая цепь к задаче 11.3 (а), ее эквивалентная схема (б) и векторная диаграмма (в)

на частоте 1000 Гц установится режим резонанса напряжений, если параметры параллельного контура имеют следующие значения: $R_k = 50$ Ом, $L_k = 30$ мГн, $C = 0,5$ мкФ. Найти ток I в неразветвленной части цепи, ток I_k в катушке и напряжения на выводах цепи и на ее участках при токе в емкости контура $I_C = 0,5$ А. Построить векторную диаграмму цепи для заданного режима работы. При решении использовать комплексный метод.

Решение. 1. Определение сопротивления x , обеспечивающего режим резонанса напряжений в заданной цепи. Резонанс напряжений устанавливается в цепи при равенстве значений индуктивного и емкостного сопротивлений последовательной схемы замещения цепи: $x_{L_{\text{экв}}} = x_{C_{\text{экв}}}$.

Для составления последовательной схемы замещения цепи участок БВ цепи, содержащий параллельный контур, необходимо заменить эквивалентным последовательным участком. Для этого достаточно найти комплексное значение сопротивления участка

БВ цепи в алгебраической форме, что позволит определить характер и значение его реактивного сопротивления.

Сопротивление катушки в комплексном виде

$$\begin{aligned}\underline{Z}_k &= R_k + jx_L = R_k + j2\pi fL_k = 50 + j2\pi \cdot 1\,000 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = \\ &= 50 + j188,5 = 195e^{j75^\circ} \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Сопротивление конденсатора C в комплексном виде

$$\begin{aligned}\underline{Z}_C &= -jx_C = -j \frac{1}{2\pi fC} = -j \frac{1}{2\pi \cdot 1\,000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = \\ &= -j318,3 = 318,3e^{-j90^\circ} \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Сопротивление участка БВ цепи в комплексном виде

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{БВ}} &= \frac{\underline{Z}_k \underline{Z}_C}{\underline{Z}_k + \underline{Z}_C} = \frac{195e^{j75^\circ} \cdot 318,3e^{-j90^\circ}}{50 + j188,5 - j318,3} = \frac{6\,2068,5e^{-j15^\circ}}{139,1e^{-j68^\circ 54'}} = \\ &= 446,2e^{j53^\circ 54'} = 446,2(\cos 53^\circ 54' + j \sin 53^\circ 54') = (262,9 + j360,5) \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Следовательно, участок БВ цепи можно представить в виде последовательного соединения активного сопротивления $R_{\text{ЭКВ}}$ (действительная часть комплекса $\underline{Z}_{\text{БВ}}$) и индуктивного сопротивления $x_{L_{\text{ЭКВ}}}$ (мнимая часть комплекса $\underline{Z}_{\text{БВ}}$):

$$R_{\text{ЭКВ}} = \text{Re } \underline{Z}_{\text{БВ}} = 262,9 \text{ Ом}; \quad x_{L_{\text{ЭКВ}}} = \text{Im } \underline{Z}_{\text{БВ}} = 360,5 \text{ Ом.}$$

Тогда согласно условию резонанса напряжений сопротивление x цепи, включенное последовательно с участком БВ, должно быть емкостным со значением, равным $x_{L_{\text{ЭКВ}}}$:

$$x = x_{C_{\text{ЭКВ}}} = x_{L_{\text{ЭКВ}}} = 360,5 \text{ Ом.}$$

Последовательная схема замещения цепи на рис. 11.2, а, соответствующая выполненным расчетам, представлена на рис. 11.2, б.

2. Определение тока \dot{I}_k в катушке параллельного контура. Ток \dot{I}_k в катушке определим в соответствии с законом Ома по напряжению $\dot{U}_{\text{БВ}}$ и сопротивлению \underline{Z}_k :

$$\dot{I}_k = \dot{U}_{\text{БВ}} / \underline{Z}_k,$$

где $\dot{U}_{\text{БВ}} = \dot{I}_C \underline{Z}_C$.

Так как по условию задачи направление тока \dot{I}_C , протекающего в емкости параллельного контура, не задано (задано только действующее значение I_C), на векторной диаграмме направим его

произвольно, например (для удобства) по вещественной оси. В этом случае аргумент комплекса \dot{I}_C равен нулю. Тогда ток

$$\dot{I}_C = I_C = 0,5 \text{ А.}$$

Тогда комплекс напряжения на участке БВ цепи

$$\dot{U}_{БВ} = \dot{I}_C \underline{Z}_C = 0,5 \cdot 318,3e^{-j90^\circ} = 159,2e^{-j90^\circ} = -j159,2 \text{ В.}$$

Комплекс тока в катушке параллельного контура

$$\begin{aligned} \dot{i}_k &= \frac{\dot{U}_{БВ}}{\underline{Z}_k} = \frac{159,2e^{-j90^\circ}}{195e^{j75^\circ}} = 0,8e^{-j165^\circ} = \\ &= 0,8(\cos 165^\circ - j \sin 165^\circ) = (-0,8 - j0,2) \text{ А.} \end{aligned}$$

3. Определение тока \dot{I} в неразветвленной части цепи. В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$\dot{I} = \dot{i}_k + \dot{I}_C = -0,8 - j0,2 + 0,5 = -0,3 - j0,2 = 0,36e^{-j146^\circ 18'} \text{ А.}$$

4. Определение напряжения \dot{U} на выводах цепи. Так как в режиме резонанса напряжений комплекс полного сопротивления заданной цепи $\underline{Z}_{АВ}$ равен активному сопротивлению эквивалентной схемы замещения этой цепи, комплекс напряжения на выводах цепи

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{I} \underline{Z}_{АВ} = \dot{I} R_{\text{экв}} = 0,36e^{-j146^\circ 18'} \cdot 262,9 = 94,6e^{-j146^\circ 18'} = \\ &= (-78,7 - j52,5) \text{ В.} \end{aligned}$$

5. Определение напряжения $\dot{U}_{АВ}$ на участке АВ цепи. Комплекс напряжения на участке АВ цепи

$$\begin{aligned} \dot{U}_{АВ} &= \dot{U} - \dot{U}_{БВ} = (-78,7 - j52,5) - (-j159,2) = \\ &= -78,7 + j106,7 = 132,6e^{j126^\circ 24'} \text{ В.} \end{aligned}$$

6. Действующие значения напряжений и токов. Так как действующее значение синусоидальной величины (ЭДС, напряжения, тока) равно модулю соответствующего комплекса, можно записать:

$$U = 94,6 \text{ В; } U_{АВ} = 132,6 \text{ В; } U_{БВ} = 159,2 \text{ В;}$$

$$I = 0,36 \text{ А; } I_k = 0,8 \text{ А;}$$

$$I_C = 0,5 \text{ А.}$$

Результаты расчета отражают особенность заданной цепи: напряжения на ее участках АВ и БВ с реактивным характером со-

противлений в режиме резонанса напряжений превышают напряжение на выводах цепи.

7. Векторная диаграмма цепи. Векторная диаграмма цепи, построенная в соответствии с приведенными расчетами, представлена на рис. 11.2, *в*. Диаграмма отражает следующие особенности режима резонанса напряжений: чисто активный характер цепи, т.е. общее напряжение совпадает с током по фазе; модули напряжений на участках цепи (U_{AB} и U_{BB}) превышают модуль общего напряжения U . Напряжение \dot{U}_{AB} на емкостном участке отстает от тока \dot{I} на 90° , а напряжение \dot{U}_{BB} отстает от тока \dot{I}_C на 90° и опережает ток \dot{I} на угол $|\psi_i - \psi_{U_{BB}}| = |-146^\circ 18' + 90^\circ| = 56^\circ 18'$, где ψ_i и $\psi_{U_{BB}}$ — углы начальных фаз тока i и напряжения u_{BB} .

11.3. Разветвленная цепь синусоидального тока с несколькими источниками, включенными в разные ветви

Задача 11.4. Два параллельно включенных генератора работают на одну нагрузку (рис. 11.3, *а*). Генераторы характеризуются одинаковыми синусоидальными ЭДС $E_1 = E_2 = 100$ В, совпадающими по фазе, и одинаковыми внутренними сопротивлениями $x_1 = x_2 = 0,5$ Ом чисто индуктивного характера. Нагрузка — последовательно соединенные катушка индуктивности и батарея конденсаторов с сопротивлениями $R = 3$ Ом, $x_3 = 5$ Ом и $x_4 = 10$ Ом.

Определить комплексным методом токи в цепи и напряжения между узлами и на элементах цепи.

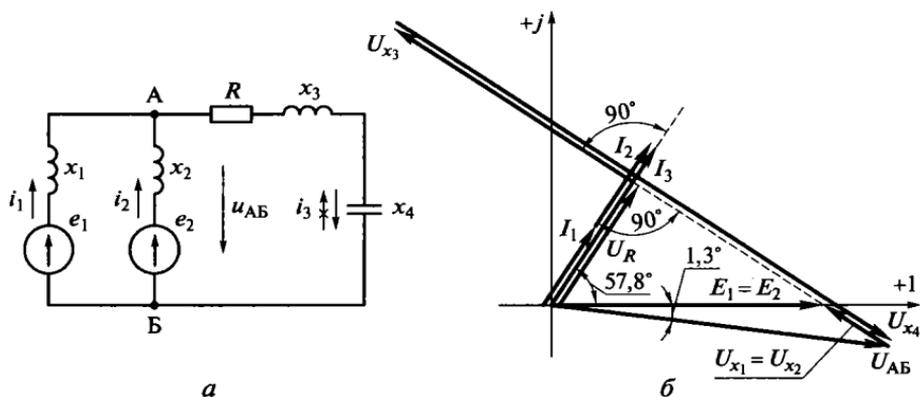


Рис. 11.3. Схема электрической цепи к задаче 11.4 (*а*) и ее векторная диаграмма (*б*)

Решение. 1. Выбор условно положительных направлений ЭДС и токов. Учитывая, что заданная цепь имеет два узла, для решения задачи целесообразно применить метод двух узлов (см. подразд. 5.4) в комплексной форме.

Выберем направление токов к одному узлу (например, узлу А), как показано на рис. 11.3, а.

2. Определение проводимостей ветвей. Найдем проводимости ветвей схемы в комплексном виде:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \underline{Y}_2 = \frac{1}{jx_1} = \frac{1}{j0,5} = -j2 \text{ См}; \\ \underline{Y}_3 &= \frac{1}{R + jx_3 - jx_4} = \frac{1}{3 + j5 - j10} = \\ &= \frac{1}{3 - j5} = \frac{3 + j5}{9 + 25} = (0,09 + j0,15) \text{ См}. \end{aligned}$$

3. Определение напряжения \dot{U}_{AB} между узлами цепи. Приняв одинаковые начальные фазы ЭДС равными нулю, запишем $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 100 \text{ В}$.

Определим в комплексном виде узловое напряжение — напряжение на нагрузке

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \frac{\dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{100(-j2) + 100(-j2)}{-j2 - j2 + 0,09 + j0,15} = \\ &= \frac{-j400}{0,09 - j3,85} = \frac{-j400(0,09 + j3,85)}{0,09^2 + 3,85^2} = \frac{1540 - j36}{14,83} = \\ &= 103,84 - j2,43 = 103,87 e^{-j1^\circ 20'} \text{ В}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Мгновенное значение напряжения между узлами

$$u_{AB} = 103,87 \sqrt{2} \sin(\omega t - 1^\circ 20').$$

4. Вычисление токов в ветвях цепи. Найдем токи в ветвях цепи в комплексном виде

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (\dot{E}_1 - \dot{U}_{AB}) \underline{Y}_1 = (100 - 103,84 + j2,43)(-j2) = \\ &= 4,86 + j7,68 = 9,09 e^{j57^\circ 40'} \text{ А}; \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 = 4,86 + j7,68 = 9,09 e^{j57^\circ 40'} \text{ А}; \\ \dot{I}_3 &= -\dot{U}_{AB} \underline{Y}_3 = (-103,84 + j2,43)(0,09 + j0,15) = \\ &= (-9,35 - 0,36) - j(15,58 - 0,22) = \\ &= -9,71 - j15,36 = 18,17 e^{-j122^\circ 18'} \text{ А}. \end{aligned}$$

Следовательно, можно записать действующие значения токов ветвей

$$I_1 = I_2 = 9,09 \text{ А}; I_3 = 18,17 \text{ А}.$$

Направление тока i_3 в начале расчета выбрано неверно. В этом легко убедиться, построив на комплексной плоскости векторы (рис. 11.3, б), соответствующие расчетным комплексам \dot{I}_3 и \dot{U}_{AB} . Расчетный ток \dot{I}_3 отстает от напряжения \dot{U}_{AB} , что противоречит условию задачи, так как сопротивление $x_4 > x_3$ и ветвь с током \dot{I}_3 имеет емкостный характер. Кроме того, угол сдвига между векторами \bar{U}_{AB} и \bar{I}_3 больше 90° , что противоречит физическому смыслу.

Изменим на противоположные направление тока i_3 на схеме (см. рис. 11.3, а) и знаки его комплекса \dot{I}_3 в алгебраической форме:

$$\dot{I}_3 = 9,71 + j15,36 = 18,17e^{j57^\circ 42'} \text{ А}.$$

5. Вычисление напряжений на элементах цепи. Генераторы представлены схемами замещения с последовательным соединением идеальных источников и индуктивных нагрузок x_1 и x_2 .

Напряжения на зажимах идеальных источников ЭДС равны их ЭДС:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 100 \text{ В}.$$

Найдем напряжения на индуктивных внутренних сопротивлениях генераторов:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{x1} = \dot{U}_{x2} = \dot{E}_1 - \dot{U}_{AB} &= 100 - 103,84 + j2,43 = \\ &= -3,84 + j2,43 = 4,54e^{j147^\circ 40'} \text{ В}, \end{aligned}$$

или по закону Ома

$$\dot{U}_{x1} = \dot{U}_{x2} = \dot{I}_1 jx_1 = 9,09e^{j57^\circ 40'} \cdot 0,5e^{j90^\circ} = 4,54e^{j147^\circ 40'} \text{ В}.$$

Напряжение на сопротивлении R

$$\dot{U}_R = \dot{I}_3 R = 18,17e^{j57^\circ 42'} \cdot 3 = 54,51e^{j57^\circ 42'} = (29,13 + j46,08) \text{ В}.$$

Напряжение на индуктивности нагрузки

$$\dot{U}_{x3} = \dot{I}_3 jx_3 = 18,17e^{j57^\circ 42'} \cdot 5e^{j90^\circ} = 90,85e^{j147^\circ 42'} = (-76,79 + j48,55) \text{ В}.$$

Напряжение на емкости нагрузки

$$\begin{aligned} \dot{U}_{x4} = \dot{I}_3 (-jx_4) &= 18,17e^{j57^\circ 42'} \cdot 10e^{-j90^\circ} = \\ &= 181,7e^{-j32^\circ 18'} = (153,58 - j97,09) \text{ В}. \end{aligned}$$

Вычислим для проверки правильности расчета напряжение на нагрузке — напряжение между узлами:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_R + \dot{U}_{x3} + \dot{U}_{x4} = 29,13 + j46,08 - 76,79 + j48,55 + \\ + 153,58 - j97,09 = (105,92 - j2,46) \text{ В.} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Выражения (11.6) и (11.7) имеют допустимое несовпадение, связанное с выбранной точностью вычислений.

Следовательно, можно записать действующие значения напряжений на участках цепи:

$$\begin{aligned} U_{AB} = 103,87 \text{ В}; U_{x1} = U_{x2} = 4,54 \text{ В}; U_R = 54,51 \text{ В}; \\ U_{x3} = 90,85 \text{ В}; U_{x4} = 181,7 \text{ В}. \end{aligned}$$

На рис. 11.3, б представлена векторная диаграмма электрической цепи, соответствующая выполненным расчетам.

11.4. Задачи для самостоятельного решения

11.5. Составить комплексное выражение для полного сопротивления цепи и определить модуль и составляющие этого сопротивления, если напряжение на зажимах цепи выражается комплексом $\dot{U} = (110 + j63,4) \text{ В}$, а ток $\dot{I} = 2 \text{ А}$.

11.6. По векторной диаграмме, представленной на рис. 11.4, составить комплексные выражения для тока и напряжения, если их действующие значения соответственно равны 2,5 А и 220 В.

11.7. Напряжение на выводах цепи имеет модуль 12 В и аргумент $(-\pi)$, а ток выражается комплексом $\dot{I} = -j50 \text{ мА}$. Записать мгновенные значения напряжения, тока и построить векторную диаграмму этой цепи.

11.8. Получить комплексные значения напряжения и тока из задачи 11.7 после умножения их комплексов на поворотные множители j и $-j$.

11.9. Заданы комплексные значения напряжений в алгебраической форме: $\dot{U}_1 = (50 + j86,6) \text{ В}$, $\dot{U}_2 = -100 \text{ В}$, $\dot{U}_3 = (50 - j86,6) \text{ В}$. Составить комплексные выражения для напряжений в показательной форме и определить углы сдвига фаз между напряжениями.

11.10. Определить комплексную сумму напряжений из задачи 11.9 и построить векторную диаграмму цепи.

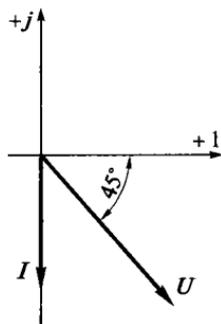
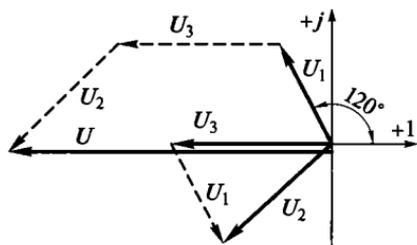


Рис. 11.4. Векторная диаграмма цепи к задаче 11.6

Рис. 11.5. Векторная диаграмма цепи к задаче 11.12



11.11. Заданы мгновенные значения напряжений на участках неразветвленной электрической цепи: $u_1 = 120 \sin(\omega t - 60^\circ)$ и $u_2 = 80 \sin(\omega t + 60^\circ)$. Представить в

трех формах (показательной, тригонометрической и алгебраической) комплекс общего напряжения цепи и построить векторную диаграмму.

11.12. Неразветвленная цепь состоит из трех участков. Векторная диаграмма этой цепи представлена на рис. 11.5. Составить комплексные выражения для напряжений на участках цепи и общего напряжения на ее выводах, если $U_1 = 20$ В, $U_3 = 24$ В и $\dot{U}_2 = \dot{U}_3 - \dot{U}_1$. Записать мгновенное значение напряжения u на выводах цепи.

11.13. Комплексное значение тока в цепи $\dot{I} = 2e^{-j45^\circ}$ А. Напряжение на выводах этой цепи опережает ток по фазе, причем активная составляющая напряжения U_a равна реактивной составляющей $U_p = 110\sqrt{2}$ В. Составить комплекс напряжения и уравнения мгновенных значений тока и напряжения цепи.

11.14. Начальная фаза тока в цепи 60° . Напряжение на выводах цепи опережает ток по фазе и имеет активную составляющую $60\sqrt{3}$ В и реактивную составляющую 60 В. Составить комплексное выражение для напряжения в цепи и определить угол сдвига фаз между напряжением и током.

11.15. Определить, при каком значении начальной фазы тока в условии задачи 11.14 активная и реактивная составляющие напряжения будут соответствовать действительной и мнимой частям комплекса напряжения, и составить комплексное выражение для напряжения в этом случае.

11.16. Ток в цепи и напряжение на ее выводах выражаются соответственно комплексами $(\sqrt{3}/2 + j0,5)$ А и $(110 + j110\sqrt{3})$ В. Определить действующие значения тока и напряжения. Составить комплекс сопротивления цепи и определить активную и реактивную составляющие сопротивления.

11.17. Определить активное сопротивление и индуктивность последовательной схемы замещения катушки, если ее сопротивление выражается комплексом $\underline{Z} = 200e^{j50^\circ}$, а частота сети 50 Гц.

11.18. Комплекс сопротивления цепи представлен выражением $\underline{Z} = \left(20 + \frac{j200}{3 + j4} \right)$ Ом. Определить параметры неразветвлен-

Рис. 11.6. Топографическая диаграмма цепи к задаче 11.21

ной схемы замещения этой цепи при частоте 100 Гц.

11.19. В цепи из последовательно включенных сопротивлений $R = 100$ Ом, $x_L = 150$ Ом и $x_C = 50$ Ом протекает ток, комплексное значение которого $\dot{I} = -2$ А. Определить комплексы напряжений на каждом сопротивлении и на выводах цепи. Построить векторную диаграмму цепи.

11.20. Цепь из последовательно включенных двух одинаковых катушек и конденсатора потребляет активную мощность $P = 200$ Вт. При напряжении на выводах $U = 120$ В в цепи протекает ток $I = 4$ А. Составить комплексные выражения для сопротивления цепи и ее полной мощности при условии, что емкостное сопротивление равно индуктивному сопротивлению одной катушки.

11.21. Топографическая диаграмма цепи представлена на рис. 11.6. Составить комплексные выражения для сопротивлений участков этой цепи и всей цепи в соответствии с диаграммой, если $U = 90$ В, $U_1 = 60$ В, $U_3 = 52$ В, $U_4 = 26$ В, $U_5 = 45$ В и $I = 1$ А.

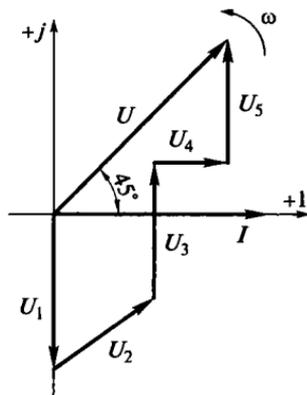
11.22. Определить комплексное значение сопротивления, которое необходимо включить последовательно в цепь в задаче 11.21, чтобы в этой цепи установился режим резонанса напряжений.

11.23. Электрическая цепь состоит из четырех участков, комплексные сопротивления которых $\underline{Z}_1 = 50e^{j45^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_2 = 30e^{-j30^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_3 = 20e^{-j90^\circ}$ Ом и $\underline{Z}_4 = 5$ Ом. Общее сопротивление этой цепи выражается формулой $\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4$. Начертить схему

цепи с обозначением активных и реактивных элементов и определить параметры каждого ее участка. Определить параметры эквивалентной схемы замещения заданной цепи и начертить ее схему.

11.24. Для неразветвленной цепи с двумя источниками синусоидального напряжения (рис. 11.7) определить комплексы тока в цепи, напряжений \dot{U}_{EA} и $\dot{U}_{\text{ИД}}$ и их действующие значения, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 9$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $x_{L1} = 4$ Ом, $x_{L2} = 6$ Ом, $x_{C1} = 10$ Ом, $x_{C2} = 15$ Ом и $e_1 = 169 \sin(314t + 30^\circ)$, а $e_2 = 226 \sin(314t + 120^\circ)$.

11.25. Для цепи, представленной на рис. 11.8, определить комплексное и действующее значения тока, мощность в комплекс-



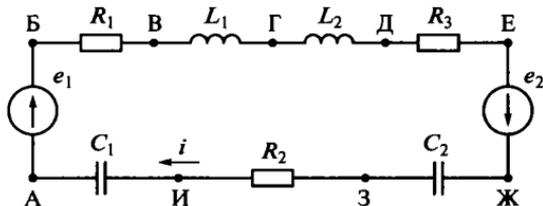


Рис. 11.7. Неразветвленная цепь с двумя источниками синусоидальной ЭДС, включенными согласно

ной форме, полную, активную и реактивную мощности, если e_2 отстает по фазе от e_1 на 90° , $E_1 = 120$ В, $E_2 = 90$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $x_C = 3$ Ом, $x_L = 12$ Ом.

11.26. Используя комплексный метод, вычислить эквивалентные сопротивления (активное и реактивное) последовательной схемы замещения параллельного соединения следующих сопротивлений: активного $R = 50$ Ом, индуктивного $x_L = 70$ Ом и емкостного $x_C = 30$ Ом.

11.27. Для цепи из задачи 11.26 вычислить токи ветвей и общий ток, если напряжение на ее выводах $\dot{U} = 220e^{j30^\circ}$. Построить векторную диаграмму этой цепи.

11.28. Определить комплексным методом напряжение на зажимах источника энергии, токи и мощности в цепи, представленной на рис. 11.9, если $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 9$ Ом, $x_C = 12$ Ом, $x_L = 6$ Ом, $I_1 = 9$ А.

11.29. В цепи, показанной на рис. 11.9, известны токи ветвей $I_1 = 0,8$ А и $I_2 = 0,6$ А. Ток i_1 отстает по фазе от тока i_2 на угол 50° . Определить напряжения U и $U_{ГБ}$, если $R_1 = 25$ Ом и $x_L = 15$ Ом, используя комплексный метод.

11.30. Группа электродвигателей присоединена к сети переменного тока с напряжением $\dot{U} = 220$ В. Общий ток этих электродвигателей 55 А, а их активная мощность 7 кВт. Для улучшения

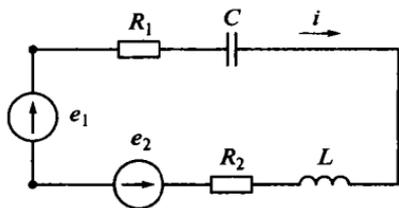


Рис. 11.8. Неразветвленная цепь с двумя источниками синусоидальной ЭДС, включенными встречно

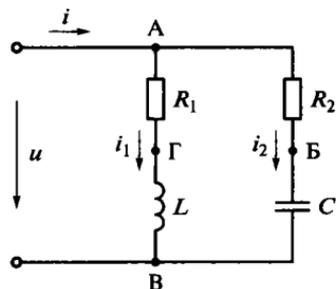


Рис. 11.9. Схема разветвленной цепи переменного тока

коэффициента мощности до 0,95 параллельно электродвигателям присоединена батарея конденсаторов с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Определить реактивное сопротивление батареи конденсаторов и составить комплексные выражения для тока двигателей, тока батареи конденсаторов и общего тока потребителей.

11.31. К сети переменного тока с напряжением $\dot{U} = 220$ В присоединен потребитель, состоящий из трех параллельно соединенных сопротивлений. Комплексные выражения этих сопротивлений соответственно $\underline{Z}_1 = (100 + j60)$ Ом, $\underline{Z}_2 = (40 - j60)$ Ом и $\underline{Z}_3 = 120$ Ом. Составить комплексные выражения для токов ветвей цепи, общего тока потребителя и полной мощности цепи. Построить векторную диаграмму.

11.32. Определить характер и значение сопротивления, которое следует включить в цепь из задачи 11.31 последовательно с потребителем, чтобы в этой цепи установился резонанс напряжений.

11.33. Найти все токи в цепи, представленной на рис. 11.10, и напряжения на участках АБ и БВ, если $R_1 = 400$ Ом, $R_2 = x_L = 200$ Ом, $x_C = 800$ Ом, $\dot{U} = 220$ В, используя комплексный метод.

11.34. Определить комплексные напряжения на участках АБ, БВ и на выводах АВ цепи, представленной на рис. 11.11, если при $R_1 = 200$ Ом, $C = 10$ мкФ, $R_2 = 100$ Ом, $L = 0,5$ Гн и частоте $f = 400$ Гц в ветви с сопротивлением R_1 ток $\dot{I}_{R1} = 1,5$ А. Построить векторную диаграмму этой цепи.

11.35. Найти комплексное напряжение на выводах АВ цепи, показанной на рис. 11.11, и токи в ее ветвях при значениях параметров цепи из задачи 11.34 и общем токе $I = 2$ А. Построить векторную диаграмму цепи.

11.36. Два генератора с внутренними сопротивлениями $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = j0,2$ Ом и ЭДС $\dot{E}_1 = 100$ В и $\dot{E}_2 = 150$ В, соединенных параллельно, имеют общую нагрузку. Найти комплексные токи ге-

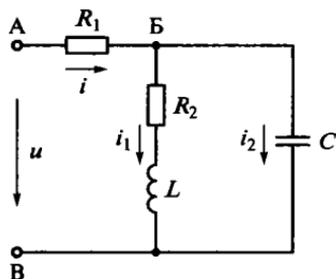


Рис. 11.10. Схема цепи к задаче 11.33

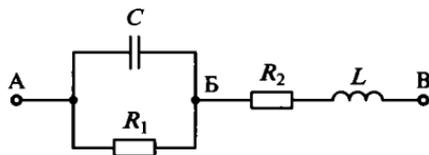


Рис. 11.11. Схема цепи к задаче 11.34

нераторов и нагрузки, если комплексное сопротивление нагрузки $Z_3 = (2 + j2)$ Ом. Построить векторную диаграмму данной цепи.

11.37. Определить комплексные токи в цепи из задачи 11.36 при $\dot{E}_1 = 100$ В и $\dot{E}_2 = -j\dot{E}_1$. Построить векторную диаграмму этой цепи.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

11.5. $Z = (55 + j31,7) = 63,5e^{j30^\circ}$ Ом; $z = 63,5$ Ом; $R = 55$ Ом; $x_L = 31,7$ Ом.

11.6. $2,5e^{-j90^\circ}$ А; $220e^{-j45^\circ}$ В.

11.7. $u = 12\sqrt{2}\sin(\omega t - 180^\circ)$ В; $i = 50\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)$ мА.

11.8. $-j12$ В; 50 мА; $j12$ В; -50 мА.

11.9. $100e^{j60^\circ}$ В; $100e^{j180^\circ}$ В; $100e^{-j60^\circ}$ В; 120° .

11.10. 0.

11.11. $105,8e^{-j19^\circ 6'} = 105,8(\cos 19^\circ 6' - j\sin 19^\circ 6') = (100 - j34,6)$ В.

11.12. $(-10 + j17,3)$ В; $(-14 - j17,3)$ В; -24 В; -48 В; $u = 48\sqrt{2}\sin(\omega t - 180^\circ)$ В.

11.13. $\dot{U} = 220$ В; $i = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^\circ)$ А; $u = 220\sqrt{2}\sin \omega t$.

11.14. $j120 = 120e^{j90^\circ}$ В; 30° .

11.15. 0; $(60\sqrt{3} + j60) = 120e^{j30^\circ}$ В.

11.16. 1 А; 220 В; $(190,5 + j110) = 220e^{j30^\circ}$ Ом; 190,5 Ом; 110 Ом.

11.17. 128,6 Ом; 487,7 мГн.

11.18. 52 Ом; 38,2 мГн.

11.19. $-200 = 200e^{j180^\circ}$ В; $-j300 = 300e^{-j90^\circ}$ В; $j100 = 100e^{j90^\circ}$ В; $-200 - j200 = 200\sqrt{2}e^{-j135^\circ}$ В.

11.20. $(12,5 + j27,3)$ Ом; $(200 + j436,3)$ В·А.

11.21. $-j60$ Ом; $(37,6 + j26,6)$ Ом; $j52$ Ом; 26 Ом; $j45$ Ом; $(63,6 + j63,6)$ Ом.

11.22. $-j63,6$ Ом.

11.23. Схема цепи показана на рис. 11.12, а; $R_1 = x_{L1} = 25\sqrt{2}$ Ом; $R_2 = 15\sqrt{3}$ Ом; $x_{C1} = 15$ Ом; $x_{L2} = 20$ Ом; $R_3 = 5$ Ом; $R_{\text{экв}} = 28,2$ Ом; $x_{L\text{экв}} = 19$ Ом; эквивалентная схема цепи приведена на рис. 11.12, б.

11.24. $\dot{I} = 8e^{j120^\circ} = (-4 + j6,94)$ А; $I = 8$ А; $\dot{U}_{\text{EA}} = 220e^{j6^\circ} = (217 + j23,6)$ В; $\dot{U}_{\text{ид}} = 123e^{-j161^\circ} = (-116 - 40)$ В; $I = 8$ А; $U_{\text{EA}} = 220$ В; $U_{\text{ид}} = 123$ В.

11.25. $\dot{I} = 10e^{-j73^\circ 44'}$ А; $I = 10$ А; $\tilde{S} = 1500e^{j36^\circ 52'} = (1200 + j900)$ В·А; $S = 1500$ В·А; $P = 1200$ Вт; $Q_L = 900$ вар.

11.26. $R_{\text{экв}} = 26,2$ Ом; $x_{C\text{экв}} = 25$ Ом.

11.27. $4,4e^{j30^\circ}$ А; $3,14e^{-j60^\circ}$ А; $7,33e^{j120^\circ}$ А; $6,06e^{j73^\circ 36'}$ А.

11.28. $\dot{U} = 72 + j54 = 90e^{j37^\circ}$ В; $U = 90$ В; $\dot{I}_1 = I_1 = 9$ А; $\dot{I}_2 = j6 = 6e^{j90^\circ}$ А; $I_2 = 6$ А; $\dot{I} = 9 + j6 = 10,8e^{j34^\circ}$ А; $I = 10,8$ А; $\tilde{S} = 972 + j54 = 973,5e^{j3^\circ}$ В·А; $S = 973,5$ В·А; $P = 972$ Вт; $Q_L = 54$ вар.

11.29. 23,3 В; 17,9 В.

11.30. Два варианта ответа: 4 Ом; $55e^{-j54^\circ 39'}$ А; $55,3e^{j90^\circ}$ А; $33,5e^{j18^\circ 12'}$ А или 6,4 Ом; $55e^{j54^\circ 39'}$ А; $34,4e^{j90^\circ}$ А; $33,5e^{-j18^\circ 12'}$ А.

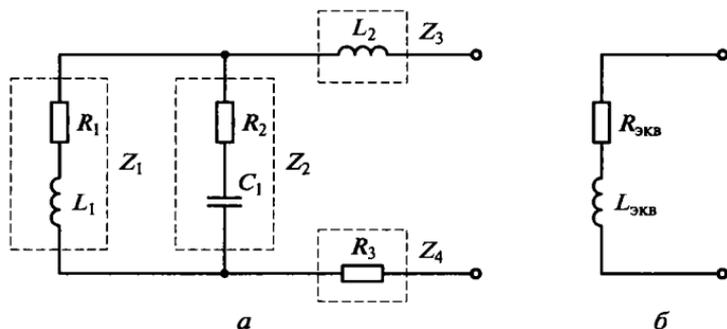


Рис. 11.12. Схема электрической цепи, построенная к задаче 11.23 (а), и ее эквивалентная схема замещения (б)

11.31. $\dot{I}_1 = 1,61 - j0,97 = 1,88e^{-j31^{\circ}4'}$ А; $\dot{I}_2 = 1,69 + j2,54 = 3,05e^{j56^{\circ}22'}$ А; $\dot{I}_3 = 1,83$ А; $\dot{I} = 5,13 + j1,57 = 5,36e^{j17^{\circ}}$ А; $\dot{S} = 1128,6 - j345,4 = 1180e^{j17^{\circ}}$ В · А.

11.32. Индуктивное сопротивление 12 Ом.

11.33. $\dot{I} = 0,29 - j0,065 = 0,36e^{-j12^{\circ}38'}$ А; $\dot{I}_1 = 0,325 - j0,195 = 0,379e^{-j31^{\circ}}$ А; $\dot{I}_2 = -0,0325 + j0,13 = 0,134e^{j104^{\circ}2'}$ А; $\dot{U}_{AB} = 116 - j26 = 119e^{j12^{\circ}38'}$ В; $\dot{U}_{BB} = 104 + j26 = 107e^{j14^{\circ}2'}$ В.

11.34. $\dot{U}_{AB} = 300$ В; $\dot{U}_{BB} = -9325 + j2639 = 9691e^{j164^{\circ}12'}$ В; $\dot{U}_{AB} = -9025 + j2639 = 9403e^{j163^{\circ}42'}$ В; векторная диаграмма цепи показана на рис. 11.13, а.

11.35. $215 + j2437 = 2446e^{j85^{\circ}}$ В; $0,08 - j0,38 = 0,39e^{-j78^{\circ}7'}$ А; $1,92 + j0,38 = 1,96e^{j11^{\circ}12'}$ А; векторная диаграмма цепи показана на рис. 11.13, б.

11.36. $\dot{I}_1 = 14,85 + j109,35 = 110e^{j82^{\circ}16'}$ А; $\dot{I}_2 = 14,85 - j140,65 = 141,43e^{-j84^{\circ}}$ А; $\dot{I}_3 = 29,73 - j31,21 = 43,1e^{-j46^{\circ}23'}$ А; векторная диаграмма цепи показана на рис. 11.14, а.

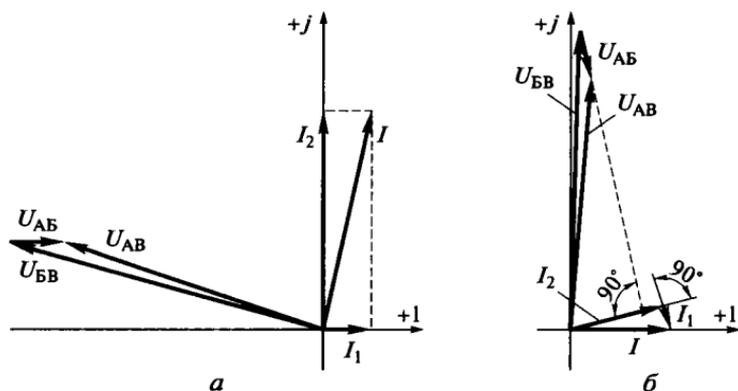


Рис. 11.13. Векторные диаграммы цепи, построенные к задаче 11.34 (а) и к задаче 11.35 (б)

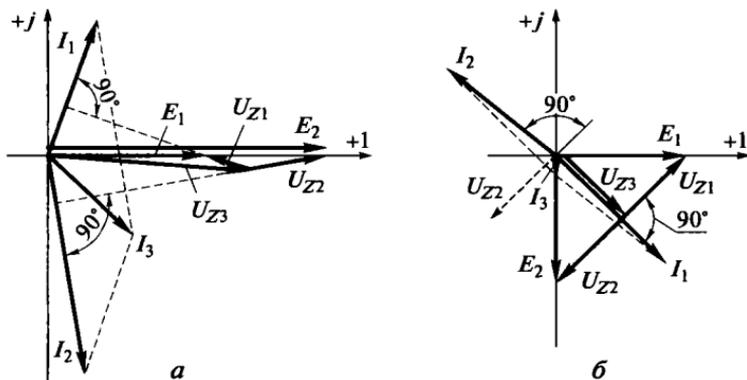


Рис. 11.14. Векторные диаграммы цепи, построенные к задаче 11.36 (а) и к задаче 11.37 (б)

11.37. $\dot{I}_1 = 249,7 - j262,2 = 362,08e^{-j46^\circ 24'} \text{ A}$; $\dot{I}_2 = -250,3 + j237,8 = 345,25e^{j136^\circ 28'} \text{ A}$; $\dot{I}_3 = -0,6 - j24,38 = 24,39e^{-j91^\circ 24'} \text{ A}$; векторная диаграмма цепи показана на рис. 11.14, б.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ

12.1. Гармонические составляющие периодических кривых

Задача 12.1. Разложить в тригонометрический ряд периодическую несинусоидальную ЭДС $e(\omega t)$, график которой имеет вид трапеции (рис. 12.1, *a*), аналитическим методом.

Решение. 1. Основные сведения об аналитическом методе разложения несинусоидальных токов и напряжений в тригонометрический ряд синусоидальных составляющих. Несинусоидальные токи и напряжения могут возникать как в линейных цепях (цепях с линейными элементами), так и в нелинейных. В линейных цепях несинусоидальный ток возникает при наличии несинусоидального напряжения. При синусоидальном напряжении источника энергии получить несинусоидальный ток и несинусоидальное напряжение на участках цепи можно, если в этой цепи имеются элементы с нелинейной вольт-амперной характеристикой.

Из математики известно, что любую несинусоидальную периодическую функцию с помощью теоремы Фурье можно представить в виде тригонометрического ряда — суммы ряда составляющих, одна из которых постоянная, а другие являются синусоидальными функциями с кратными частотами. Возможность представления периодической несинусоидальной величины (тока, напряжения и т. п.) рядом синусоидальных составляющих позволяет использовать при расчете несинусоидальных цепей известные методы расчета синусоидальных цепей.

Аналитическим выражением несинусоидальной периодической функции является тригонометрический ряд

$$y(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (12.1)$$

где A_0 — постоянная составляющая; $A_1 \dots A_k$ — амплитуды синусоид; $\psi_1 \dots \psi_k$ — начальные фазы синусоид.

Синусоидальные составляющие называются *гармоническими*, или *гармониками*. Гармоника, имеющая период, равный периоду несинусоидальной кривой, называется *первой*, или *основной гармоникой*. Все другие гармоники называются *высшими*.

Выражение (12.1) можно преобразовать к более удобной записи, содержащей синусы и косинусы с нулевыми начальными фазами.

Применив известную из тригонометрии формулу синуса суммы двух углов

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = A_k \sin k\omega t \cdot \cos \psi_k + A_k \cos k\omega t \cdot \sin \psi_k$$

и обозначив постоянные величины

$$A_k \cos \psi_k = B_k; \quad A_k \sin \psi_k = C_k, \quad (12.2)$$

получим выражение для любой k -й составляющей ряда

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t.$$

Таким образом, тригонометрический ряд несинусоидальной функции $y(\omega t)$, содержащий синусы и косинусы с нулевыми начальными фазами, имеет вид

$$y(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t. \quad (12.3)$$

Если закон изменения несинусоидальной кривой $y(\omega t)$ представлен в виде аналитического выражения (уравнения), коэффициенты A_0 , B_k и C_k ряда (12.3) можно определить аналитическим методом с помощью следующих выражений:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\omega t; \\ B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin k\omega t d\omega t; C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos k\omega t d\omega t. \quad (12.4)$$

Обратный переход от ряда (12.3) к ряду (12.1) легко осуществить, вычислив коэффициенты ряда (12.1) и начальные фазы гармоник по формулам, полученным из выражения (12.2):

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \quad \operatorname{tg} \psi_k = \frac{C_k}{B_k}.$$

Электротехнические периодически изменяющиеся величины чаще всего обладают каким-нибудь видом симметрии (относительно оси абсцисс, оси ординат, начала координат) или комбинацией этих видов.

Можно показать, что при каждом виде симметрии какие-то из коэффициентов рядов (12.1) и (12.3) равны нулю, и ряды упрощаются.

Симметрия относительно оси абсцисс характеризуется уравнением

$$y(\omega t) = -y(\omega t + \pi). \quad (12.5)$$

Функция, симметричная относительно оси абсцисс, не содержит постоянной составляющей и гармонических составляющих четного порядка.

Запишем функции $y(\omega t)$ и $y(\omega t + \pi)$ как ряды вида (12.1)

$$y(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots; \quad y(\omega t + \pi) = A_0 - A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \\ + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) - A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots$$

Согласно выражению (12.5) $y(\omega t) + y(\omega t + \pi) = 0$.

Тогда

$$2A_0 + 2A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_4 \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots = 0.$$

Выполнение этого равенства возможно, если $A_0 = 0$, $A_2 = 0$, $A_4 = 0$ и т. д., что и требовалось показать.

Симметрия относительно начала координат характеризуется равенством: $y(\omega t) = -y(-\omega t)$.

Данная функция содержит только ряд синусов:

$$y(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots$$

Симметрия относительно оси ординат характеризуется равенством $y(\omega t) = y(-\omega t)$.

Функция, симметричная относительно оси ординат, не содержит синусов:

$$y(\omega t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots$$

2. Представление заданной кривой в виде тригонометрического ряда. Показанная на рис. 12.1, *a* кривая имеет два вида симметрии: относительно оси абсцисс, так как $e(\omega t) = -e(\omega t + \pi)$, и относительно начала координат, так как $e(\omega t) = -e(-\omega t)$.

При симметрии относительно оси абсцисс отсутствуют постоянная составляющая и гармонические составляющие четного порядка. При симметрии относительно начала координат разложение содержит только синусы нечетного порядка.

Таким образом, общий вид тригонометрического ряда заданной кривой

$$e(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t \dots \quad (12.6)$$

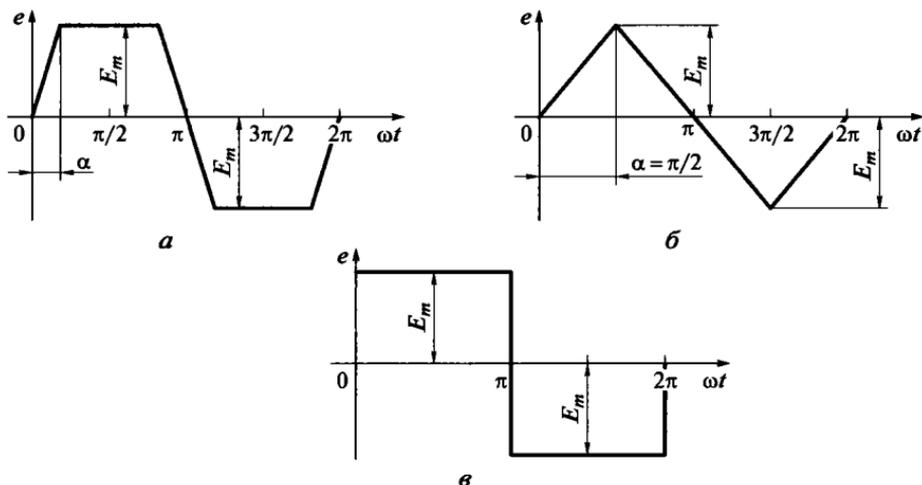


Рис. 12.1. Периодические несинусоидальные функции:
a — трапецевидная; *б* — треугольная; *в* — прямоугольная

Решение задачи сводится к определению коэффициентов ряда (12.6): $B_1, B_3, B_5, \dots, B_k$ (где $k = 1, 3, 5, \dots$ — целое нечетное число) через указанные на графике параметры заданной кривой.

3. Определение коэффициента B_k для ряда (12.6) заданной кривой, имеющей вид трапеции (см. рис. 12.1, *a*), аналитическим методом. Фигуру, ограниченную заданной кривой, можно разбить на четыре равных по площади участка. Тогда согласно выражению (12.4) коэффициент B_k можно записать в следующем виде:

$$B_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e \sin k\omega t \, d\omega t.$$

В первой четверти периода кривая характеризуется разными уравнениями при разных значениях ωt . Запишем для заданной кривой интервалы значений ωt и соответствующие им уравнения ЭДС:

$$0 \dots \alpha, e = \frac{E_m}{\alpha} \omega t; \quad \alpha \dots \pi/2, e = E_m.$$

Подставив значения ωt и соответствующие им выражения для ЭДС в формулу B_k , получим

$$B_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e \sin k\omega t \, d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{E_m}{\alpha} \omega t \sin k\omega t \, d\omega t + \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} E_m \sin k\omega t \, d\omega t.$$

Так как

$$\int \omega t \sin k\omega t d\omega t = \frac{\sin k\omega t}{k^2} - \frac{\omega t \cos k\omega t}{k} = \frac{\sin k\omega t - k\omega t \cos k\omega t}{k^2},$$

получим

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{4E_m}{\pi\alpha k^2} (\sin k\omega t - k\omega t \cos k\omega t) \Big|_0^\alpha - \frac{4E_m}{\pi k} \cos k\omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{4E_m}{\pi\alpha k^2} (\sin k\alpha - k\alpha \cos k\alpha) - \frac{4E_m}{\pi k} \left(\cos \frac{k\pi}{2} - \cos k\alpha \right) = \\ &= \frac{4E_m}{\pi k} \left(\frac{\sin k\alpha}{\alpha k} - \cos k\alpha - \cos \frac{k\pi}{2} + \cos k\alpha \right). \end{aligned}$$

В этом выражении $\cos(k\pi/2) = 0$, так как согласно виду симметрии заданной кривой k — целое нечетное число. Тогда

$$B_k = \frac{4E_m}{\pi\alpha k^2} \sin k\alpha. \quad (12.7)$$

Таким образом, согласно выражениям (12.6) и (12.7) тригонометрический ряд заданной кривой (трапеции) имеет вид

$$\begin{aligned} e &= \frac{4E_m}{\pi\alpha} \left(\sin \alpha \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \cdot \sin 3\omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \cdot \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (12.8) \end{aligned}$$

Задача 12.2. Разложить в тригонометрический ряд периодическую несинусоидальную ЭДС $e(\omega t)$, график которой имеет вид треугольника (рис. 12.1, б), аналитическим методом.

Решение. Кривая заданного вида является частным случаем задачи 12.1 при условии, что $\alpha = \pi/2$. В этом случае тригонометрический ряд может быть получен подстановкой в формулу (12.8) значения $\alpha = \pi/2$:

$$e = \frac{8E_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

Задача 12.3. Разложить в тригонометрический ряд периодическую несинусоидальную ЭДС $e(\omega t)$, график которой имеет вид прямоугольника (рис. 12.1, в), аналитическим методом.

Решение. Кривая заданного вида является частным случаем задачи 12.1 при условии, что $\alpha = 0$. В этом случае рассмотрим интервалы значений и соответствующие им ЭДС:

$$0 \dots \pi, e = E_m; \quad \pi \dots 2\pi, e = -E_m.$$

При этом согласно выражению (12.4) и с учетом того, что k согласно виду симметрии — нечетное число, коэффициент

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E_m \sin k\omega t \, d\omega t - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} E_m \sin k\omega t \, d\omega t = \\ &= \frac{E_m}{k\pi} \left(-\cos k\omega t \Big|_0^{\pi} + \cos k\omega t \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{4E_m}{k\pi}. \end{aligned}$$

В этом случае согласно выражению (12.6) получим тригонометрический ряд заданной ЭДС в виде

$$e = \frac{4E_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

Задача 12.4. Периодический ток, заданный графиком, представленным на рис. 12.2, а, разложить в тригонометрический ряд графоаналитическим методом.

Решение. 1. Основные сведения о графоаналитическом методе определения коэффициентов тригонометрического ряда. Этот метод является более популярным, чем аналитический, так как не требует математиче-

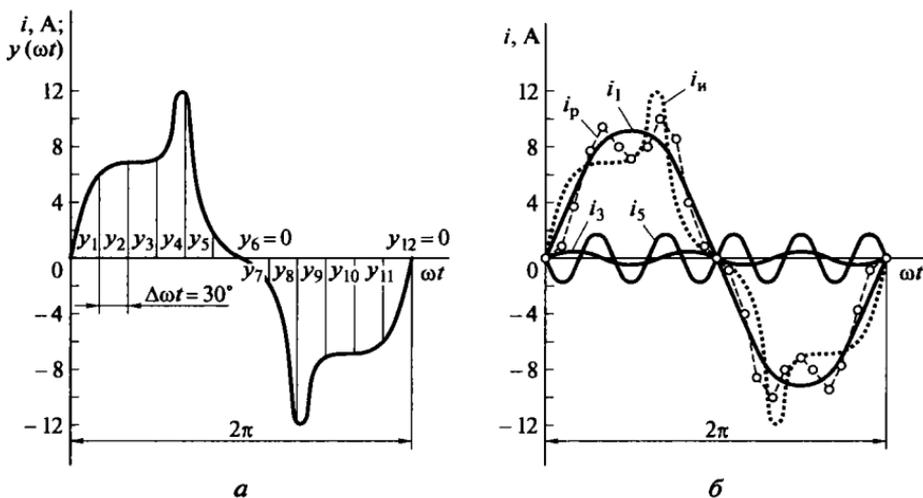


Рис. 12.2. График несинусоидальной периодической кривой $y(\omega t)$ (а) и графики ее гармонических составляющих (б)

ского представления разлагаемой в ряд функции и обеспечивает получение приближенных, но вполне приемлемых значений коэффициентов. Заключается метод в следующем:

- на графике заданной периодической кривой $y(\omega t)$, например показанной на рис. 12.2, *a*, разбивают отрезок, соответствующий периоду, на m равных частей $\Delta\omega t = 2\pi/m$ и из концов разбиения проводят ординаты y_n (где $n = 1, 2, 3, \dots$) кривой $y(\omega t)$;

- определяют значения ординат y_n в выбранном масштабе.

Постоянная составляющая и коэффициенты ряда (12.3) определяются по приближенным формулам, полученным из выражений (12.4):

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\omega t \approx \frac{1}{2\pi} \sum_1^m y \Delta\omega t = \frac{\Delta\omega t \sum_1^m y}{2\pi} = \frac{2\pi \sum_1^m y}{m \cdot 2\pi} = \frac{\sum_1^m y}{m}; \quad (12.9)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin k\omega t d\omega t \approx \frac{2}{m} \sum_1^m y \sin k\omega t; \quad (12.10)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos k\omega t d\omega t \approx \frac{2}{m} \sum_1^m y \cos k\omega t. \quad (12.11)$$

Результаты определения коэффициентов тем точнее, чем меньше взят интервал $\Delta\omega t$ между ординатами.

2. Определение коэффициентов тригонометрического ряда заданного тока графоаналитическим методом. Разделим отрезок, соответствующий периоду (см. рис. 12.2, *a*), на $m = 12$ равных частей $\Delta\omega t = 2\pi/m = 30^\circ$ и из концов этих частей проведем ординаты.

Составим таблицу данных для определения постоянной составляющей A_0 и коэффициентов B_1 и C_1 первой гармоники (табл. 12.1).

Измерим ординаты заданной кривой в конце каждой части разбиения и, учитывая указанный на рис. 12.2, *a* масштаб тока ($m_i = 4$ А/см), найдем значения тока, соответствующие ординатам. Результаты измерения занесем в табл. 12.1. Заполним остальные графы таблицы, выполнив необходимые расчеты.

Определим постоянную составляющую A_0 и коэффициенты B_1 и C_1 первой гармоники согласно формулам (12.9)... (12.11):

$$A_0 = \frac{\sum_1^m i}{m} = \frac{\sum_1^{12} i}{12} = 0;$$

$$B_1 = \frac{2}{m} \sum_1^m i \sin \omega t = \frac{2}{12} \sum_1^{12} i \sin \omega t = \frac{53,8}{6} = 9 \text{ А};$$

Данные для определения коэффициентов A_0 , B_1 и C_1

Номер ординаты	ωt , град	i , А	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$i \sin \omega t$	$i \cos \omega t$
1	30	5,8	0,50	0,86	2,9	5,0
2	60	6,8	0,86	0,50	5,8	3,4
3	90	7,0	1,00	0	7,0	0
4	120	11,8	0,86	-0,50	10,1	-5,9
5	150	2,2	0,50	-0,86	1,1	-1,9
6	180	0	0	-1,00	0	0
7	210	-2,2	-0,50	-0,86	1,1	1,9
8	240	-11,8	-0,86	-0,50	10,1	5,9
9	270	-7,0	-1,00	0	7,0	0
10	300	-6,8	-0,86	0,50	5,8	-3,4
11	330	-5,8	-0,50	0,86	2,9	-5,0
12	360	0	0	1,00	0	0
Сумма	—	0	—	—	53,8	0

$$C_1 = \frac{2}{m} \sum_1^m i \cos \omega t = \frac{2}{12} \cdot 0 = 0.$$

Равенство нулю постоянной составляющей A_0 и коэффициента C_1 следовало ожидать, так как заданная кривая содержит два вида симметрии: относительно оси абсцисс и относительно начала координат. В этом случае кривая может быть представлена рядом, состоящим только из синусоидальных гармоник нечетного порядка с амплитудами B_1 , B_3 , B_5 и т. д.

Для определения коэффициентов B_3 и B_5 составим табл. 12.2.

Определим коэффициенты B_3 и B_5 согласно формуле (12.10):

$$B_3 = \frac{2}{12} \sum_1^{12} i \sin 3\omega t = \frac{2}{6} = 0,33 \text{ А};$$

$$B_5 = \frac{2}{12} \sum_1^{12} i \sin 5\omega t = \frac{-9,8}{6} = -1,63 \text{ А}.$$

Данные для определения коэффициентов B_3 и B_5

Номер ординаты	ωt , град	i , А	$3\omega t$, град	$\sin 3\omega t$	$i \sin 3\omega t$	$5\omega t$, град	$\sin 5\omega t$	$i \sin 5\omega t$
1	30	5,8	90	1	5,8	150	0,50	2,9
2	60	7,0	180	0	0	300	-0,86	-5,8
3	90	7,1	270	-1	-7,0	450	1,00	7,0
4	120	11,8	360	0	0	600	-0,86	-10,1
5	150	2,0	450	1	2,2	750	0,50	1,1
6	180	0	540	0	0	900	0	0
7	210	-2,0	630	-1	2,2	1050	-0,50	1,1
8	240	-11,8	720	0	0	1200	0,86	-10,1
9	270	-7,1	810	1	-7,0	1350	-1,00	7,0
10	300	-7,0	900	0	0	1500	0,86	-5,8
11	330	-5,8	990	-1	5,8	1650	-0,50	2,9
12	360	0	1080	0	0	1800	0	0
Сумма	—	0	—	—	2,0	—	—	-9,8

Проведя самостоятельно аналогичные вычисления, получим коэффициент $B_7 = 1,63$ А.

3. Составление уравнения заданного графиком периодического тока в виде тригонометрического ряда. Мгновенное значение заданного тока (в амперах) согласно выражению (12.3) имеет вид

$$i(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + B_7 \sin 7\omega t + \dots = \\ = 9 \sin \omega t + 0,33 \sin 3\omega t - 1,63 \sin 5\omega t + 1,63 \sin 7\omega t - \dots \quad (12.12)$$

Задача 12.5. Построить несколько первых гармоник и суммарную кривую тока по данным задачи 12.4.

Решение. 1. Особенности построения гармоник. При построении гармоник необходимо учитывать следующие особенности:

- так как градуировка оси абсцисс выполняется в масштабе первой гармоники, то на отрезке $\omega t = 2\pi$ укладывается k полных циклов k -й гармоники;

- откладывая по оси абсцисс начальную фазу k -й гармоники, необходимо пересчитать ее на масштаб основной гармоники, т. е. вместо ψ_k следует отложить ψ_k/k .

2. Построение гармоник тока. На рис. 12.2, б построены первые три гармоники i_1, i_3, i_5 тригонометрического ряда тока (12.12) с учетом указанных особенностей построения. Кроме того, приведены исходная кривая i_n и результирующая кривая i_p сложения трех гармоник (для сравнения с исходной кривой). Для построения кривой i_p для ряда значений ωt необходимо сложить ординаты гармоник и провести кривую через полученные точки.

12.2. Электрическая цепь при несинусоидальном периодическом напряжении на ее входе

Задача 12.6. Электрическая цепь (рис. 12.3), состоящая из катушки индуктивности, обладающей активным сопротивлением $R = 20$ Ом и индуктивностью $L = 0,05$ Гн, и последовательно соединенного с ней конденсатора емкостью $C = 15$ мкФ, питается от несинусоидального источника с напряжением (в вольтах) $u = 150 + 200 \sin(\omega_1 t + 30^\circ) + 100 \sin(3\omega_1 t - 45^\circ)$. Циклическая частота первой гармоники $f = 50$ Гц.

Составить уравнения мгновенных значений тока в цепи и напряжений на ее участках (катушке и конденсаторе). Определить действующие значения тока и напряжения на зажимах цепи, коэффициенты искажения $k_{иu}$ и $k_{иi}$ соответственно несинусоидальных напряжения и тока и активную мощность цепи.

Решение. 1. Методика расчета электрических цепей с несинусоидальными напряжениями. Возможность выражения несинусоидального напряжения суммой постоянной и синусоидальных составляющих позволяет представить несинусоидальное напряжение как общее напряжение последовательного соединения источников постоянного напряжения и источников синусоидальных напряжений:

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k.$$

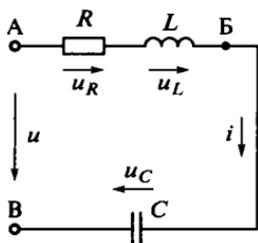


Рис. 12.3. Схема электрической RLC-цепи

Общий ток в цепи можно определить как результат наложения частичных токов от каждого источника в отдельности. Следовательно, мгновенное значение общего тока на любом участке цепи равно алгебраической сумме мгновенных значений токов от каждого источника:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k.$$

Таким образом, расчет линейной цепи с несинусоидальной ЭДС выполняется на основе принципа наложения и сводится к определению постоянной составляющей и синусоидальных токов от каждой из составляющих напряжения.

При выполнении расчета необходимо учитывать зависимость реактивных сопротивлений от частоты.

Для рассматриваемой задачи заданное напряжение несинусоидального источника питания имеет вид

$$u = U_0 + u_1 + u_3.$$

Здесь

$$U_0 = 150 \text{ В}; u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_{U1}) = 200 \sin(\omega t + 30) \text{ В};$$

$$u_3 = U_{3m} \sin(\omega t + \psi_{U3}) = 100 \sin(3\omega t - 45^\circ) \text{ В}.$$

Следовательно, ток в цепи должен содержать постоянную составляющую, первую и третью гармоники:

$$i = I_0 + i_1 + i_3.$$

2. Расчет постоянной составляющей и первой гармоники тока цепи. Сопротивление рассматриваемой цепи для постоянной составляющей тока равно бесконечности, так как в этой цепи имеется конденсатор. Следовательно, постоянная составляющая тока равна нулю: $I_0 = 0$.

Определим сопротивления цепи для первой гармоники тока:

$$R = 20 \text{ Ом}; x_{L1} = \omega L = 2\pi fL = 314 \cdot 0,05 = 15,7 \text{ Ом};$$

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{10^6}{314 \cdot 15} = 212,3 \text{ Ом};$$

$$z_1 = \sqrt{R^2 + (x_{L1} - x_{C1})^2} = \sqrt{20^2 + (15,7 - 212,3)^2} = 197,6 \text{ Ом}.$$

Амплитуда первой гармоники тока

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{z_1} = \frac{200}{197,6} = 1,012 \text{ А}.$$

Общее реактивное сопротивление цепи для первой гармоники тока имеет емкостный характер, так как $x_{C1} > x_{L1}$, следовательно,

первая гармоника тока опережает первую гармонику напряжения на угол

$$\varphi_1 = \arccos \frac{R}{z_1} = \arccos \frac{20}{197,6} = 84^\circ 11'.$$

Начальная фаза первой гармоники тока

$$\psi_{I1} = \psi_{U1} + \varphi_1 = 30 + 84^\circ 11' = 114^\circ 11'.$$

Мгновенное значение первой гармоники тока

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{I1}) = 1,012 \sin(\omega t + 114^\circ 11') \text{ А.}$$

3. Расчет третьей гармоники тока цепи. Определим сопротивления цепи для третьей гармоники тока:

$$R = 20 \text{ Ом}; x_{L3} = 3\omega L = 3x_{L1} = 3 \cdot 15,7 = 47,1 \text{ Ом};$$

$$x_{C3} = \frac{1}{3\omega C} = \frac{x_{C1}}{3} = \frac{212,3}{3} = 70,8 \text{ Ом};$$

$$z_3 = \sqrt{R^2 + (x_{L3} - x_{C3})^2} = \sqrt{20^2 + (47,1 - 70,8)^2} = 31 \text{ Ом.}$$

Амплитуда третьей гармоники тока

$$I_{3m} = \frac{U_{3m}}{z_3} = \frac{100}{31} = 3,225 \text{ А.}$$

Общее реактивное сопротивление цепи для третьей гармоники тока, как и для первой гармоники, имеет емкостный характер, поскольку $x_{C3} > x_{L3}$. Следовательно, третья гармоника тока опережает третью гармонику напряжения на угол

$$\varphi_3 = \arccos \frac{R}{z_3} = \arccos \frac{20}{31} = 49^\circ 49'.$$

Начальная фаза третьей гармоники тока

$$\psi_{I3} = \psi_{U3} + \varphi_3 = -45 + 49^\circ 49' = 4^\circ 49'.$$

Мгновенное значение третьей гармоники тока

$$i_3 = I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{I3}) = 3,225 \sin(3\omega t + 4^\circ 49') \text{ А.}$$

4. Составление уравнения мгновенного значения общего тока в цепи. Согласно принципу наложения ток (в амперах)

$$i = I_0 + i_1 + i_3 = 1,012 \sin(\omega t + 114^\circ 11') + 3,225 \sin(3\omega t + 4^\circ 49').$$

5. Составление уравнения мгновенного значения напряжения на катушке. Определим сопротивления z_k катушки для каждой из гармоник тока:

$$z_{к1} = \sqrt{R^2 + x_{L1}^2} = \sqrt{20^2 + 15,7^2} = 25,4 \text{ Ом};$$

$$z_{к3} = \sqrt{R^2 + x_{L3}^2} = \sqrt{20^2 + 47,1^2} = 51,2 \text{ Ом}.$$

Амплитудные значения гармоник напряжения на катушке составят:

$$U_{АБ 1m} = I_{1m} z_{к1} = 1,012 \cdot 25,4 = 0,3 \text{ В};$$

$$U_{АБ 3m} = I_{3m} z_{к3} = 3,225 \cdot 51,2 = 165,1 \text{ В}.$$

Найдем углы сдвига фаз между соответствующими гармониками напряжения и тока катушки:

$$\varphi_{к1} = \arccos \frac{R}{z_{к1}} = \arccos \frac{20}{25,4} = 38^\circ 4';$$

$$\varphi_{к3} = \arccos \frac{R}{z_{к3}} = \arccos \frac{20}{51,2} = 67^\circ.$$

Определим начальные фазы гармоник напряжения $u_{АБ}$ на катушке с учетом того, что гармонические составляющие напряжения на катушке индуктивности опережают соответствующие гармоники тока на углы $\varphi_{к1}$ и $\varphi_{к3}$:

$$\psi_{U_{АБ 1}} = \psi_{I1} + \varphi_{к1} = 114^\circ 11' + 38^\circ 4' = 152^\circ 15';$$

$$\psi_{U_{АБ 3}} = \psi_{I3} + \varphi_{к3} = 4^\circ 49' + 67^\circ = 71^\circ 49'.$$

Найдем напряжение на катушке, В,

$$\begin{aligned} u_{АБ} &= U_{АБ 1m} \sin(\omega t + \psi_{U_{АБ 1}}) + U_{АБ 3m} \sin(3\omega t + \psi_{U_{АБ 3}}) = \\ &= 0,3 \sin(\omega t + 152^\circ 15') + 165,1 \sin(3\omega t + 71^\circ 49'). \end{aligned}$$

6. Составление уравнения мгновенного значения напряжения на конденсаторе. Напряжение на конденсаторе u_C содержит постоянную составляющую $U_0 = 150 \text{ В}$, поскольку при включении в сеть конденсатор заряжается от постоянной составляющей напряжения до значения этой составляющей. Кроме того, напряжение u_C содержит первую и третью гармоники от протекающего в цепи тока i .

Запишем выражение для напряжения на конденсаторе с учетом того, что гармоники u_C отстают от соответствующих гармоник тока на 90° :

$$\begin{aligned} u_C &= U_0 + I_{1m} x_{C1} \sin(\omega t + \psi_{I1} - 90^\circ) + I_{3m} x_{C3} \sin(3\omega t + \psi_{I3} - 90^\circ) = \\ &= 150 + 1,012 \cdot 212,3 \sin(\omega t + 114^\circ 11' - 90^\circ) + 3,225 \cdot 70,8 \sin(3\omega t + \\ &+ 4^\circ 49' - 90^\circ) = 150 + 214,8 \sin(\omega t + 24^\circ 11') + 228,3 \sin(3\omega t - 85^\circ 11') \text{ В}. \end{aligned}$$

7. Определение действующих значений тока и напряжения цепи. Действующее значение переменного несинусоидального тока определяется из такого же условия, что и действующее значение синусоидального переменного тока: *действующее значение переменного несинусоидального тока численно равно такому значению постоянного тока, при котором выделяется такое же количество теплоты, какое выделяется при переменном токе в одинаковом сопротивлении за одинаковое время, равное одному периоду T .*

С учетом того, что при несинусоидальном токе общее количество теплоты равно сумме количеств теплоты от всех его составляющих, получим, что действующее значение несинусоидального тока является средним квадратичным из постоянной составляющей и действующих значений синусоидальных составляющих рассматриваемого тока. Таким образом, в общем случае

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2I_0^2 + I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots + I_{km}^2}. \quad (12.13)$$

Аналогично определяется и действующее значение несинусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2U_0^2 + U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + \dots + U_{km}^2}. \quad (12.14)$$

Для рассматриваемой задачи согласно формулам (12.13) и (12.14) получим:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{I_{1m}^2 + I_{3m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1,012^2 + 3,225^2} = 2,4 \text{ А};$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2U_0^2 + U_{1m}^2 + U_{3m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \cdot 150^2 + 200^2 + 100^2} = 217,9 \text{ В}.$$

8. Определение коэффициентов искажения несинусоидальных напряжения и тока. Несинусоидальные периодические кривые характеризуются коэффициентом искажения k_{ni} , равным отношению действующих значений основной гармоники и всей функции:

$$k_{nu} = \frac{U_1}{U} = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}U} = \frac{200}{\sqrt{2} \cdot 217,9} = 0,65;$$

$$k_{ni} = \frac{I_1}{I} = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}I} = \frac{1,012}{\sqrt{2} \cdot 2,4} = 0,3.$$

9. Определение активной мощности цепи. Возможность представления несинусоидального напряжения в виде суммарного напряжения последовательного соединения источников постоянного напряжения и источников синусоидальных напряжений позволяет сделать вывод о том, что активная мощность в цепи несинусоидального тока равна сумме активных мощностей, соответствующих постоянной составляющей и отдельным гармоникам:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k, \quad (12.15)$$

где $P_0 = I_0^2 R$; $P_1 = I_1^2 R$; $P_2 = I_2^2 R$; ...; $P_k = I_k^2 R$.

Для рассматриваемой задачи, используя выражение (12.15), получим

$$\begin{aligned} P = P_0 + P_1 + P_3 &= I_0^2 R + I_1^2 R + I_3^2 R = \frac{R}{2} (2I_0^2 + I_{1m}^2 + I_{3m}^2) = \\ &= \frac{20}{2} (1,012^2 + 3,225^2) = 114,2 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

12.3. Электрическая цепь с резонансными контурами. Фильтрация гармоник

Задача 12.7. Электрическая цепь с двумя последовательными резонансными контурами (рис. 12.4), используемыми в качестве электрических фильтров, включена в сеть несинусоидального напряжения, В, $u(t) = 30 + 50\sqrt{2} \sin \omega t + 80\sqrt{2} \sin 3\omega t$. Сопротивления в цепи следующие: $\omega L_1 = 1/(\omega C_2) = 100 \text{ Ом}$; $3\omega L_2 = 1/(3\omega C_3) =$

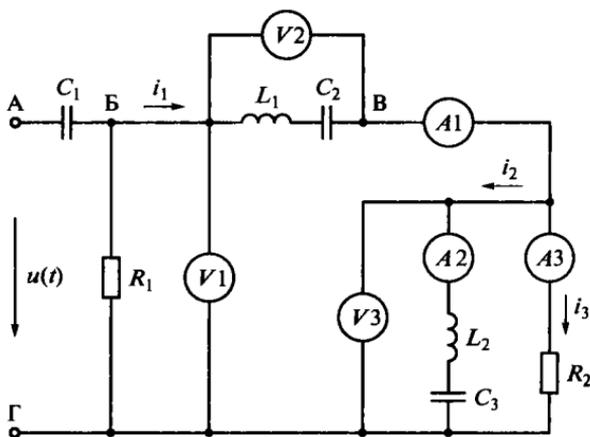


Рис. 12.4. Цепь с двумя последовательными резонансными контурами

$= 180 \text{ Ом}$; $R_2 = 200 \text{ Ом}$; $1/(\omega C_1) \ll z_{\text{БГ}(1)}$ и $1/(3\omega C_1) \ll z_{\text{БГ}(3)}$, где $z_{\text{БГ}(1)}$ и $z_{\text{БГ}(3)}$ — сопротивления участка БГ на частотах первой и третьей гармоник.

Определить показания всех приборов при условии, что они измеряют действующие значения, а их собственным потреблением энергии можно пренебречь.

Решение. 1. Назначение электрических фильтров. Зависимость реактивных сопротивлений цепи (индуктивного и емкостного) от частоты используется на практике для устройства электрических фильтров различного назначения. Цель применения фильтров — получить нужную форму кривой тока в приемнике при несинусоидальном напряжении источника. В зависимости от типа реактивного элемента (индуктивность, емкость) и схемы его включения (последовательно, параллельно с приемником) в кривых тока и напряжения приемника можно выделить либо высокочастотные, либо низкочастотные гармоники входного напряжения. Отсюда и названия фильтров: *высокочастотные* и *низкочастотные*. Например, при выпрямлении переменного тока для уменьшения его переменных составляющих в приемнике применяются низкочастотные фильтры, которые в этом случае называются *сглаживающими*.

Применяя вместо отдельных катушек или конденсаторов колебательные контуры (последовательное или параллельное соединение катушки и конденсатора), настроенные в резонанс на частоту k -й гармоники, в идеальном варианте (при активных сопротивлениях элементов колебательных контуров, равных нулю) можно либо выделить, либо подавить в потребителе гармонику резонансной частоты. В последнем случае фильтр называется *заградительным*. Для выделения резонансной частоты последовательно с приемником следует включить последовательный контур или параллельно с приемником — параллельный контур. Для подавления резонансной частоты контуры включают в обратном порядке: последовательный контур — параллельно приемнику, а параллельный контур — последовательно с приемником.

Для усиления эффекта в цепь включают и последовательный, и параллельный контуры, действующие в одинаковом направлении.

Следует обратить внимание на то, что активные сопротивления реальных элементов колебательных контуров не равны нулю, поэтому реальные резонансные фильтры пропускают или подавляют не одну k -ю гармонику, а определенную совокупность частот, называемых *полосой пропускания*. Ширина полосы пропускания частот зависит от добротности контура Q (которая обратно пропорциональна его активному сопротивлению): чем

больше Q , тем острее резонансная кривая и уже полоса пропускания частот. Этот факт определяет качество работы электронных и радиотехнических устройств.

2. Анализ заданной цепи несинусоидального тока. Заданная цепь содержит три фильтра: емкость C_1 , включенную последовательно с остальной частью цепи; последовательный резонансный контур L_1-C_2 и последовательный резонансный контур L_2-C_3 . С помощью этих фильтров в заданной цепи осуществляется разделение всех составляющих несинусоидального напряжения.

3. Отделение переменных составляющих несинусоидального напряжения (тока) от постоянной составляющей. На практике (в электронных, радиотехнических и других устройствах) часто возникает необходимость не пропускать постоянную составляющую ($\omega = 0$) к приемнику энергии. В рассматриваемой цепи для этого предусмотрен участок цепи C_1-R_1 , называемый *разделительной цепью*. Так как емкость представляет собой бесконечно большое сопротивление для постоянного тока (обрыв цепи), т. е.

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{0 \cdot C} = \infty,$$

то постоянная составляющая тока в установившемся режиме равна нулю ($I_0 = 0$), а емкость заряжается до напряжения постоянной составляющей $U_0 = 30$ В.

Так как по условию задачи $1/(\omega C_1) \ll z_{БГ(1)}$ и $1/(3\omega C_1) \ll z_{БГ(3)}$, то можно пренебречь падением напряжения на емкости от C_1 токов первой и третьей гармоник. Таким образом, на сопротивлении R_1 и параллельном ему участке цепи обеспечивается практически полное напряжение первой и третьей гармоник заданного напряжения $u(t)$ (в вольтах)

$$u_1(t) = u_{1(1)} + u_{1(3)} = 50\sqrt{2} \sin \omega t + 80\sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

4. Разделение составляющих заданного напряжения. Сопротивление $z_{1(1)}$ последовательного резонансного контура L_1-C_2 на частоте первой гармоники в соответствии с условием задачи равно нулю:

$$z_{1(1)} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2} = 100 - 100 = 0.$$

Поэтому согласно закону Ома в резонансном контуре L_1-C_2 первая гармоника напряжения $u_{2(1)}$ отсутствует: $u_{2(1)} = i_{1(1)} z_{1(1)} = 0$.

Так как $u_1(t) = u_2(t) + u_3(t)$, то первая гармоника напряжения $u_1(t)$ выделится на участке цепи ВГ:

$$u_{3(1)} = u_{1(1)} - u_{2(1)} = u_{1(1)} = 50\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В.}$$

Аналогично сопротивление $z_{2(3)}$ последовательного резонансного контура L_2-C_3 на частоте третьей гармоники в соответствии с условием задачи равно нулю:

$$z_{2(3)} = 3\omega L_2 - \frac{1}{3\omega C_3} = 180 - 180 = 0.$$

Поэтому в резонансном контуре L_2-C_3 отсутствует третья гармоника напряжения: $u_{3(3)} = i_{2(3)}z_{2(3)} = 0$.

Так как $u_1(t) = u_2(t) + u_3(t)$, то третья гармоника напряжения $u_1(t)$ выделится на участке цепи БВ:

$$u_{2(3)} = u_{1(3)} = 80\sqrt{2} \sin 3\omega t \text{ В.}$$

Таким образом, в потребителе (в данном случае в сопротивлении R_2) выделяется только первая гармоника заданного напряжения, а в первом резонансном контуре (на участке БВ цепи) присутствует целиком только третья гармоника заданного напряжения, т.е. $u_2(t) = 80\sqrt{2} \sin 3\omega t \text{ В}$, а $u_3(t) = 50\sqrt{2} \sin 3\omega t \text{ В}$.

5. Определение напряжений и токов на частоте первой гармоники ω . Из п. 4 решения задачи следует, что первая гармоника заданного напряжения $u(t)$ присутствует только на участке ВГ цепи, напряжение на котором

$$u_{3(1)} = 50\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В.}$$

Этот участок представляет собой параллельное соединение резонансного контура L_2-C_3 и активного сопротивления потребителя R_2 . Сопротивление контура L_2-C_3 на частоте первой гармоники

$$\begin{aligned} z_{2(1)} = x_{L2(1)} - x_{C3(1)} &= \left| \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_3} \right| = \left| \frac{3\omega L_2}{3} - \frac{3}{3\omega C_3} \right| = \\ &= \left| \frac{180}{3} - 3 \cdot 180 \right| = |60 - 540| = 480 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Действующее значение первой гармоники тока $i_{2(1)}$ в резонансном контуре L_2-C_3

$$I_{2(1)} = \frac{U_{3(1)}}{z_{2(1)}} = \frac{50}{480} = 0,104 \text{ А.}$$

Так как сопротивление контура L_2-C_3 на частоте первой гармоники имеет чисто емкостный характер ($x_{C3(1)} = 540 \text{ Ом}$; $x_{L2(1)} = 60 \text{ Ом}$, т.е. $x_{C3(1)} > x_{L2(1)}$), то ток $i_{2(1)}$ опережает напряжение $u_{3(1)}$ на 90° :

$$i_{2(1)} = 0,104\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А.}$$

Действующее значение тока $i_{3(1)}$ в сопротивлении R_2

$$I_{3(1)} = \frac{U_{3(1)}}{R_2} = \frac{50}{200} = 0,25 \text{ А.}$$

Так как в активном сопротивлении ток совпадает с напряжением по фазе, то ток $i_{3(1)}$ совпадает по фазе с напряжением $u_{3(1)}$:

$$i_{3(1)} = 0,25\sqrt{2} \sin \omega t \text{ А.}$$

Согласно первому закону Кирхгофа первая гармоника тока в контуре L_1-C_2 равна сумме первых гармоник токов $i_{2(1)}$ и $i_{3(1)}$ (в амперах):

$$i_{1(1)} = i_{2(1)} + i_{3(1)} = 0,104\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) + 0,25\sqrt{2} \sin \omega t.$$

Так как токи $i_{2(1)}$ и $i_{3(1)}$ сдвинуты друг относительно друга на 90° , действующее значение тока $i_{1(1)}$

$$I_{1(1)} = \sqrt{I_{2(1)}^2 + I_{3(1)}^2} = \sqrt{0,104^2 + 0,25^2} = 0,271 \text{ А.}$$

При этом уравнение мгновенного значения тока $i_{1(1)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} i_{1(1)} &= 0,271\sqrt{2} \sin \left[\omega t + \left(\operatorname{arctg} \frac{I_{2(1)}}{I_{3(1)}} \right) \frac{180}{\pi} \right] = \\ &= 0,271\sqrt{2} \sin \left[\omega t + \left(\operatorname{arctg} \frac{0,104}{0,25} \right) \frac{180}{\pi} \right] = \\ &= 0,271\sqrt{2} \sin(\omega t + 22^\circ 36') \text{ А.} \end{aligned}$$

6. Определение напряжений и токов на частоте третьей гармоники (3ω). Третья гармоника заданного напряжения присутствует только на участке БВ цепи, напряжение на котором

$$u_{2(3)} = 80\sqrt{2} \sin 3\omega t \text{ В.}$$

Сопротивление участка БВ (контура L_1-C_2) на частоте третьей гармоники

$$z_{1(3)} = |x_{L1(3)} - x_{C2(3)}| = \left| 3\omega L_1 - \frac{1}{3\omega C_2} \right| = \left| 3 \cdot 100 - \frac{100}{3} \right| = 267 \text{ Ом.}$$

Действующее значение третьей гармоники тока $i_{1(3)}$ в резонансном контуре L_1-C_2

$$I_{1(3)} = \frac{U_{2(3)}}{z_{1(3)}} = \frac{80}{267} = 0,3 \text{ А.}$$

Так как сопротивление контура L_1-C_2 на частоте третьей гармоники имеет чисто индуктивный характер ($x_{L1(3)} > x_{C2(3)}$), ток $i_{1(3)}$ отстает от напряжения $u_{2(3)}$ на 90° , и уравнение мгновенного значения тока имеет вид

$$i_{1(3)} = 0,3\sqrt{2} \sin(3\omega t - 90^\circ) \text{ А.}$$

Поскольку на частоте третьей гармоники контур L_2-C_3 представляет собой короткозамкнутый участок, то ток $i_{1(3)}$ замыкается через него, не проходя через сопротивление потребителя R_2 . Таким образом, третьи гармоники токов i_2 и i_3 имеют вид

$$i_{2(3)} = i_{1(3)} = 0,3\sqrt{2} \sin(3\omega t - 90^\circ) \text{ А; } i_{3(3)} = 0.$$

Действующие значения третьих гармоник токов следующие:

$$I_{2(3)} = I_{1(3)} = 0,3 \text{ А; } I_{3(3)} = 0.$$

7. Определение показаний приборов. Зная действующие значения гармонических составляющих всех интересующих нас напряжений и токов, определим показания приборов, используя формулы (12.13) и (12.14):

$$U_1 = \sqrt{U_{1(1)}^2 + U_{1(3)}^2} = \sqrt{50^2 + 80^2} = 94,3 \text{ В;}$$

$$U_2 = U_{2(3)} = 80 \text{ В;}$$

$$U_3 = U_{3(1)} = 50 \text{ В;}$$

$$I_1 = \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{0,271^2 + 0,3^2} = 0,4 \text{ А;}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2} = \sqrt{0,104^2 + 0,3^2} = 0,318 \text{ А;}$$

$$I_3 = I_{3(1)} = 0,25 \text{ А.}$$

Результаты определения действующих значений напряжений и токов цепи сведем в табл. 12.3.

Результаты вычислений показаний приборов

Величины	Действующие значения напряжений и токов					
	$U_1, \text{В}$	$U_2, \text{В}$	$U_3, \text{В}$	$I_1, \text{А}$	$I_2, \text{А}$	$I_3, \text{А}$
Постоянная составляющая $U_{(0)}, I_{(0)}$	0	0	0	0	0	0
Первая гармоника $U_{(1)}, I_{(1)}$	50	0	50	0,271	0,104	0,25
Третья гармоника $U_{(3)}, I_{(3)}$	80	80	0	0,3	0,3	0
Показания приборов	94,3	80	50	0,4	0,318	0,25

12.4. Задачи для самостоятельного решения

12.8. Разложить в тригонометрический ряд графоаналитическим методом периодический ток, получаемый в цепи, показанной на рис. 12.5, *а*, в результате однополупериодного выпрямления. График тока представлен на рис. 12.5, *б*. Амплитуда тока $I_m = 10 \text{ А}$.

12.9. По данным задачи 12.8 составить уравнение мгновенного значения выпрямленного тока аналитическим методом. Сравнить полученное уравнение с уравнением из задачи 12.8.

12.10. Определить действующее значение несинусоидального тока, используя тригонометрический ряд, полученный при решении задачи 12.8.

12.11. Определить действующее значение и постоянную составляющую тока в нагрузочном сопротивлении R_H цепи двухпо-

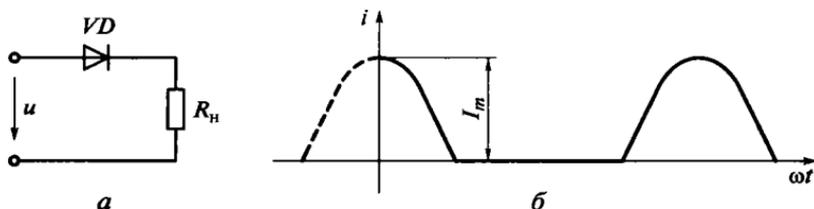


Рис. 12.5. Схема цепи однополупериодного выпрямления (*а*) и график выпрямленного тока (*б*)

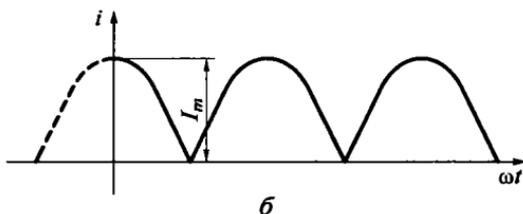
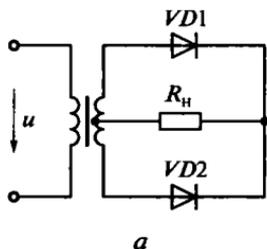


Рис. 12.6. Схема цепи двухполупериодного выпрямления (а) и график выпрямленного тока (б)

лупериодного выпрямления, показанной на рис. 12.6, а, при $I_m = 10$ А, если зависимость выпрямленного тока от времени, представленная на рис. 12.6, б, выражается уравнением

$$i = \frac{4I_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right), \text{ А.}$$

12.12. Индуктивность цепи $L = 0,0318$ Гн, емкость $C = 31,8$ мкФ, угловая частота $\omega = 314$ рад/с. Определить индуктивное и емкостное сопротивления цепи для первой и третьей гармоник.

12.13. Несинусоидальный ток в цепи содержит первую и третью гармоники, действующие значения которых $I_{(1)} = 2$ А и $I_{(3)} = 1,5$ А. Активное сопротивление цепи $R = 10$ Ом. Определить активную мощность этой цепи.

12.14. Определить действующие значения напряжения и тока и активную мощность цепи при следующих мгновенных значениях напряжения на ее зажимах (в вольтах) и тока в ней (в амперах):

$$u = 150 + 200 \sin(\omega t + 10^\circ) + 400 \sin(3\omega t - 15^\circ);$$

$$i = 9 \sin(\omega t + 63^\circ) + 7 \sin(3\omega t + 68^\circ).$$

12.15. Мгновенное значение напряжения на катушке индуктивности (в вольтах) $u = 30 + 60 \sin(\omega t + 45^\circ) + 15 \sin(3\omega t - 15^\circ)$. Определить действующее значение тока и активную мощность цепи при следующих параметрах последовательной схемы замещения катушки: активное сопротивление катушки 8 Ом, индуктивное сопротивление на частоте основной гармоники 5 Ом.

12.16. Определить действующее значение напряжения на конденсаторе, если емкостное сопротивление на частоте основной гармоники равно 25 Ом, а ток в конденсаторе (в амперах) изменяется по закону

$$i = 2 \sin(\omega t + 30^\circ) + 2,5 \sin(3\omega t + 45^\circ) + 1,2 \sin(5\omega t - 45^\circ).$$

12.17. Катушка с активным сопротивлением $R = 20$ Ом и индуктивностью $L = 0,05$ Гн соединена последовательно с конденсатором $C = 50$ мкФ (см. рис. 12.3). На зажимах цепи действует ЭДС, график которой имеет вид треугольника (см. рис. 12.1, б) и выражается уравнением

$$e = \frac{8E_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

Определить действующее значение тока и активную мощность в цепи, если внутреннее сопротивление источника энергии мало и им можно пренебречь, $E_m = 220$ В и $\omega = 314$ рад/с.

12.18. Напряжение цепи, представленной на рис. 12.3 (в вольтах), изменяется по закону $u = 150\sqrt{2} \sin \omega t + 70\sqrt{2} \sin(3\omega t - 20^\circ)$, сопротивление $R = 50$ Ом. Определить действующее значение тока и активную мощность этой цепи, если на частоте третьей гармоники $x_{L(3)} = x_{C(3)} = 30$ Ом.

12.19. Определить активную мощность цепи, показанной на рис. 12.7, а, если $R = \omega L = 30$ Ом, а ток катушки (в амперах) изменяется по закону

$$i_L = 15 \sin(\omega t + 10^\circ) + 3 \sin(3\omega t + 20^\circ).$$

12.20. Ток конденсатора (в амперах) в цепи, показанной на рис. 12.7, б, изменяется по закону $i_C = 5 \sin(\omega t + 60^\circ) + 2 \sin 3\omega t$. Определить закон изменения токов i_R и i_L , если $R = \omega L = 1/(\omega C) = 10$ Ом.

12.21. Определить показания приборов, показанных в схеме на рис. 12.7, в, если на входе цепи напряжение (в вольтах) $u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ) + 50\sqrt{2} \sin 3\omega t$, где $\omega = 314$ рад/с, а параметры цепи $R = 20$ Ом, $L = 25$ мГн, $C = 50$ мкФ.

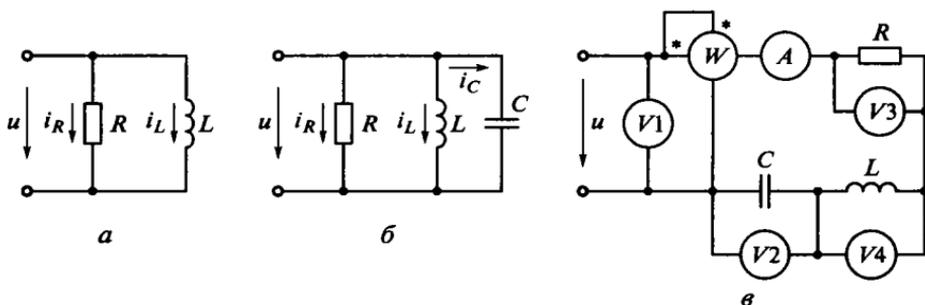


Рис. 12.7. Схемы параллельной RL -цепи (а), параллельной RLC -цепи (б) и последовательной RLC -цепи (в)

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

12.8. $i = 3,1 + 4,96 \cos \omega t + 2,26 \cos 2\omega t - 0,6 \cos 4\omega t + 0,46 \cos 6\omega t +$
 $+ \dots, \text{ A.}$

$$\mathbf{12.9.} \quad i = \frac{2I_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right) =$$
$$= 3,3 + 5 \cos \omega t + 2,12 \cos 2\omega t - 0,42 \cos 4\omega t + \dots, \text{ A.}$$

12.10. 5 A.

12.11. 7,1 A; 6,4 A.

12.12. 10 Ом; 100 Ом; 30 Ом; 33,3 Ом.

12.13. 62,5 Вт.

12.14. 350 В; 8,1 A; 1384,2 Вт.

12.15. 5,9 A; 277,4 Вт.

12.16. 38,5 В.

12.17. 2,46 A; 125,2 Вт.

12.18. 2,1 A; 224,4 Вт.

12.19. 4,59 кВт.

12.20. $i_R = 5 \sin(\omega t - 30^\circ) + 0,67 \sin(3\omega t - 90^\circ) \text{ A}; i_L = 5 \sin(\omega t - 120^\circ) +$
 $+ 0,22 \sin(3\omega t - 180^\circ) \text{ A.}$

12.21. $I = 3 \text{ A}; U_1 = 112 \text{ В}; U_2 = 120 \text{ В}; U_3 = 60 \text{ В}; U_4 = 60 \text{ В}; P =$
 $= 180 \text{ Вт.}$

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

13.1. Симметричная трехфазная цепь

Задача 13.1. Симметричный трехфазный приемник, фазы которого соединены звездой, питается от трехфазного источника с линейным напряжением 380 В. При токе 50 А в линейных проводах приемник потребляет 25 кВт активной мощности.

Определить полное сопротивление фазы приемника и его активную и реактивную составляющие. Проанализировать влияние неисправностей (обрыва линейного провода, короткого замыкания фазы приемника) на режим работы цепи.

Решение. 1. Обоснование выбора схемы цепи. По условию задачи приемник симметричен, поэтому целесообразно использовать трехпроводную схему его питания, без нулевого провода (рис. 13.1).

2. Определение сопротивлений фазы приемника. Запишем действующие значения напряжений, токов и комплексы сопротивлений в симметричной трехфазной цепи при соединении приемника звездой:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{л}} = 380 \text{ В}; \quad U'_{A} = U'_{B} = U'_{C} = U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 220 \text{ В}.$$

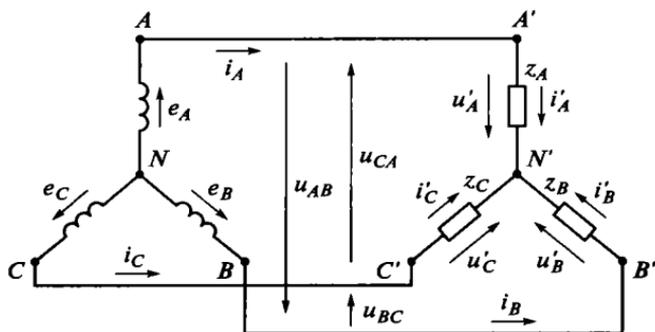


Рис. 13.1. Схема трехпроводной трехфазной цепи при соединении фаз приемника звездой

$$I_A = I_B = I_C = I_\pi = I'_A = I'_B = I'_C = I_\phi = 50 \text{ А};$$

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} = z e^{\pm j\varphi},$$

где φ — угол сдвига фаз между напряжением и током фазы приемника, знак которого зависит от характера нагрузки; $z = z_A = z_B = z_C$ — полное сопротивление фазы приемника.

Полное сопротивление фазы приемника в соответствии с законом Ома и условиями задачи

$$z = \frac{U_\phi}{I_\phi} = \frac{U_\pi}{\sqrt{3}I_\pi} = \frac{380}{\sqrt{3} \cdot 50} = 4,39 \text{ Ом.}$$

Общая активная мощность, получаемая трехфазным симметричным приемником от трехфазного генератора,

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_\pi I_\pi \cos \varphi,$$

следовательно, коэффициент мощности фазы приемника

$$\cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{3}U_\pi I_\pi} = \frac{25\,000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 50} = 0,76.$$

Абсолютное значение угла сдвига фаз (без уточнения характера нагрузки, активно-индуктивного или активно-емкостного)

$$|\varphi| = \arccos 0,76 = 40^\circ 30'.$$

Активное сопротивление фазы

$$R = z \cos \varphi = 4,39 \cdot 0,76 = 3,34 \text{ Ом.}$$

Реактивное сопротивление фазы

$$x = z \sin |\varphi| = 4,39 \sin 40^\circ 30' = 4,39 \cdot 0,65 = 2,85 \text{ Ом.}$$

3. Влияние обрыва линейного провода на режим работы приемника. Обрыв в цепи возникает при определенных неисправностях, например при перегорании предохранителя в приемнике энергии. При этом нарушается симметрия цепи.

Рассмотрим для примера обрыв линейного провода в фазе A , который на рис. 13.2, a условно представлен как разомкнутый ключ.

В этом случае к фазе A' питание не подводится и ток $I'_A = 0$. Напряжение $U'_A = I'_A z_A = 0$. Фазы B' , C' приемника оказываются соединенными последовательно и включенными на линейное напряжение $U_{BC} = 380 \text{ В}$. Так как сопротивления фаз одинаковые, то напряжения на фазах B' , C' приемника также одинаковые:

$$U'_B = U'_C = 380/2 = 190 \text{ В.}$$

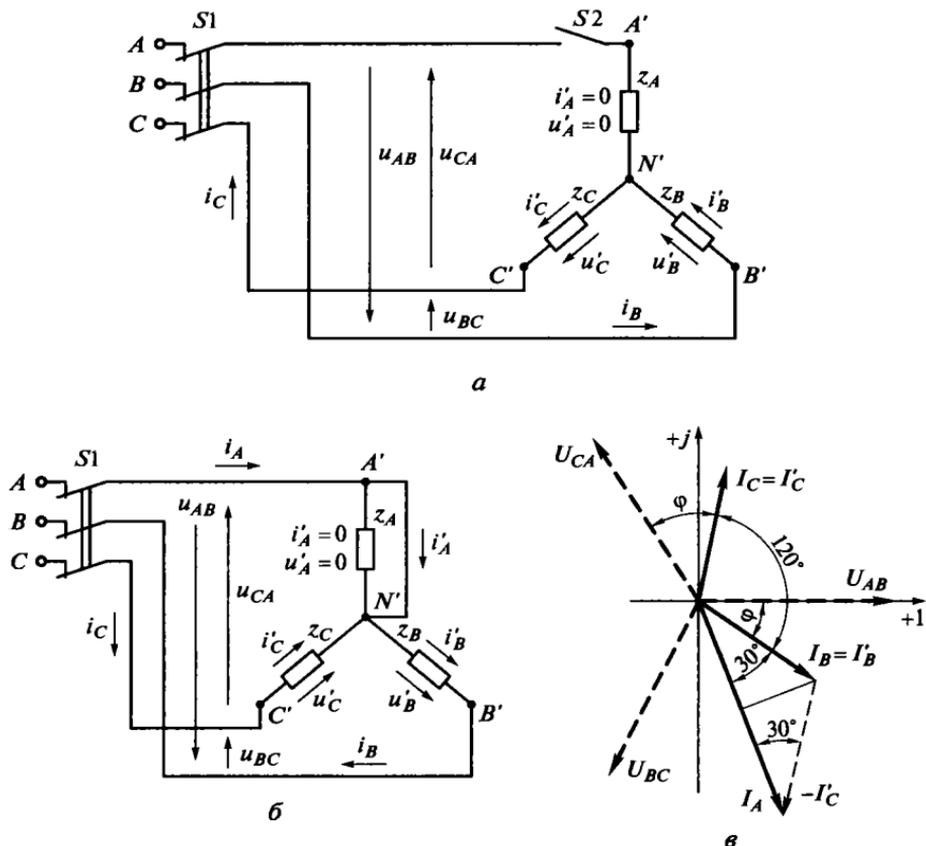


Рис. 13.2. Трехфазный приемник при соединении фаз звездой:
 а — схема цепи при обрыве в фазе А; б — схема цепи при коротком замыкании фазы А; в — векторная диаграмма цепи при коротком замыкании фазы А

Токи в фазах B' , C' тоже одинаковые:

$$I'_B = I'_C = U'_B/z = U'_C/z = 190/4,39 = 43,3 \text{ А.}$$

Таким образом, при обрыве линейного провода AA' напряжение и ток фазы A' уменьшатся до нуля. В фазах B' , C' напряжения уменьшатся с 220 до 190 В, а токи уменьшатся с 50 до 43,3 А.

4. Влияние короткого замыкания фазы на режим работы приемника. На рис. 13.2, б показано короткое замыкание фазы A' приемника. При этом точка N' соединяется с точкой A' . Напряжение и ток фазы A' приемника уменьшатся до нуля:

$$I'_A = 0; U'_A = 0.$$

Фазы приемника B' и C' оказываются включенными не на фазные напряжения U_B и U_C , а на линейные напряжения U_{AB} и U_{CA} . Таким образом, напряжения U'_B и U'_C в фазах B' и C' приемника увеличатся в $\sqrt{3}$ раз. Это вызовет увеличение токов I'_B и I'_C в фазах B' и C' приемника и равных им линейных токов I_B и I_C в $\sqrt{3}$ раз по сравнению с исправной цепью. С учетом данных задачи

$$U'_B = U'_C = U_{AB} = U_{CA} = 380 \text{ В};$$

$$I_B = I_C = I'_B = I'_C = 50\sqrt{3} = 86,6 \text{ А}.$$

По первому закону Кирхгофа линейный ток $i_A = i_B - i_C$ (см. рис. 13.2, б), т. е. вектор \vec{I}_A равен геометрической сумме равных по модулю, но сдвинутых относительно друг друга на 120° векторов \vec{I}'_B и $(-\vec{I}'_C)$. Векторная диаграмма рассматриваемого случая представлена на рис. 13.2, в, из которого следует, что

$$I_A = 2I'_B \cos 30^\circ = 2I'_B \sqrt{3}/2 = I'_B \sqrt{3} = 50\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 150 \text{ А}.$$

Возрастание тока I'_B в $\sqrt{3}$ раз по сравнению с исправной цепью определяет увеличение линейного тока I_A вследствие короткого замыкания фазы A в 3 раза, т. е. с 50 до 150 А с учетом данных задачи.

Задача 13.2. Определить, как изменятся фазные, линейные токи и потребляемая активная мощность приемника из задачи 13.1, если его фазы соединить по схеме треугольника (рис. 13.3) при том же напряжении питания.

Проанализировать изменение фазных и линейных токов при обрыве в одной из фаз приемника, соединенных треугольником, и в случае перегорания предохранителя в линейном проводе.

Решение. 1. Влияние схемы соединения фаз приемника на токи и потребляемую мощность в трехфазной цепи. При соединении фаз приемника треугольником фазные напряжения равны линейным: $U_\phi = U_\Delta = U_{AB} = U_{BC} = U_{CA}$; $U_\phi = U'_{AB} = U'_{BC} = U'_{CA}$, тогда как при соединении фаз звездой $U_\phi = U_\Delta / \sqrt{3}$. Следовательно, напряжения U_ϕ на фазах приемника, соединенных треугольником, будут выше в $\sqrt{3}$ раз по сравнению с соединением их звездой. Так как полные сопротивления z фаз приемника в обоих случаях одинаковые, а фазные токи $I_\phi = U_\phi / z$, то при соединении приемника треугольником фазные токи больше в $\sqrt{3}$ раз.

Так как линейные токи при симметричном приемнике, фазы которого соединены треугольником, в $\sqrt{3}$ раз больше фазных

токов ($I_{л} = \sqrt{3}I_{\phi}$), а при соединении звездой равны фазным токам ($I_{л} = I_{\phi}$), очевидно, что при переключении симметричного приемника с соединения фаз звездой на соединение их треугольником линейные токи возрастут в 3 раза.

Общая активная мощность, получаемая трехфазным приемником, также в этом случае возрастет в 3 раза, так как для обеих схем мощность $P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \cos \varphi$, но при переключении приемника на соединения фаз треугольником и U_{ϕ} , и I_{ϕ} возрастут в $\sqrt{3}$ раз, а $I_{л}$ — в 3 раза.

Найдем фазный, линейный токи и потребляемую мощность цепи при соединении фаз приемника треугольником:

$$I_{\phi} = \frac{U_{л}}{z} = \frac{380}{4,39} = 86,6 \text{ А}; \quad I_{л} = \sqrt{3}I_{\phi} = \sqrt{3} \cdot 86,6 = 150 \text{ А};$$

$$P = 3P_{\phi} = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 150 \cdot 0,76 = 75 \text{ кВт}.$$

2. Обрыв в одной из фаз приемника, соединенного треугольником. Предположим, что обрыв произошел в фазе $A'B'$ (см. рис. 13.3), и ток в ней $I_{AB} = 0$. При этом в неповрежденных фазах $B'C'$ и $C'A'$ значения токов останутся прежними, так как напряжения и сопротивления фаз не изменились: $I_{BC} = I_{CA} = 86,6 \text{ А}$. Не изменится и линейный ток $I_C = 150 \text{ А}$, поскольку $I_C = I_{CA} - I_{BC}$.

Вследствие обрыва в фазе $A'B'$ линейные токи I_A и I_B становятся равными фазным токам: $I_A = I_{CA}$, $I_B = I_{BC}$, а следовательно, равны и их модули, равные действующим значениям: $I_A = I_{CA} = I_B = I_{BC} = 86,6 \text{ А}$.

Таким образом, при обрыве в фазе $A'B'$ линейные токи I_A и I_B уменьшатся в $\sqrt{3}$ раз.

3. Обрыв в линейном проводе. Предположим, что обрыв произошел в линейном проводе AA' (см. рис. 13.3), напри-

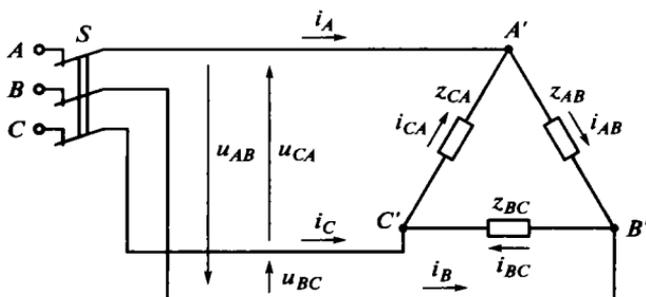


Рис. 13.3. Схема трехпроводной трехфазной цепи при соединении фаз приемника треугольником

мер сетевой провод AA' отсоединился от вывода A источника питания в результате перегорания предохранителя.

При этом линейный ток $I_A = 0$, а фазы $C'A'$ и $A'B'$ будут соединены последовательно между собой и параллельно фазе $B'C'$ и включены на напряжение U_{BC} источника. Таким образом, в фазе $B'C'$ ток не изменится: $I_{BC} = I_\phi = 86,6$ А, а в фазах $C'A'$ и $A'B'$ будет протекать один и тот же ток $I_{CA} = I_{AB}$, равный половине I_ϕ , т.е. в каждой из фаз $C'A'$ и $A'B'$ ток уменьшится в 2 раза:

$$I_{AB} = I_{CA} = \frac{U_{BC}}{2Z} = \frac{I_\phi}{2} = 86,6/2 = 43,3 \text{ А.}$$

Линейный ток $I_B = I_C$ будет равен модулю суммы токов I_{AB} и I_{BC} , а так как эти токи совпадают по фазе, то

$$I_B = I_C = I_{AB} + I_{BC} = I_\phi/2 + I_\phi = 1,5I_\phi = 1,5 \cdot 86,6 = 130 \text{ А.}$$

Таким образом, линейные токи I_B и I_C уменьшатся со 150 до 130 А.

Задача 13.3. Трехфазный электродвигатель питается от сети с линейным напряжением 380 В (рис. 13.4). Каждая фаза этого электродвигателя представлена схемой замещения с последовательным соединением активного сопротивления $R = 1,2$ Ом и индуктивного $x_L = 1,6$ Ом. Для улучшения коэффициента мощности каждой фазы до 0,95 к электродвигателю присоединены конденсаторы.

Определить токи в фазах электродвигателя и токи в линейных проводах. Вычислить активную и полную мощности цепи и построить ее векторную диаграмму.

Решение. 1. Определение токов в фазах двигателя. Трехфазные двигатели относятся к симметричным приемникам, поэтому при соединении звездой напряжения на фазах

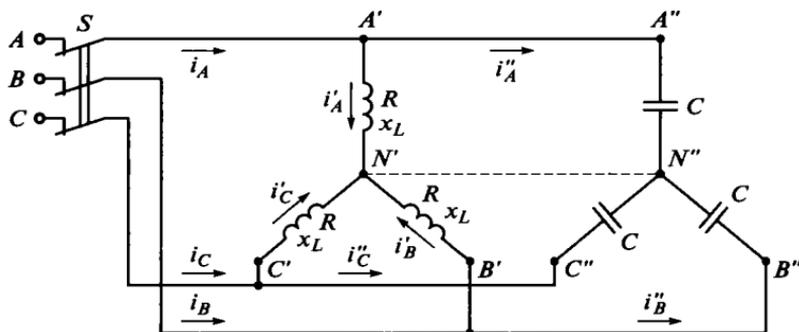


Рис. 13.4. Схема включения обмоток трехфазного электродвигателя с конденсаторами, улучшающими коэффициент мощности

$$U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

Полное сопротивление фазы двигателя

$$z = \sqrt{R^2 + x_L^2} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2 \text{ Ом.}$$

Найдем токи в обмотках двигателя:

$$I'_A = I'_B = I'_C = I'_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{z} = \frac{220}{2} = 110 \text{ А.}$$

Токи в фазах двигателя отстают от соответствующих фазных напряжений на угол

$$\varphi_{\text{д}} = \arccos R/z = \arccos 1,2/2 = \arccos 0,6 = 53^{\circ}.$$

2. Определение линейных токов. Поскольку приемник в целом состоит из обмоток двигателя с присоединенными к нему конденсаторами, линейные токи I'_A , I'_B , I'_C являются общими токами соответствующих фазных токов двигателя и звезды конденсаторов. Конденсаторы имеют одинаковую емкость, поэтому звезда конденсаторов также симметрична. Так как при этом потенциалы точек N' и N'' оказываются одинаковыми, фазы звезды конденсаторов можно считать параллельно соединенными с соответствующими фазами звезды обмоток двигателя (точки N' и N'' можно представить соединенными проводником).

Активная проводимость фазы приемника в целом при этом равна активной проводимости фазы обмотки двигателя:

$$g = \frac{R}{z^2} = \frac{1,2}{R^2 + x_L^2} = \frac{1,2}{4} = 0,3 \text{ См.}$$

Полную проводимость фазы приемника можно определить из треугольника проводимостей этой фазы приемника при заданном коэффициенте мощности $\cos \varphi = 0,95$:

$$y = g/\cos \varphi = 0,3/0,95 = 0,32 \text{ См.}$$

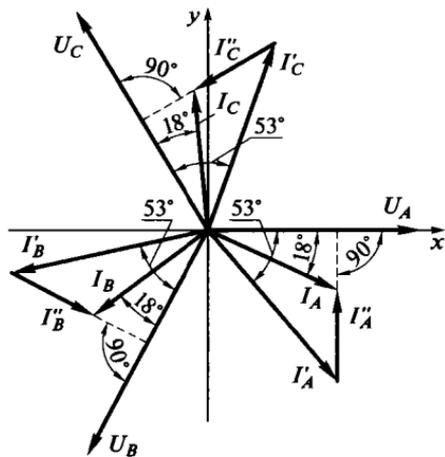
Линейные токи равны фазным токам приемника в целом и в соответствии с законом Ома

$$I_A = I_B = I_C = I_{\phi} = U_{\phi} y = 220 \cdot 0,32 = 70,4 \text{ А.}$$

Линейные токи отстают от соответствующих фазных напряжений или опережают их в зависимости от значений емкостей конденсаторов, определяющих емкостную, а следовательно, общую реактивную проводимость фазы приемника в целом, на угол

$$\varphi = \arccos 0,95 = 18^{\circ}.$$

Рис. 13.5. Векторная диаграмма цепи трехфазного электродвигателя с конденсаторами



3. Векторная диаграмма. На рис. 13.5 построена векторная диаграмма для случая, когда фазы приемника в целом имеют активно-индуктивный характер, возможный при следующем соотношении реактивных проводимостей фазы: $b_L > b_C$. При этом линейные токи отстают от соответствующих фазных напряжений

и равны геометрической сумме токов в фазах двигателя и в фазах звезды конденсаторов. Токи в фазах звезды конденсаторов опережают соответствующие фазные напряжения на 90° . На диаграмме показаны четыре звезды векторов, сдвинутых относительно друг друга на 120° .

4. Определение мощностей. Активная мощность всей цепи

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi_\phi = 3 \cdot 220 \cdot 70,4 \cdot 0,95 = 44 \text{ кВт},$$

или

$$P = 3P_\phi = 3(I'_\phi)^2 R = 3 \cdot 110^2 \cdot 1,2 = 44 \text{ кВт}.$$

Полная мощность всей цепи

$$S = 3S_\phi = 3U_\phi I_\phi = 3 \cdot 220 \cdot 70,4 = 46,5 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

13.2. Несимметричная трехфазная цепь

Задача 13.4. Трехфазная сеть переменного тока с линейным напряжением 380 В питает электроэнергией садовое товарищество. Дачные участки (приемник энергии) распределены на три группы (фазы *A*, *B*, *C* приемника), соединенные звездой по четырехпроводной схеме.

Определить токи в линейных проводах, фазах приемника, нейтральном проводе, общую мощность приемника и сопротивления фаз, если фаза *A* приемника потребляет мощность 5 кВт, фаза *B* — 3 кВт, фаза *C* — 4 кВт. Построить векторную диаграмму цепи.

Решение. 1. Представление электрической схемы цепи. На рис. 13.6 приведена принципиальная электрическая схема заданной цепи. В этой схеме источник энергии (подстанция) показан так же, как и сопротивления приемника, в виде трехфазного генератора с тремя фазными обмотками A, B, C , соединенными звездой, что является неизменным условием для четырехпроводной системы. Фазы приемника представлены эквивалентными активными сопротивлениями R_A, R_B, R_C , поскольку большинство бытовых электроприборов (нагревательные элементы — плитки, батареи, кипятильники, осветительные лампы, электроинструмент и т. д.) являются активной нагрузкой. Приемник соединен с генератором (подстанцией) по четырехпроводной схеме, т. е. тремя линейными проводами (AA', BB', CC') и нейтральным проводом NN' .

2. Распределение напряжений и токов в цепи. Определим действующие значения фазных напряжений источника энергии при заданных действующих значениях линейных напряжений ($U_n = 380 \text{ В}$):

$$U_A = U_B = U_C = U_\phi = U_n / \sqrt{3} = 380 / \sqrt{3} = 220 \text{ В}.$$

Фазные напряжения приемника можно принять равными фазным напряжениям источника энергии, если пренебречь относительно малыми падениями напряжений в проводах AA', BB', CC' и NN' :

$$U'_A = U'_B = U'_C = U_\phi = 220 \text{ В}.$$

Токи, проходящие в линейных проводах, проходят и в фазных сопротивлениях приемника, т. е. являются одновременно линейными и фазными.

Ток i_N в нейтральном проводе равен сумме фазных токов: $i_N = i'_A + i'_B + i'_C$.

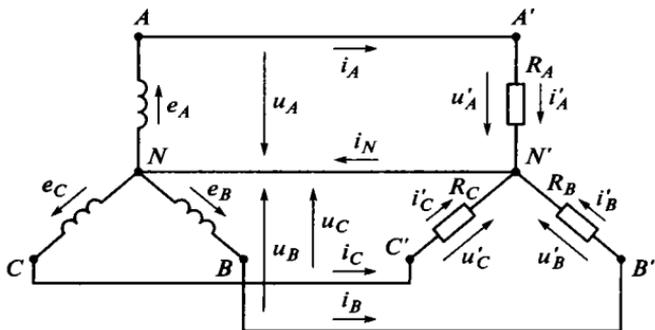


Рис. 13.6. Схема несимметричной четырехпроводной трехфазной цепи

3. Определение линейных и фазных токов. По известным из условия задачи активным мощностям фаз ($P_A = 5$ кВт; $P_B = 3$ кВт и $P_C = 4$ кВт) найдем линейные и фазные токи:

$$I_A = I'_A = P_A / U_\phi = 5000 / 220 = 22,7 \text{ А};$$

$$I_B = I'_B = P_B / U_\phi = 3000 / 220 = 13,6 \text{ А};$$

$$I_C = I'_C = P_C / U_\phi = 4000 / 220 = 18,2 \text{ А}.$$

4. Определение общей мощности и сопротивлений фаз приемника. Общая мощность приемника

$$P = P_A + P_B + P_C = 5 + 3 + 4 = 12 \text{ кВт}.$$

Сопротивления фаз приемника найдем по закону Ома:

$$R_A = U_\phi / I'_A = U_\phi^2 / P_A = 220^2 / 5000 = 9,7 \text{ Ом};$$

$$R_B = U_\phi^2 / P_B = 220^2 / 3000 = 16,1 \text{ Ом};$$

$$R_C = U_\phi^2 / P_C = 220^2 / 4000 = 12,1 \text{ Ом}.$$

5. Построение векторной диаграммы цепи. В представленной на рис. 13.7 векторной диаграмме четырехпроводной трехфазной цепи напряжения на фазах приемника равны напряжениям на фазах источника энергии и образуют звезду векторов, сдвинутых по отношению друг к другу на 120° .

Линейные токи равны соответствующим фазным токам и совпадают с соответствующими напряжениями по фазе, но их мо-

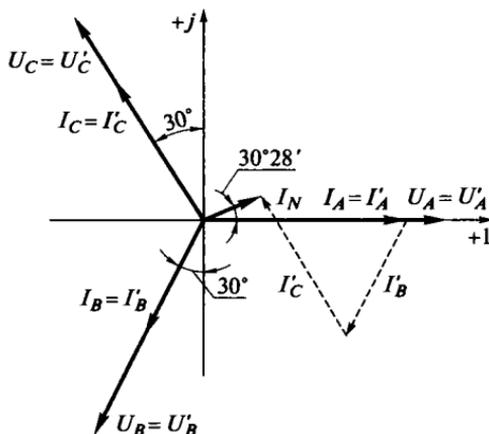


Рис. 13.7. Векторная диаграмма четырехпроводной трехфазной цепи с несимметричным активным приемником

дули (равные действующим значениям) не равны между собой вследствие различия сопротивлений фаз приемника. Значит, в нулевом проводе протекает ток, отличный от нуля. Вектор тока \underline{I}_N в нулевом проводе получается путем геометрического сложения векторов фазных токов.

6. Определение тока в нейтральном проводе. В соответствии с первым законом Кирхгофа ток в нейтральном проводе

$$\begin{aligned} \dot{I}_N &= \dot{I}'_A + \dot{I}'_B + \dot{I}'_C = 22,7 + 13,6e^{-j120^\circ} + 18,2e^{j120^\circ} = \\ &= 22,7 - 13,6\sin 30^\circ - j13,6\cos 30^\circ - 18,2\sin 30^\circ + j18,2\cos 30^\circ = \\ &= 6,8 + j4 = 7,9e^{j30^\circ 28'} \text{ А.} \end{aligned}$$

Следовательно, действующее значение тока в нейтральном проводе $I_N = 7,9 \text{ А}$, и он опережает напряжение на фазе A на угол $30^\circ 28'$.

Задача 13.5. Определить, как изменятся напряжения на фазах приемника из задачи 13.4 и токи в цепи, приведенной на рис. 13.6, в случае обрыва нейтрального провода при том же напряжении питания.

Решение. Так как рассматриваемая цепь представляет собой разветвленную цепь с несколькими синусоидальными источниками, включенными в разные ветви, то наиболее удобен для ее расчета метод узлового напряжения в совокупности с комплексным методом.

Найдем проводимости фаз приемника ($\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$) и нулевого провода (\underline{Y}_N):

$$\begin{aligned} \underline{Y}_A &= 1/\underline{Z}_A = 1/R_A = 1/9,7 = 0,103 \text{ См}; \\ \underline{Y}_B &= 1/\underline{Z}_B = 1/R_B = 1/16,1 = 0,062 \text{ См}; \\ \underline{Y}_C &= 1/\underline{Z}_C = 1/R_C = 1/12,1 = 0,083 \text{ См}; \\ \underline{Y}_N &= 1/R_N = 1/\infty = 0. \end{aligned}$$

Определим ЭДС трехфазного источника в комплексной форме при условии, что вектор \bar{E}_A совпадает с действительной осью комплексной плоскости:

$$\begin{aligned} \dot{E}_A &= 220 \text{ В}; \\ \dot{E}_B &= 220e^{-j120^\circ} = -220\sin 30^\circ - j220\cos 30^\circ = (-110 - j190,5) \text{ В}; \\ \dot{E}_C &= 220e^{j120^\circ} = -220\sin 30^\circ + j220\cos 30^\circ = (-110 + j190,5) \text{ В}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \\ &= \frac{220 \cdot 0,103 + (-110 - j190,5)0,062 + (-110 + j190,5)0,083}{0,103 + 0,062 + 0,083 + 0} = \\ &= \frac{6,7 + j4}{0,248} = 27 + j16,1 = 31,4e^{j30^\circ 48'} \text{ В}; \\ U_N &= 31,4 \text{ В}. \end{aligned}$$

Найдем напряжения на фазах приемника:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N &= 220 - 27 - j16,1 = 193 - j16,1 = 193,7e^{-j4^\circ 28'} \text{ В}; \\ \dot{U}'_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N &= -110 - j190,5 - 27 - j16,1 = \\ &= -137 - j206,6 = 248e^{-j123^\circ 33'} \text{ В}; \\ \dot{U}'_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N &= -110 + j190,5 - 27 - j16,1 = \\ &= -137 + j174,4 = 221,8e^{j128^\circ 9'} \text{ В}. \end{aligned}$$

Определим токи в фазах (и линейных проводах):

$$\begin{aligned} \dot{I}'_A = \dot{I}_A = \frac{\dot{U}'_A}{\underline{Z}_A} &= \dot{U}'_A \underline{Y}_A = (193 - j16,1) \cdot 0,103 = 19,9 - j1,7 = 20e^{-j4^\circ 28'} \text{ А}; \\ \dot{I}'_B = \dot{I}_B = \frac{\dot{U}'_B}{\underline{Z}_B} &= \dot{U}'_B \underline{Y}_B = (-137 - j206,6) \cdot 0,062 = \\ &= -8,5 - j12,8 = 15,4e^{-j123^\circ 33'} \text{ А}; \\ \dot{I}'_C = \dot{I}_C = \frac{\dot{U}'_C}{\underline{Z}_C} &= \dot{U}'_C \underline{Y}_C = (-137 + j174,4) \cdot 0,083 = \\ &= -11,4 + j14,5 = 18,4e^{j128^\circ 9'} \text{ А}. \end{aligned}$$

Ток в нулевом проводе

$$\dot{I}_N = -\frac{\dot{U}_N}{\underline{Z}_N} = -\dot{U}_N \underline{Y}_C = -31,4e^{j30^\circ 48'} \cdot 0 = 0,$$

или в соответствии с первым законом Кирхгофа (определим для проверки правильности расчетов)

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 19,9 - j1,7 - 8,5 - j12,8 - 11,4 + j14,5 = 0.$$

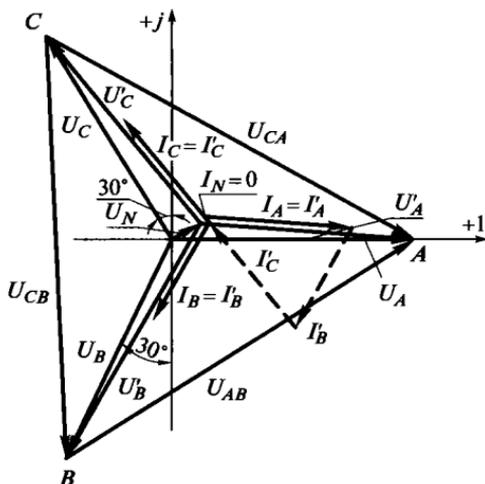


Рис. 13.8. Векторная диаграмма трехфазной цепи с несимметричным активным приемником при обрыве нулевого провода

При обрыве нейтрального провода действующие значения напряжений на фазах приемника и токов в цепи изменились следующим образом:

U'_A уменьшилось на 26,3 В (с 220 до 193,7 В);

U'_B увеличилось на 28 В (больше, чем на 10 %, т.е. с 220 до 248 В);

U'_C увеличилось на 1,8 В (до 221,8 В);

$I'_A = I_A = 20$ А, т.е. уменьшился на 2,7 А;

$I'_B = I_B = 15,4$ А, т.е. увеличился на 1,8 А;

$I'_C = I_C = 18,4$ А, т.е. увеличился на 0,2 А.

Векторная диаграмма, отражающая распределение напряжений и токов в цепи при обрыве нулевого провода, представлена на рис. 13.8.

13.3. Задачи для самостоятельного решения

13.6. Обмотки симметричного трехфазного генератора соединены по схеме, показанной на рис. 13.9. Определить показание вольтметра, если фазная ЭДС равна 220 В. Построить соответствующую схеме векторную диаграмму.

13.7. Фазы симметричного трехфазного электродвигателя с сопротивлениями $Z_A = Z_B = Z_C = (45 + j35)$ Ом соединены звездой и включены в сеть трехфазного тока с фазным напряжением 220 В. Определить линейные токи цепи и активную мощность электро-

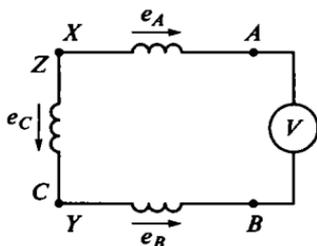


Рис. 13.9. Схема соединения обмоток трехфазного генератора

двигателя. Построить векторную диаграмму.

13.8. Определить напряжения на фазах электродвигателя и линейные токи цепи, заданной в задаче 13.7, если произошел

обрыв в фазе A . Построить топографическую диаграмму цепи.

13.9. Определить напряжения на фазах электродвигателя и линейные токи цепи, заданной в задаче 13.7, при коротком замыкании фазы A . Построить векторную диаграмму цепи.

13.10. Определить, как изменятся линейные токи цепи, заданной в задаче 13.7, и общая активная мощность, если фазы электродвигателя соединить треугольником.

13.11. Трехфазный электродвигатель, фазы которого соединены звездой, питается от трехфазной сети с фазным напряжением 220 В. Двигатель развивает механическую мощность 10 кВт при коэффициенте полезного действия 0,85. Коэффициент мощности фазы двигателя равен 0,83. Составить схему замещения цепи и вычислить линейные токи. Определить параметры схемы замещения двигателя. Построить векторную диаграмму цепи.

13.12. Три активных сопротивления по 85 Ом соединены треугольником и включены в сеть трехфазного тока с линейным напряжением 380 В. Определить фазные и линейные токи, мощность каждой фазы и всей цепи. Построить векторную диаграмму.

13.13. Трехфазный симметричный потребитель, соединенный треугольником, питается от трехфазной сети с линейным напряжением 380 В и потребляет мощность 15 кВт. Сопротивление каждой фазы 25 Ом. Определить фазные и линейные токи цепи, активную и реактивную составляющие сопротивления фазы, коэффициент мощности, угол сдвига фаз между напряжением и током фазы, полную мощность потребителя. Построить векторную диаграмму.

13.14. Симметричный трехфазный приемник энергии с активными сопротивлениями $z_A = z_B = z_C = R$ питается от симметричного трехфазного генератора (см. рис. 13.1). Линейное напряжение $U_n = 380$ В. Определить показания вольтметра, включенного между точками N и N' , в следующих случаях:

- приемник включен полностью;
- короткое замыкание фазы B' ;
- обрыв в фазе A' .

13.15. Определить показания амперметров, измеряющих линейные токи в цепи, приведенной на рис. 13.1, при данных задачи 13.14 для случаев, указанных в этой задаче, если $R = 110$ Ом.

13.16. Определить, как изменятся токи в схеме на рис. 13.1 при данных задачи 13.14 в следующих случаях: а) приемник включен полностью; б) обрыв в фазе A' при наличии нулевого провода (см. рис. 13.6). Найти, чему равен в этих случаях ток в нулевом проводе.

13.17. Лампы накаливания общей мощностью 1,8 кВт распределены на три группы и соединены звездой. Полученный таким образом трехфазный приемник включен в четырехпроводную сеть трехфазного тока с линейным напряжением 380 В. При этом отношение токов в фазах приемника $I'_A : I'_B : I'_C = 1 : 2 : 3$. Определить токи в линейных проводах и в нейтральном проводе. Построить векторную диаграмму.

13.18. Трехфазный приемник, соединенный звездой, присоединен к четырехпроводной сети с фазным напряжением 220 В. Мощность, потребляемая фазой A , составляет 3 кВт при $\cos \varphi_A = 0,87$; мощность, потребляемая фазой B , — 2 кВт при $\cos \varphi_B = 0,8$; мощность, потребляемая фазой C , — 1,5 кВт при $\cos \varphi_C = 0,9$. Определить токи во всех проводах и построить векторную диаграмму цепи, учитывая, что φ_A , φ_B и φ_C — положительные углы.

13.19. Для цепи из задачи 13.18 определить ток в нейтральном проводе при поочередном обрыве одного из линейных проводов: а) фазы A ; б) фазы B ; в) фазы C .

13.20. Для цепи из задачи 13.18 определить линейные токи при отсутствии нулевого провода и поочередном обрыве одного из линейных проводов: а) фазы A ; б) фазы B ; в) фазы C .

13.21. Электрические лампы накаливания общей мощностью 4 кВт распределены на три группы (фазы) и присоединены треугольником к трехфазной сети с линейным напряжением 220 В (см. рис. 13.3). Распределение мощности ламп по фазам следующее: фаза A — 500 Вт; фаза B — 1500 Вт; фаза C — 2000 Вт. Определить фазные и линейные токи. Построить векторную диаграмму.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

13.6. 440 В; векторная диаграмма показана на рис. 13.10.

13.7. 3,85 А; 2 кВт.

13.8. $U'_A = 330$ В; $U'_B = U'_C = 190$ В; $I_A = 0$; $I_B = I_C = 3,33$ А.

13.9. $U'_A = 0$; $U'_B = U'_C = U_\Delta = 380$ В; $I_A = 11,54$ А; $I_B = I_C = 6,67$ А.

13.10. Увеличатся в 3 раза (с 3,85 до 11,55 А и с 2 до 6 кВт).

13.11. $I_A = I_B = I_C = 21,5$ А; активное сопротивление каждой фазы 8,5 Ом, индуктивное сопротивление фазы 5,7 Ом.

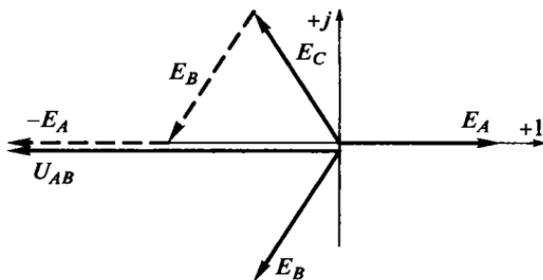


Рис. 13.10. Векторная диаграмма цепи к задаче 13.6

13.12. 4,5 А; 7,8 А; 1,7 кВт; 5,1 кВт.

13.13. 15,2 А; 26,3 А; 21,6 Ом; 12,5 Ом; 0,87; 30°; 17,3 В·А.

13.14. а) 0; б) 220 В; в) 110 В.

13.15. а) три тока по 2А; б) $I_A = 6$ А; $I_B = I_C = 3,46$ А; в) $I_A = 0$; $I_B = I_C = 1,73$ А.

13.16. а) линейные токи не изменятся; $I_N = 0$; б) $I_A = 0$; $I_B = I_C = I_N = 2$ А.

13.17. 1,36 А; 2,72 А; 4,08 А; 2,36 А.

13.18. 15,67 А; 11,36 А; 7,58 А; 5,33 А.

13.19. а) 11,43 А; б) 13,11 А; в) 12,62 А.

13.20. а) $I_A = 0$, $I_B = I_C = 7,89$ А; б) $I_B = 0$, $I_A = I_C = 8,84$ А; в) $I_C = 0$, $I_A = I_B = 11,41$ А.

13.21. $I_{AB} = 2,27$ А; $I_{BC} = 6,82$ А; $I_{CA} = 9,09$ А; $I_A = 10,4$ А; $I_B = 8,19$ А; $I_C = 13,81$ А.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

14.1. Определение токов и напряжений после коммутации цепи

Задача 14.1. Цепь, показанная на рис. 14.1, с параметрами $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 70 \text{ Ом}$, $R_3 = 300 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $C = 3 \text{ мкФ}$ подключается рубильником S к источнику питания с постоянным напряжением $U = 63 \text{ В}$.

Определить силы токов ветвей, силу общего тока и напряжения на индуктивности, емкости и активных сопротивлениях в двух случаях:

а) сразу после замыкания рубильника ($t = 0$);

б) через сравнительно длительное время ($t = \infty$) после замыкания рубильника — в установившемся режиме.

Решение. 1. Особенности работы заданной цепи в переходном режиме. Заданная цепь исследуется при ее подключении к источнику питания и после наступления установившихся значений токов и напряжений.

Как известно из теории, любая коммутация в электрической цепи (мгновенное изменение режима работы в результате включения или выключения источников питания, участков цепи или ее элементов R , L или C) является условием возникновения в ней переходного процесса. *Переходный процесс* — это процесс перехода из одного установившегося состояния, существовавшего до коммутации, в другое установившееся состояние, наступающее через значительное время после коммутации и длящееся бесконечно долго, т. е. в интервале времени t от 0 до ∞ .

Переходные процессы в цепях с разным характером (активно-

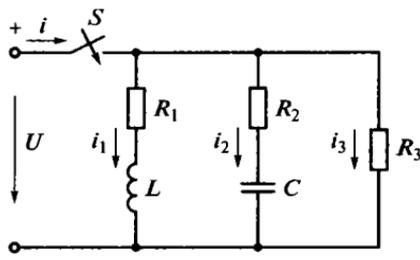


Рис. 14.1. Включение линейной электрической цепи к источнику питания с постоянным напряжением

индуктивным или активно-емкостным) имеют свои особенности, так как обусловлены разными физическими причинами. Однако в обоих случаях они препятствуют мгновенному достижению установившихся значений электрических величин.

Заданная цепь состоит из трех параллельных ветвей. В этом случае токи ветвей не зависят друг от друга, что позволяет рассматривать процессы подключения к источнику питания каждой ветви по отдельности.

2. Определение силы тока и напряжений в ветви с индуктивностью. Найдем силу тока и напряжения на участках ветви R_1-L сразу же после замыкания рубильника ($t = 0$). Продолжительность коммутации примем равной нулю. Для удобства обозначим момент, предшествующий коммутации, как $t = (0-)$, а момент завершения коммутации как $t = (0+)$.

Для цепи с индуктивностью справедлив первый закон коммутации, согласно которому *ток в индуктивности не может измениться мгновенно, скачком*.

При разомкнутом рубильнике S в ветви R_1-L ток отсутствовал, т. е. при $t = (0-)$ сила тока $i_1(0-) = 0$. Из первого закона коммутации следует, что в первый момент после замыкания рубильника ($t = (0+)$) сила тока i_1 также равна нулю, т. е.

$$i_1(0+) = i_1(0-) = 0. \quad (14.1)$$

Запишем напряжение на сопротивлении R_1 до замыкания рубильника S в соответствии с законом Ома и с учетом выражения (14.1):

$$u_{R_1}(0-) = i_1(0-)R_1 = 0.$$

Сразу же после замыкания рубильника напряжение на сопротивлении R_1

$$u_{R_1}(0+) = i_1(0+)R_1 = 0.$$

Таким образом,

$$u_{R_1}(0+) = u_{R_1}(0-) = 0. \quad (14.2)$$

Напряжение на индуктивности L до коммутации $u_L(0-) = 0$, так как ветвь не была подключена к источнику питания.

Напряжение на индуктивности L сразу после коммутации находим как разность общего напряжения ветви R_1-L (последовательного соединения сопротивления R_1 и индуктивности L) и напряжения на сопротивлении R_1 . Так как сразу же после замыкания рубильника напряжение ветви R_1-L практически мгновенно становится равным напряжению источника питания

($u(0+) = U$), поскольку продолжительность коммутации равна нулю, с учетом формулы (14.2) получим

$$u_L(0+) = U - u_{R_1}(0+) = U. \quad (14.3)$$

Таким образом, напряжение на сопротивлении R_1 после коммутации не изменилось, т. е. остается равным нулю (см. формулу (14.2)), а на индуктивности изменилось скачком от нуля до значения напряжения U источника (см. формулу (14.3)).

С учетом данных задачи после коммутации получим

$$i_1(0+) = 0; \quad u_{R_1}(0+) = 0; \quad u_L(0+) = U = 63 \text{ В.}$$

Определим силу тока и напряжения на участках ветви R_1-L в установившемся режиме ($t = \infty$). Ветвь R_1-L при включении на постоянное напряжение имеет сопротивление, равное только активному сопротивлению R_1 , поскольку индуктивное сопротивление постоянному току ($\omega = 0$) $x_L = \omega L = 0 \cdot L = 0$. Таким образом, сила тока в ветви R_1-L в установившемся режиме в соответствии с законом Ома

$$I_{1\text{уст}} = U/R_1. \quad (14.4)$$

Напряжение на индуктивности при $t = \infty$ согласно закону Ома

$$U_{L\text{уст}} = I_{1\text{уст}}x_L = I_{1\text{уст}} \cdot 0 = 0. \quad (14.5)$$

Напряжение на сопротивлении R_1 ветви R_1-L в установившемся режиме с учетом равенства (14.5)

$$U_{R_1\text{уст}} = U - U_{L\text{уст}} = U - 0 = U. \quad (14.6)$$

Таким образом, при $t = \infty$ к сопротивлению R_1 ветви R_1-L целиком приложено напряжение источника.

С учетом данных задачи в соответствии с формулами (14.4)... (14.6) получим

$$I_{1\text{уст}} = U/R_1 = 63/100 = 0,63 \text{ А}; \quad U_{L\text{уст}} = 0; \quad U_{R_1\text{уст}} = U = 63 \text{ В.}$$

3. Определение силы тока и напряжений в ветви с емкостью. Найдем силу тока и напряжения на участках ветви R_2-C сразу же после замыкания рубильника ($t = 0$). До коммутации ветвь с последовательным соединением R_2 и C была отключена от источника питания, поэтому сила тока в этой ветви и напряжения на ее участках до коммутации равнялись нулю:

$$i_2(0-) = 0; \quad u_{R_2}(0-) = i_2(0-)R_2 = 0; \quad u_C(0-) = 0. \quad (14.7)$$

Как известно из теории, в ветви с емкостью сразу после коммутации возникает ток $i_2(0+) > 0$, заряжающий емкость. При этом справедлив второй закон коммутации: *напряжение на емкости не может измениться скачком. В момент, непосредственно следующий за коммутацией, напряжение на емкости имеет то же значение, которое оно имело в момент, непосредственно предшествующий коммутации.*

Из второго закона коммутации следует, что напряжение на емкости сразу после коммутации остается прежним. Учитывая, что $u_C(0-) = 0$ (см. уравнения (14.7)), получим

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0. \quad (14.8)$$

Напряжение на сопротивлении R_2 сразу после коммутации найдем как разность общего напряжения ветви R_2-C (последовательного соединения сопротивления R_2 и емкости C) и напряжения на емкости C . Поскольку сразу же после замыкания рубильника напряжение ветви R_2-C практически мгновенно становится равным напряжению источника питания ($u(0+) = U$), с учетом формулы (14.8) получим

$$u_{R_2}(0+) = U - u_C(0+) = U. \quad (14.9)$$

Таким образом, после коммутации напряжение на емкости C в цепи R_2-C не изменилось, т. е. осталось равным нулю (см. формулу (14.8)), а на сопротивлении R_2 изменилось скачком от нуля до значения напряжения источника U (см. формулу (14.9)).

Сила тока в ветви R_2-C сразу после коммутации изменится от нуля (см. формулу (14.7)) до значения, определяемого по закону Ома:

$$i_2(0+) = u_{R_2}(0+)/R_2 = U/R_2. \quad (14.10)$$

С учетом данных задачи после коммутации получим

$$u_{R_2}(0+) = U = 63 \text{ В}; \quad i_2(0+) = U/R_2 = 63/70 = 0,9 \text{ А}; \quad u_C(0+) = 0.$$

Определим силу тока и напряжения на участках ветви R_2-C в установившемся режиме ($t = \infty$). Ветвь R_2-C при включении на постоянное напряжение ($\omega = 0$) имеет бесконечно большое сопротивление, определяемое емкостным сопротивлением (сопротивлением R_2 из-за его малости по сравнению с емкостным сопротивлением можно пренебречь):

$$x_C = 1/(\omega C) = 1/(0 \cdot C) = \infty.$$

Таким образом, сила тока в ветви R_2-C в установившемся режиме в соответствии с законом Ома

$$I_{2 \text{ уст}} = U/x_C = U/\infty = 0. \quad (14.11)$$

Напряжение на сопротивлении R_2 при $t = \infty$ в соответствии с законом Ома

$$U_{R_2 \text{ уст}} = I_{2 \text{ уст}} R_2 = I_{2 \text{ уст}} R_2 = 0 \cdot R_2 = 0. \quad (14.12)$$

Напряжение на емкости C в установившемся режиме в силу последовательности соединения R_2 и C

$$U_{C \text{ уст}} = U - U_{R_2 \text{ уст}} = U - 0 = U. \quad (14.13)$$

Таким образом, при $t = \infty$ напряжение источника оказывается целиком приложенным к емкости C .

С учетом данных задачи в соответствии с формулами (14.11) ... (14.13) получим

$$I_{2 \text{ уст}} = 0; U_{R_2 \text{ уст}} = I_{2 \text{ уст}} R_2 = 0 \cdot 70 = 0; U_{C \text{ уст}} = U = 63 \text{ В}.$$

4. Определение силы тока и напряжений в ветви с сопротивлением R_3 . Найдем силу тока и напряжение на сопротивлении R_3 сразу же после замыкания рубильника ($t = 0$). До коммутации ветвь с сопротивлением R_3 , как и вся цепь, была отключена от источника питания, следовательно, при $t = (0-)$ напряжение и сила тока в ветви с R_3 равнялись нулю:

$$u_{R_3}(0-) = 0; i_3(0-) = u_{R_3}(0-)/R_3 = 0/R_3 = 0. \quad (14.14)$$

Ветвь R_3 не содержит реактивных элементов (индуктивностей и емкостей), в которых протекают физические процессы, препятствующие мгновенному изменению напряжений и токов в цепи, поэтому после замыкания рубильника напряжение на сопротивлении R_3 практически мгновенно устанавливается равным напряжению питания U :

$$u_{R_3}(0+) = U. \quad (14.15)$$

В соответствии с законом Ома сила тока в сопротивлении R_3 сразу после замыкания рубильника

$$i_3(0+) = u_{R_3}(0+)/R_3 = U/R_3. \quad (14.16)$$

Таким образом, после замыкания рубильника напряжение в сопротивлении R_3 изменяется скачком от нулевого значения (см. формулу (14.14)) до значения U (см. формулу (14.15)), а сила тока изменяется скачком от нулевого значения (см. формулу (14.14)) до значения U/R_3 (см. формулу (14.16)).

С учетом данных задачи после коммутации получим

$$u_{R_3}(0+) = U = 63 \text{ В}; i_3(0+) = U/R_3 = 63/300 = 0,21 \text{ А}.$$

Определим силу тока и напряжение в ветви R_3 в установившемся режиме ($t = \infty$). После коммутации в ветви с сопротивлением R_3 практически мгновенно устанавливаются значения на-

пряжения и силы тока (см. формулу (14.15)), которые сохраняются до следующей коммутации цепи. Таким образом, в установившемся режиме напряжение на сопротивлении R_3

$$U_{R_3 \text{ уст}} = u_{R_3}(0+) = U. \quad (14.17)$$

Сила тока в сопротивлении R_3 в установившемся режиме в соответствии с законом Ома

$$I_{3 \text{ уст}} = U_{R_3 \text{ уст}} / R_3 = U / R_3. \quad (14.18)$$

С учетом данных задачи в соответствии с формулами (14.17), (14.18) получим

$$U_{R_3 \text{ уст}} = U = 63 \text{ В}; \quad I_{3 \text{ уст}} = U / R_3 = 63 / 300 = 0,21 \text{ А.}$$

5. Определение силы общего тока в цепи. Найдем силу общего тока в цепи и напряжение на ее зажимах сразу же после замыкания рубильника ($t = 0$). До коммутации цепь была отключена от источника питания. Следовательно, напряжение на зажимах цепи и сила общего тока равнялись нулю:

$$u(0-) = 0; \quad i(0-) = 0. \quad (14.19)$$

Сразу же после замыкания рубильника на зажимах цепи установилось напряжение $u(0+) = U$, а силу общего тока в соответствии с первым законом Кирхгофа и с учетом формул (14.1), (14.10), (14.16) запишем в виде

$$\begin{aligned} i(0+) &= i_1(0+) + i_2(0+) + i_3(0+) = 0 + U / R_2 + U / R_3 = \\ &= U(1 / R_2 + 1 / R_3). \end{aligned} \quad (14.20)$$

Таким образом, после замыкания рубильника напряжение на зажимах цепи изменилось от нуля до напряжения питания U , а сила общего тока изменилась от нуля до значения, равного $U(1 / R_2 + 1 / R_3)$.

С учетом данных задачи сила общего тока после коммутации

$$i(0+) = 0 + 0,9 + 0,21 = 1,11 \text{ А.}$$

Определим силу общего тока в цепи в установившемся режиме ($t = \infty$). В соответствии с первым законом Кирхгофа и с учетом формул (14.4), (14.11), (14.18) установившееся значение силы общего тока

$$\begin{aligned} I_{\text{уст}} &= I_{1 \text{ уст}} + I_{2 \text{ уст}} + I_{3 \text{ уст}} = U / R_1 + 0 + U / R_3 = \\ &= U(1 / R_1 + 1 / R_3). \end{aligned} \quad (14.21)$$

С учетом данных задачи согласно формуле (14.21) получим

$$I_{\text{уст}} = 0,63 + 0 + 0,21 = 0,84 \text{ А.}$$

14.2. Составление уравнений и построение графиков переходных процессов в цепи

Задача 14.2. Цепь, представленная на рис. 14.1, с параметрами $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 500 \text{ Ом}$, $R_3 = 400 \text{ Ом}$, $L = 0,4 \text{ Гн}$, $C = 5 \text{ мкФ}$ подключается рубильником S к источнику питания с постоянным напряжением $U = 100 \text{ В}$.

Составить уравнения и построить графики переходного процесса в заданной цепи.

Решение. 1. Особенности работы заданной цепи в режиме переходного процесса. Заданная цепь исследуется после коммутации в интервале времени t от $0(+)$ до ∞ , т.е. в режиме переходного процесса.

Из теории известно, что переходные процессы протекают в электрических цепях за счет физических процессов в реактивных элементах (индуктивностях и емкостях), препятствующих мгновенному изменению напряжений и токов. Таким образом, режим переходного процесса в цепи на рис. 14.1 характеризуется совокупностью переходных процессов, протекающих в ветвях R_1-L (с активно-индуктивным характером) и R_2-C (с активно-емкостным характером). Переходный процесс в ветви R_3 (с чисто активным характером) отсутствует.

2. Определение постоянных времени ветвей и длительности переходных процессов в цепи. На практике принято считать, что длительность переходных процессов в цепях составляет $(4 \dots 6)\tau$, где τ — постоянная времени, определяемая параметрами цепи.

Постоянная времени ветви R_1-L с учетом данных задачи

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1} = \frac{0,4}{200} = 2 \text{ мс.}$$

Длительность переходного процесса в ветви R_1-L

$$t_1 = 5\tau_1 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ мс.}$$

Постоянная времени ветви R_2-C

$$\tau_2 = R_2 C = 500 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 2,5 \text{ мс.}$$

Длительность переходного процесса в ветви R_2-C

$$t_2 = 5 \tau_2 = 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ мс.}$$

При заданных параметрах цепи переходный процесс в ветви с конденсатором длится в 1,25 раз дольше, чем в ветви с катушкой.

3. Составление уравнений и построение графиков переходного процесса в ветви R_1-L . Рас-

смотрим изменение тока в ветви R_1-L . В соответствии с теорией переходных процессов после включения ветви R_1-L (цепи с индуктивностью) на постоянное напряжение ток в ветви

$$i_1 = I_{1\text{уст}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right), \quad (14.22)$$

где $I_{1\text{уст}} = U/R_1$ — установившееся значение тока i_1 ; t — текущее время; τ_1 — постоянная времени ветви R_1-L , $\tau_1 = L/R_1$.

С учетом данных задачи закон изменения тока в ветви R_1-L будет иметь вид

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}} \right) = \frac{100}{200} \left(1 - e^{-\frac{200t}{0,4}} \right) = 0,5(1 - e^{-500t}) \text{ А.} \quad (14.23)$$

Рассмотрим изменение напряжения на индуктивности ветви R_1-L . В соответствии с теорией переходных процессов, напряжение на индуктивности после включения ветви R_1-L на постоянное напряжение изменяется по закону

$$u_L = U e^{-\frac{t}{\tau_1}} \text{ В,}$$

т. е. с учетом данных задачи

$$u_L = 100e^{-500t} \text{ В.} \quad (14.24)$$

В соответствии с законом Ома и с учетом выражения (14.22) получим уравнение изменения напряжения на сопротивлении R_1 после включения ветви на постоянное напряжение:

$$u_{R_1} = i_1 R_1 = \frac{U R_1}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right),$$

т. е. с учетом данных задачи

$$u_{R_1} = 100(1 - e^{-500t}) \text{ В.} \quad (14.25)$$

Для построения графиков переходного процесса в ветви R_1-L рассчитаем значения тока в ветви и напряжений на ее участках (см. уравнения (14.23) ... (14.25)) через промежутки времени, равные постоянной времени τ_1 ветви, за время $t = 6\tau_2$, т. е. до практического завершения переходного процесса в ветви R_2-C как более длительного и, следовательно, во всей цепи.

Результаты такого расчета представлены в табл. 14.1, а графики, построенные по результатам расчета, — на рис. 14.2.

Изменение значений i_1 и u_{R_1} и u_L в течение переходного процесса

t , мс	0	2	4	6	8	10	112	14	16
i_1 , А	0	0,316	0,432	0,475	0,491	0,497	0,499	0,5	0,5
u_{R_1} , В	0	63	86	95	98	99	100	100	100
u_L , В	100	37	14	5	2	1	0	0	0

4. Составление уравнения и построение графиков переходного процесса в ветви с емкостью R_2 -С. Рассмотрим изменение зарядного тока в ветви R_2 -С. В соответствии с теорией переходных процессов после включения ветви R_2 -С (цепь с емкостью) на постоянное напряжение ток в ветви изменяется по закону

$$i_2 = \frac{U}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (14.26)$$

С учетом данных задачи

$$i_2 = \frac{100}{500} e^{-\frac{10^6 t}{500 \cdot 5}} = 0,2 e^{-400t} \text{ А}. \quad (14.27)$$

В соответствии с теорией переходных процессов напряжение на емкости после включения ветви R_2 -С на постоянное напряжение изменяется по закону

$$u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right).$$

С учетом данных задачи

$$u_C = 100 \left(1 - e^{-\frac{1000t}{2,5}} \right) = 100(1 - e^{-400t}) \text{ В}. \quad (14.28)$$

В соответствии с законом Ома и с учетом выражения (14.26) получим уравнение изменения на-

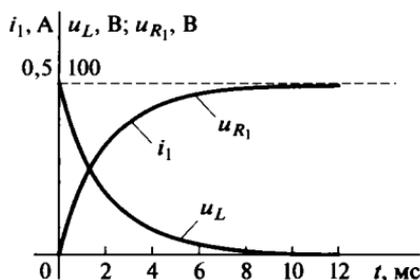


Рис. 14.2. Графики переходного процесса при включении ветви R_1 -L на постоянное напряжение

пряжения на сопротивлении R_2 после включения ветви с емкостью на постоянное напряжение:

$$u_{R_2} = i_2 R_2 = \frac{UR}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = Ue^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

С учетом данных задачи

$$u_{R_2} = 100e^{-400t} \text{ В.} \quad (14.29)$$

Для построения графиков переходного процесса в ветви R_2 - C рассчитаем значения тока в ветви и напряжений на ее участках (см. уравнения (14.27) ... (14.29)) за время $t = 6\tau_2$, т. е. до практического завершения переходного процесса, через промежутки, равные 2 мс (в тех же масштабах по осям координат, что и для ветви R_1 - L для удобства последующего использования графиков).

Результаты такого расчета представлены в табл. 14.2, а графики, построенные по результатам расчета, — на рис. 14.3.

Таблица 14.2

Изменение значений i_2 , u_{R_2} и u_C в течение переходного процесса

t , мс	0	2	4	6	8	10	12	14	16
i_2 , А	0,2	0,09	0,04	0,018	0,008	0,004	0,002	0,001	0
u_{R_2} , В	100	44,9	20,9	9,1	4,1	1,8	0,8	0,4	0,2
u_C , В	0	55,1	79,8	90,9	95,9	98,2	99,2	99,6	99,8

5. Составление уравнения и построение графика общего тока в цепи во время переходного процесса. Так как переходный процесс в цепи с активным сопротивлением отсутствует, ток i_3 , в ветви R_3 после включения цепи

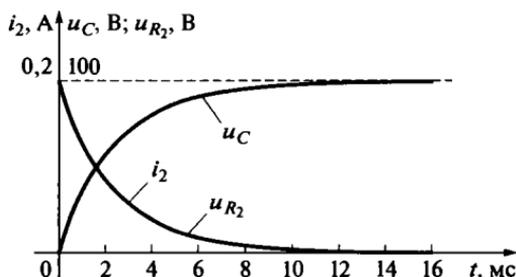


Рис. 14.3. Графики переходного процесса при включении ветви R_2 - L на постоянное напряжение

на постоянное напряжение практически мгновенно достигает установившегося значения, т. е. $i_3 = I_{3\text{уст}}$.

В соответствии с первым законом Кирхгофа и с учетом формул (14.22), (14.26) и (14.18) общий ток параллельного соединения ветвей цепи (см. рис. 14.1) после включения ее на постоянное напряжение

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{U}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}} \right) + \frac{U}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}} + \frac{U}{R_3}. \quad (14.30)$$

Уравнение общего тока (14.30) с учетом данных задачи и формул (14.23), (14.27) будет иметь вид

$$i = 0,5(1 - e^{-500t}) + 0,2e^{-400t} + 100/400 = (0,75 - 0,5e^{-500t} + 0,2e^{-400t}) \text{ А}. \quad (14.31)$$

Для построения графика общего тока в цепи во время переходного процесса можно рассчитать значения тока i (см. уравнение (14.31)) через равные интервалы времени, например через $\tau_1 = 2$ мс за время $t = 6\tau_2 = 16$ мс. Однако поскольку значения токов i_1 и i_2 через указанные интервалы времени уже определены по ходу решения задачи (см. табл. 14.1 и 14.2), то значения общего тока в те же моменты времени легко получить как сумму известных значений i_1 , i_2 и $i_3 = 25$ А.

Результаты расчета общего тока i представлены в табл. 14.3.

На рис. 14.4 показаны графики токов i_1 , i_2 в ветвях, тока $i_3 = 25$ А и общего тока i в цепи.

Таблица 14.3

Изменение общего тока i во время переходного процесса

t , мс	0	2	4	6	8	10	12	14	16
i , А	0,45	0,656	0,722	0,743	0,749	0,751	0,751	0,751	0,75

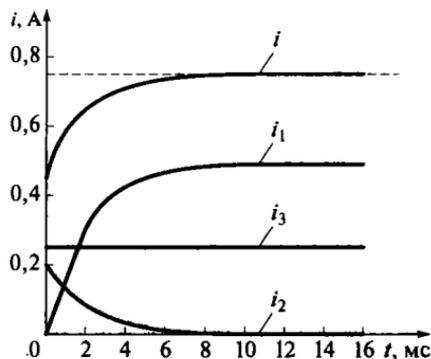


Рис. 14.4. Графики токов в цепи, приведенной на рис. 14.1, во время переходного процесса при включении цепи на постоянное напряжение

14.3. Задачи для самостоятельного решения

14.3. В схеме замещения электрической цепи, приведенной на рис. 14.1, сопротивления R_1 , R_2 , R_3 заменяют осветительные лампы $H1$, $H2$, $H3$ реальной цепи. Опишите процесс свечения ламп с момента замыкания рубильника S .

14.4. Определить постоянные времени ветвей цепи, показанной на рис. 14.1, по исходным данным задачи 14.1. Найти длительность переходного процесса в каждой из ветвей.

14.5. Составить уравнения изменения во времени токов в ветвях цепи, представленной на рис. 14.1, и силы общего тока в ней, используя данные задачи 14.1.

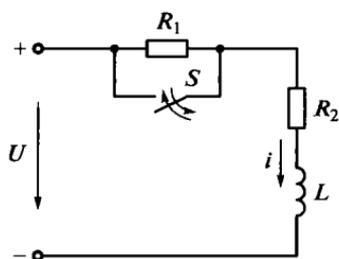
14.6. Определить начальные и конечные значения силы тока i_1 и напряжения u_C в цепи на рис. 14.1, если при исходных данных из задачи 14.1 в установившемся режиме ее работы разомкнуть рубильник S .

14.7. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью включают на постоянное напряжение U . Определить, как повлияет на напряжение индуктивности в момент включения рубильника и в установившемся режиме увеличение активного сопротивления цепи.

14.8. Вывести закон изменения силы тока в цепи, представленной на рис. 14.5, при уменьшении ее сопротивления, например в результате короткого замыкания резистора R_1 рубильником S . Построить график изменения силы тока во время переходного процесса.

14.9. Вывести закон изменения силы тока в цепи, представленной на рис. 14.5, при увеличении сопротивления, например в результате размыкания рубильника S . Построить график изменения силы тока во время переходного процесса.

14.10. Катушку индуктивности с сопротивлением $R = 5$ Ом и индуктивностью $L = 0,2$ Гн подключили к источнику постоянного напряжения $U = 12$ В. Определить: максимальное значение силы тока в катушке; время, за которое сила тока практически достигнет максимального значения; силу тока через 120 мс после включения цепи.



14.11. Катушку индуктивности, активное сопротивление которой 50 Ом, отключили от источника питания с напряжением 10 В. Определить силу тока

Рис. 14.5. Скачкообразное изменение активного сопротивления в RL -цепи

в катушке и напряжение на ней в момент, следующей за отключением питания.

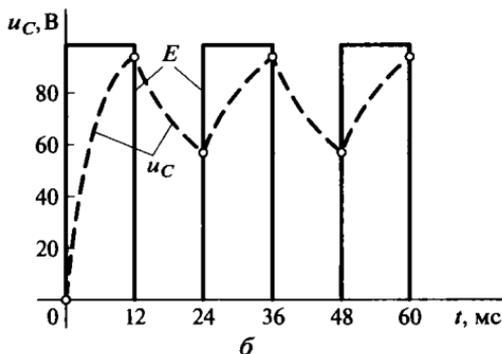
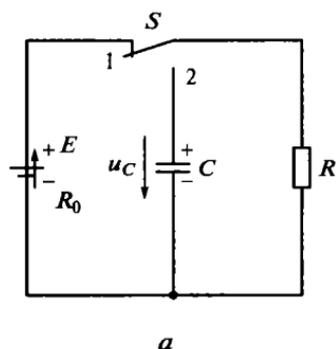
14.12. Цепь с последовательным соединением активного сопротивления $R = 100$ Ом и емкости $C = 5$ мкФ подключили к источнику постоянного напряжения 10 В. Определить напряжение на сопротивлении и силу тока в цепи сразу после ее включения и в установившемся режиме. Найти напряжение на конденсаторе через 3 мс.

14.13. В цепи, представленной на рис. 14.5, параметры которой $R_1 = 70$ Ом, $R_2 = 30$ Ом и $L = 0,25$ Гн, до размыкания рубильника протекал постоянный ток $I = 4,5$ А. Получить закон изменения силы тока в цепи во времени с момента размыкания рубильника и построить график тока $i = f(t)$ во время переходного процесса.

14.14. К источнику синусоидального напряжения $u = 60 \sin(314t + \pi/2)$ присоединяется катушка с индуктивностью $L = 0,4$ Гн и активным сопротивлением 5 Ом. Получить закон изменения силы тока переходного процесса и определить силу тока через три периода после момента ее включения.

14.15. Цепь с последовательным соединением активного сопротивления $R = 200$ Ом и индуктивности $L = 2$ Гн включается в сеть синусоидального напряжения 220 В с частотой 50 Гц. Получить закон изменения тока переходного процесса и построить соответствующий график, если в момент присоединения питания начальная фаза напряжения $\psi = 0$.

14.16. При переключении рубильника S на рис. 14.6, *a* в положение 1 конденсатор емкостью 10 мкФ заряжается от источника энергии, ЭДС которого $E = 100$ В, а внутреннее сопротивление $R_0 = 400$ Ом. При переключении рубильника в положение 2 кон-



14.6. Получение пилообразного напряжения в RL -цепи:

a — схема присоединения конденсатора к источнику энергии (положение 1 рубильника S) и к потребителю (положение 2 рубильника S); *б* — график изменения напряжения на конденсаторе во времени

денсатор разряжается через сопротивление $R = 2400$ Ом. Рубильник переключается из одного положения в другое с интервалом в 12 мс. Определить напряжения на конденсаторе в моменты периодического включения и отключения источника питания в течение времени от начала первого подключения к источнику ($t = 0$) до 60 мс и построить график изменения напряжения на конденсаторе за это время.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

14.3. Лампа $H1$ в первый момент после замыкания рубильника не горит. С течением времени свечение лампы увеличивается и через время, равное $(4 \dots 6)\tau$ (где τ — постоянная времени), практически достигает максимальной яркости. Лампа $H2$ в первый момент после замыкания рубильника имеет наибольшую яркость свечения, затем ее свечение постепенно ослабляется и через время, равное $(4 \dots 6)\tau$, она практически полностью погаснет. Лампа $H3$ имеет наибольшую яркость свечения практически сразу после замыкания рубильника, которая не изменяется до его размыкания.

14.4. 2 мс; 0,21 мс; 8... 12 мс; 0,84... 1,26 мс.

14.5. $i_1 = 0,63(1 - e^{-500t})$ А; $i_2 = 0,9e^{-4762t}$ А; $i_3 = 0,21$ А; $i = (0,84 - 0,63e^{-500t} + 0,9e^{-4762t})$ А.

14.6. $i_1(0+) = 0,63$ А, между контактами рубильника образуется электрическая дуга; $i_{\text{уст}} = 0$; $u_C(0+) = 63$ В; $u_{C_{\text{уст}}} = 0$.

14.7. Напряжение на индуктивности ни в момент включения рубильника, ни в установившемся режиме не зависит от активного сопротивления цепи и, следовательно, не изменится при его изменении.

14.8. $i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}} = I_2 - (I_2 - I_1)e^{-t/\tau}$, где $i_{\text{уст}} = I_2 = U/R_2$ — установившееся значение силы тока после замыкания рубильника S ; $i_{\text{св}} = -(I_2 - I_1)e^{-t/\tau}$ — свободная составляющая силы тока; $I_1 = i(0) = U/(R_1 + R_2)$ — установившееся значение силы тока до замыкания рубильника S ; $\tau = L/R_2$ — постоянная времени. График приведен на рис. 14.7, а.

14.9. $i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}} = I_1 + (I_2 - I_1)e^{-t/\tau}$, где $i_{\text{уст}} = I_1 = U/(R_1 + R_2)$ — установившееся значение силы тока после размыкания рубильника S ; $i_{\text{св}} = (I_2 - I_1)e^{-t/\tau}$ — свободная составляющая силы тока; $I_2 = i(0) = U/R_2$ — установившееся значение силы тока до размыкания рубильника S ; $\tau = L/(R_1 + R_2)$ — постоянная времени. График приведен на рис. 14.7, б.

14.10. 2,4 А; 160... 240 мс; 2,28 А.

14.11. 0,2 А; 10 В.

14.12. 10 В; 0,1 А; 0; 0; 10 В.

14.13. $(1,5 + 3,0e^{-400t})$ А.

14.14. $(0,477 \sin(314t + 2^\circ 17') - 0,019e^{-12,5t})$ А; 10 мА.

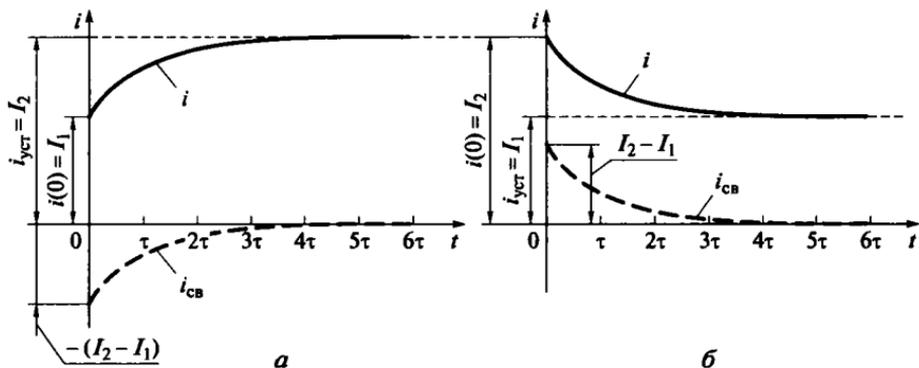


Рис. 14.7. Графики изменения тока в RL -цепи после скачкообразного уменьшения (а) и увеличения (б) ее сопротивления

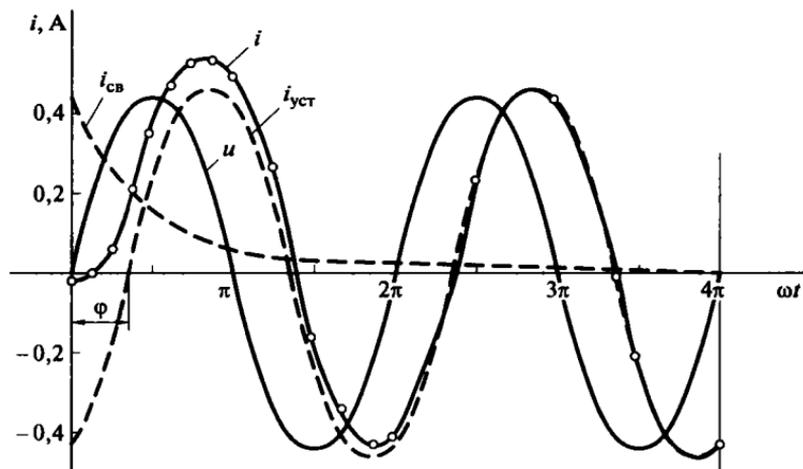


Рис. 14.8. Графики изменения тока переходного процесса и составляющих этого тока в RL -цепи при включении ее на синусоидальное напряжение

14.15. $(0,47 \sin(314t - 72^\circ 20') + 0,45e^{-100t})$ А. График на рис. 14.8.

14.16.

t , мс	0	12	24	36	48	60
u_C , В	0	95	57,62	97,88	59,37	97,97

График изменения напряжения u_C во времени представлен на рис. 14.6, б.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Единицы измерения электрических и магнитных величин

Величина	Единица			
	Наименование	Обозначение		
		международное	русское	
Основные единицы СИ				
Длина	метр	m	м	
Масса	килограмм	kg	кг	
Время	секунда	S	с	
Сила электрического тока	ампер	A	А	
Термодинамическая температура	кельвин	K	К	
Количество вещества	моль	mol	моль	
Сила света	кандела	cd	кд	
Дополнительные единицы СИ				
Плоский угол	радиан	rad	рад	
Телесный угол	стерадиан	sr	ср	
Производные единицы СИ, имеющие специальные наименования				
Величина	Единица			Выражение через основные и дополнитель- ные единицы СИ
	Наименование	Обозначение		
		международное	русское	
Частота	герц	Hz	Гц	c^{-1}
Сила	ньютон	N	Н	$м \cdot кг \cdot c^{-2}$

Величина	Единица			Выражение через основные и дополнительные единицы СИ
	Наименование	Обозначение		
		международное	русское	
Давление	паскаль	Pa	Па	$\text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Энергия	джоуль	J	Дж	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность	ватт	W	Вт	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Количество электричества	кулон	C	Кл	$\text{с} \cdot \text{А}$
Электрическое напряжение	вольт	V	В	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая емкость	фарад	F	Ф	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Электрическое сопротивление	ом	Ω	Ом	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Электрическая проводимость	сименс	S	См	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Поток магнит- ной индукции	вебер	Wb	Вб	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Магнитная индукция	тесла	T	Тл	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Индуктивность	генри	H	Гн	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Световой поток	люмен	lm	лм	кд · ср
Освещенность	люкс	lx	лк	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$
Активность радионуклида	беккерель	Bq	Бк	с^{-1}
Поглощенная доза ионизи- рующего излучения	грэй	Gy	Гр	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Эквивалентная доза излучения	зиверт	Sv	Зв	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$

Приложение 2. Основные параметры изоляционных материалов

Материал	Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ	Электрическая прочность $\xi_{\text{пр}} \cdot 10^6$, В/м	Удельное электрическое сопротивление при 20 °С, Ом·м
Асбестовая бумага и ткань	2 ... 4	1,5 ... 3,0	$2 \cdot 10^6$
Бакелит (гетинакс):			
цилиндрический	3,8 ... 5,0	10 ... 15	$10^{11} \dots 10^{15}$
листовой	—	—	$10^{11} \dots 10^{14}$
Бумага:			
кабельная сухая	2,3 ... 3,5	6 ... 9	$10^{13} \dots 10^{14}$
пропитанная маслом	3,5 ... 3,7	10 ... 25	10^{15}
парафинированная	4,3	10 ... 25	$10^{14} \dots 10^{15}$
Вода дистиллированная	80	1,5 ... 3	10^5
Воздух	1,0	3	$10^3 \dots 10^5$
Картон электроизоляционный:			
сухой	2,5 ... 4	8 ... 10	$10^9 \dots 10^{13}$
пропитанный маслом	4 ... 5	12 ... 17	$10^{12} \dots 10^{13}$
Мрамор	8 ... 10	3,5 ... 5,5	$10^9 \dots 10^{10}$
Парафин	2,0 ... 2,2	15 ... 30	$10^{15} \dots 10^{16}$
Резина	3 ... 6	15 ... 20	$10^{15} \dots 10^{16}$
Слюда:			
мусковит	6,0 ... 7,5	120 ... 200	$10^{14} \dots 10^{15}$
флогопит	4 ... 6	80 ... 150	$10^{12} \dots 10^{14}$
Стекло	5,5 ... 10	10 ... 40	$10^{11} \dots 10^{15}$
Ткань лакированная	3,5 ... 5,0	32 ... 45	$10^{12} \dots 10^{13}$

Материал	Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ	Электрическая прочность $\xi_{\text{пр}} \cdot 10^6$, В/м	Удельное электрическое сопротивление при 20 °С, Ом·м
Фибра	3 ... 5	4 ... 11	10^{10}
Фарфор	5,0 ... 7,5	6 ... 10	$10^{14} \dots 10^{15}$
Шифер	4 ... 16	1,5 ... 3,0	$10^7 \dots 10^{10}$

Приложение 3. Удельное сопротивление и ТКС проводниковых материалов

Материал	Удельное сопротивление ρ при 20 °С, Ом·м· 10^{-6} или Ом·мм ² /м	Температурный коэффициент сопротивления α , 1/°С
Алюминий	0,028	0,00500
Вольфрам	0,055	0,00450
Константан	0,40 ... 0,51	$\pm 0,00001$
Латунь	0,025 ... 0,06	0,002 ... 0,007
Медь	0,0175	0,00400
Манганин	0,42	0,00003
Никелин	0,42	0,00030
Никель	0,10	0,00500
Нихром	1,10	0,00030
Реотан	0,47	0,00040
Свинец	0,221	0,00400
Серебро	0,016	0,00400
Сталь	0,1 ... 0,2	0,00500
Уголь	0,33 ... 1,85	$\pm 0,00060$
Фехраль	1,18	0,00008

Приложение 4. Характеристики намагничивания сталей

Магнитная индукция B , Тл	Напряженность магнитного поля H , А/м, для различных марок сталей			
	1211 1212 1311	1511 1512	Литая сталь	Пермендюор
0,10	—	40	80	57
0,20	—	50	160	70
0,30	—	60	240	73
0,40	140	70	320	76
0,45	152	75	360	79
0,50	171	85	400	82
0,55	191	94	443	—
0,60	211	110	448	85
0,65	236	127	535	—
0,70	261	145	584	88
0,75	287	165	632	—
0,80	318	185	682	91
0,85	352	210	745	—
0,95	447	270	850	—
1,00	502	300	920	97
1,05	570	340	1004	100
1,10	647	395	1090	105
1,15	739	460	1187	110
1,20	840	540	1290	115
1,25	976	640	1430	120
1,30	1140	770	1590	125
1,35	1340	970	1810	132

Магнитная индукция B , Тл	Напряженность магнитного поля H , А/м, для различных марок сталей			
	1211 1212 1311	1511 1512	Литая сталь	Пермендюор
1,40	1 580	1 300	2 090	140
1,45	1 950	1 830	2 440	150
1,50	2 500	2 750	2 890	162
1,55	3 280	3 850	3 430	180
1,60	4 370	5 150	4 100	200
1,65	5 880	6 950	4 870	225
1,70	7 780	8 900	5 750	260

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евдокимов Ф. Е.* Теоретические основы электротехники : учеб. для энергетических и электротехнических специальностей техникумов / Ф. Е. Евдокимов. — 9-е изд. — М. : Изд. центр «Академия», 2004. — 560 с.
2. Единая система конструкторской документации. Обозначения условные графические в схемах. — М. : Изд-во стандартов, 1983. — 496 с.
3. *Зайчик М. Ю.* Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике : учеб. пособие для техникумов / М. Ю. Зайчик. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Энергоатомиздат, 1988. — 496 с.
4. *Полещук В. И.* Задачник по электротехнике и электронике : учеб. пособие для сред. проф. образования / В. И. Полещук. — 3-е изд., стереотип. — М. : Изд. центр «Академия», 2007. — 224 с.
5. *Фуфаева Л. И.* Электротехника : учебник для сред. проф. образования / Л. И. Фуфаева. — М. : Изд. центр «Академия», 2009. — 384 с.
6. Электротехнический справочник / под общ. ред. В. Г. Герасимова и др. — 9-е изд.. — М. : Изд-во МЭИ, 2003. — 440 с
7. ГОСТ Р 52002—2003. Электротехника. Термины и определения основных понятий. — М. : Госстандарт России, 2003 г.
8. ГОСТ 2.710—81 (СТ СЭВ: 2182—80, 6306—88). Единая система конструкторской документации. Обозначения условные буквенно-цифровые, применяемые на электрических схемах. — М. : Государственный комитет стандартов Совета Министров СССР. — 1981.
9. ГОСТ Р 1494—77 (СТ СЭВ 3231—81). Электротехника. Буквенные обозначения основных величин. — М. : Государственный комитет стандартов Совета Министров СССР, 1977 г. Переиздание 1983 г. № 2174 (ИУС № 8—1983 г.).

Предисловие.....	3
Глава 1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ	5
1.1. Электрическое поле точечного заряда.....	5
1.2. Электрическое поле нескольких точечных зарядов	10
1.3. Однородное электрическое поле.....	13
1.4. Плоский конденсатор	19
1.5. Цилиндрический конденсатор	22
1.6. Расчет емкостей проводников	23
1.7. Задачи для самостоятельного решения	25
Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	29
2.1. Электрический ток. Сопротивление. Закон Ома для участка цепи. Работа и тепловое действие тока	29
2.2. Схемы и виды электрических цепей.....	33
2.3. Задачи для самостоятельного решения.....	36
Глава 3. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА	40
3.1. Незазветвленная цепь с одним источником энергии	40
3.2. Источник ЭДС при переменной нагрузке. Режимы работы электрической цепи	45
3.3. Источник тока при переменной нагрузке. Эквивалентное преобразование источника тока и источника ЭДС.....	51
3.4. Незазветвленная цепь с несколькими источниками энергии. Источники ЭДС в режимах генератора и потребителя.....	54
3.5. Потенциалы точек электрической цепи. Потенциальная диаграмма	59
3.6. Выбор элементов цепи и надежность ее работы.....	70
3.7. Задачи для самостоятельного решения.....	73
Глава 4. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ. МЕТОД СВЕРТКИ	83
4.1. Цепь с одним источником энергии и двумя узлами	83

4.2. Применение цепей с одним источником энергии и двумя узлами в электрических измерениях.....	86
4.3. Цепь с одним источником энергии и несколькими узлами.....	94
4.4. Цепь с одним источником энергии при соединении потребителей треугольником и звездой. Метод преобразования.....	97
4.5. Задачи для самостоятельного решения.....	102
Глава 5. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ, ВКЛЮЧЕННЫМИ В РАЗНЫЕ ВЕТВИ	106
5.1. Метод узловых и контурных уравнений (метод уравнений Кирхгофа)	106
5.2. Метод наложения токов.....	109
5.3. Метод контурных токов.....	114
5.4. Метод двух узлов	116
5.5. Задачи для самостоятельного решения.....	121
Глава 6. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	125
6.1. Расчет общей емкости соединения конденсаторов.....	125
6.2. Распределение напряжений и зарядов в цепи конденсаторов	126
6.3. Задачи для самостоятельного решения.....	129
Глава 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА ..	131
7.1. Последовательное соединение нелинейных элементов	131
7.2. Последовательное соединение нелинейного и линейного элементов. Метод пересечений	135
7.3. Параллельное соединение линейных и нелинейных элементов.....	141
7.4. Смешанное соединение линейных и нелинейных элементов..	143
7.5. Задачи для самостоятельного решения.....	145
Глава 8. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ	149
8.1. Неразветвленная неоднородная магнитная цепь при заданном магнитном потоке	149
8.2. Неразветвленная неоднородная магнитная цепь при заданной намагничивающей силе	153
8.3. Разветвленная несимметричная магнитная цепь.....	155
8.4. Задачи для самостоятельного решения.....	158
Глава 9. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	163
9.1. Изображение синусоидальных величин. Волновая и векторная диаграммы	163

9.2. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью.....	170
9.3. Общий случай неразветвленной <i>RLC</i> -цепи	174
9.4. Задачи для самостоятельного решения.....	178
Глава 10. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	185
10.1. Общий случай разветвленной <i>RLC</i> -цепи.....	185
10.2. Улучшение коэффициента мощности	190
10.3. Задачи для самостоятельного решения	194
Глава 11. КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА	197
11.1. Неразветвленная цепь синусоидального тока	197
11.2. Разветвленная цепь синусоидального тока с одним источником энергии	202
11.3. Разветвленная цепь синусоидального тока с несколькими источниками, включенными в разные ветви	208
11.4. Задачи для самостоятельного решения	211
Глава 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ	219
12.1. Гармонические составляющие периодических кривых.....	219
12.2. Электрическая цепь при несинусоидальном периодическом напряжении на ее входе.....	228
12.3. Электрическая цепь с резонансными контурами. Фильтрация гармоник	233
12.4. Задачи для самостоятельного решения	239
Глава 13. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ	243
13.1. Симметричная трехфазная цепь.....	243
13.2. Несимметричная трехфазная цепь	250
13.3. Задачи для самостоятельного решения	255
Глава 14. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	259
14.1. Определение токов и напряжений после коммутации цепи...259	
14.2. Составление уравнений и построение графиков переходных процессов в цепи.....	265
Приложения	274
Список литературы.....	280

Учебное издание

Фуфаева Лидия Ивановна

**Сборник практических задач
по электротехнике**

Учебное пособие

2-е издание, стереотипное

Редактор *В. Н. Махова*

Технический редактор *Е. Ф. Коржуева*

Компьютерная верстка: *Г. Ю. Никитина*

Корректоры *А. П. Сизова, Г. А. Форысенкова*

Изд. № 102113501. Подписано в печать 19.12.2011. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Ньютон». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18.
Тираж 1 500 экз. Заказ № 611.

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru

125252, Москва, ул. Зорге, д. 15, корп. 1, пом. 266.

Адрес для корреспонденции: 129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1, а/я 48.

Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. АЕ51. Н 14964 от 21.12.2010.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных
издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного
Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.

