

Министерство образования Российской Федерации

Тульский государственный университет

Кафедра электротехники и электрооборудования

А.В. Чумаков, к.т.н. ,ассистент

В.С. Илюшин, к.т.н., доцент

## ***ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ***

### **БАЗОВЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

для студентов

направлений: 551300 *“Электротехника, электромеханика и  
электротехнология”*, 551800 *“Технологические машины и оборудование”*,  
552900 *“Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных  
производств”*.

очной и заочной форм обучения

Тула 2000г.

Рассмотрено на заседании кафедры  
протокол №     от “     ”     2000г.

Зав. кафедрой

Б.В. Сухинин

Авторы:

Чумаков Александр Виссарионович, к.т.н., ассистент,

Илюшин Виктор Сергеевич, к.т.н., доцент,

Сурков Виктор Васильевич, к.т.н., доцент.

Кафедра электротехники и электрооборудования, тел. 33-24-34.

Дисциплина: Теоретические основы электротехники.

Базовый конспект лекций для студентов направлений:

551300 «Электротехника, электромеханика и электротехнология»,

551800 «Технологические машины и оборудование»,

552900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств» очной и заочной форм обучения. - ТулГУ,

2000. -158 с.

#### Аннотация

Настоящий конспект лекций предназначен для студентов очной и заочной форм, а также сотрудников, изучающих дисциплины электротехнического и электроэнергетического направлений.

Успешное освоение электротехнических дисциплин предполагает приобретение знаний и умений в исследовании электрических цепей, что является основной целью учебных занятий. Кроме того, в процессе занятий студенты учатся логически мыслить, анализировать предлагаемые схемы и электрические устройства.

Конспект лекций содержит лекции базового курса ТОЭ в объеме 50 часов.

Количество файлов: 25.

Имена файлов: C00K01TO. DOC - C00K25TO. DOC.

Рассмотрено на заседании кафедры электротехники и электрооборудования

протокол № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2000 г.

Регистрационный № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2000 г.

# ЛЕКЦИЯ №1.

## Введение

Развитие электротехники и ее широкое проникновение во все отрасли современной промышленности, а так же в быт, объясняется существенными преимуществами электрической энергии перед другими видами энергии.

Электрическая энергия:

1. легко получается из других видов энергии;
2. легко передается на значительные расстояния;
3. легко дробиться на части;
4. легко преобразуется в другие виды энергии.

Теоретические основы электротехники (ТОЭ) подводят теоретическую базу под большее количество специальных электротехнических дисциплин и в значительной степени определяют качество подготовки инженера-электрика. Как дисциплина, ТОЭ построены на курсах физики (учение об электричестве и магнетизме ) и математике (методы описания и анализа электромагнитных явлений ).

Содержание курса ТОЭ определилось развитием лекций, прочитанных впервые в России академиком В.Ф. Миткевичем (Петербургский политехнический институт - 1904 г.) и членом корреспондентом Академии наук К.А.Кругом (Московское высшее техническое училище - 1905 г.). В 1916-м году вышел в свет первый учебник К.А.Круга « Основы электротехники».

Предметом курса ТОЭ является изучение как с качественной, так и с количественной стороны электромагнитных процессов, происходящих в электрических и магнитных цепях и полях. Электромагнитные процессы сопровождаются взаимным преобразованием энергий электрического и магнитного полей или преобразованием энергии в другие виды энергии. Строгий анализ этих процессов, описываемых системами уравнений в частных производных (уравнениями Максвелла), оказывается весьма трудоемким даже в простейших случаях. Однако, для инженерных расчетов возможен приближенный анализ на основе теории электрических и магнитных цепей. Для этого в описание электромагнитных процессов вместо векторных величин теории поля, зависящий от пространственных координат и времени, вводят интегральные скалярные величины: ток и напряжение, являющиеся функциями времени.

В теории цепей для учета процессов преобразования энергии вводятся идеальные элементы с двумя полюсами - выводами, через которые протекает электрический ток: индуктивность, учитывающая накопление энергии в магнитном поле; емкость, учитывающая запасание энергии в электрическом поле; активное сопротивление, учитывающее необратимое преобразование электромагнитной энергии в другие виды энергии. Преобразование неэлектрической энергии в электромагнитную учитывается введением источников. Определенным образом соединенные элементы образуют электрическую цепь, которая приближенно отображает электромагнитные процессы в реальном устройстве.

Разумеется, не все электромагнитные процессы могут быть исследованы с помощью теории цепей. В частности анализ процессов при очень высоких частотах, определение параметров элементов цепей и т.п. могут производиться на основе методов теории поля. Как следует из изложенного, курс ТОЭ может быть разделен на две части: теорию цепей и теорию поля.

Для описания явлений, в курсе ТОЭ, особенно важны следующие разделы математики: дифференцирование и интегрирование простейших функций, векторная алгебра и элементы векторного анализа, комплексные числа, тригонометрические ряды, гиперболические функции, дифференциальные уравнения, простейшие дифференциальные уравнения в частных производных.

При изучении первой части курса (теории цепей) необходимо хорошо усвоить весь аппарат анализа электрических и магнитных полей и уметь применять его для решения практических задач. Поэтому необходима систематическая регулярная самостоятельная работа над курсом, обязательный разбор материала курса дома с решением задач как в виде специальных домашних расчетно-графических работ, так и задач из учебных пособий и задачников. По курсу студенты выполняют четыре расчетно-графические работы. Кроме того, в каждом семестре необходимо самостоятельно решить 80 - 100 задач из задачников.

В заключении еще раз напомним, что курс ТОЭ является первой специальной и в месте с тем базовой дисциплиной для последующих электротехнических дисциплин. Его роль в системе подготовки инженера-электрика исключительно велика, и его успешное изучение в значительной степени определяет успешное изучение последующих дисциплин, а также вообще качество подготовки инженера-электрика.

## **ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ.**

### **Основные понятия и элементы электрических цепей.**

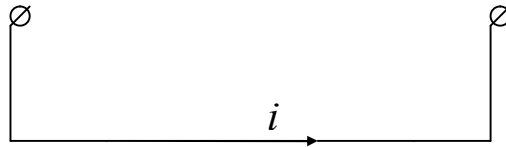
Ток, напряжение, энергия в электрической цепи.

Состояние электрической цепи характеризуется двумя основными параметрами: током и напряжением.

Электрический ток образуется при упорядоченном движении электрических зарядов и может быть определен из выражения

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad [i] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{Кл}{с} = А,$$

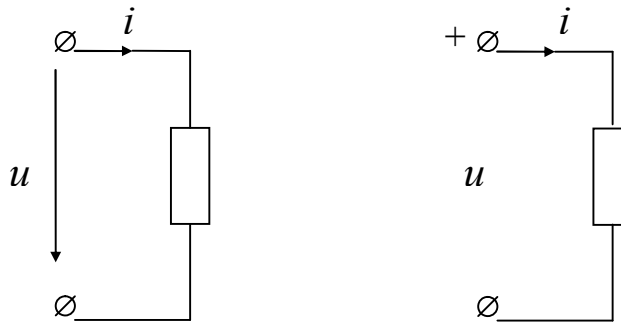
т.е. ток представляет собой скорость изменения заряда во времени. Это скалярная алгебраическая величина. Знак зависит от направления движения зарядов. Для его однозначного определения одно из возможных направлений принимается условно за положительное.



Прохождение тока (перенос зарядов) связано с преобразованием или потреблением энергии. Для определения энергии, затрачиваемой при перемещении заряда между двумя точками проводника, вводится электрическое напряжение:

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}, \quad [u] = \frac{[w]}{[q]} = \frac{Дж}{Кл} = В.$$

Это энергия, расходуемая на перемещение единицы заряда. Напряжение как и ток, является скалярной алгебраической величиной. Для однозначного определения напряжения одному из выводов условно приписывают положительную полярность, что отмечается стрелкой или знаком «+». Удобно согласовывать между собой направления напряжения и тока.



Из определения напряжения следует:

$$w = \int_{-\infty}^t u dq = \int_{-\infty}^t ui dt \quad [Вм \cdot с].$$

Это энергия, затраченная на перемещение заряда  $q$  на участке цепи с напряжением  $u$  к моменту времени  $t$ .

Дифференцируя по времени, получим скорость изменения энергии во времени, т.е. мощность:

$$p = \frac{dw}{dt} = ui, \quad [Вт].$$

Это тоже алгебраическая величина, знак которой определяется знаками напряжения и тока - при совпадении она положительна.

Ток и напряжение могут быть функциями времени произвольного вида. В частных случаях они могут быть постоянными или периодическими.

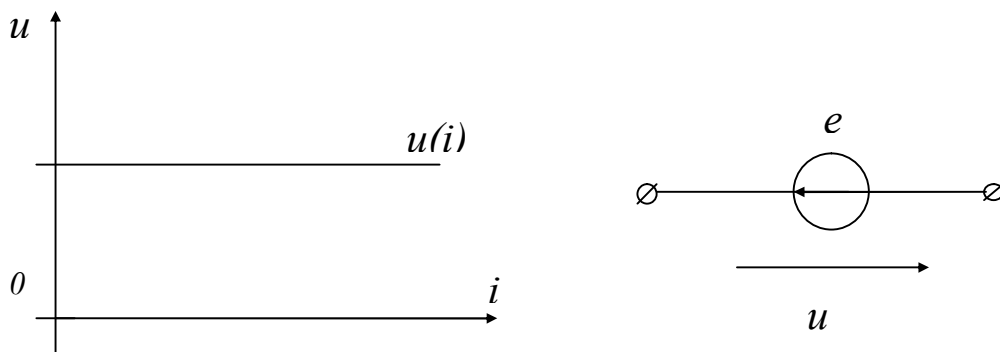
## Источники напряжения и тока.

Это элементы питающие цепь электромагнитной энергией. Они возбуждают электрическую цепь и являются причиной появления токов и напряжений. В источниках направления напряжения и тока противоположны. Поэтому определенная для них мощность будет отрицательной.

Для анализа цепей удобно вводить идеализированные источники двух видов: источники напряжения и источники тока, которые учитывают главные свойства реальных источников.

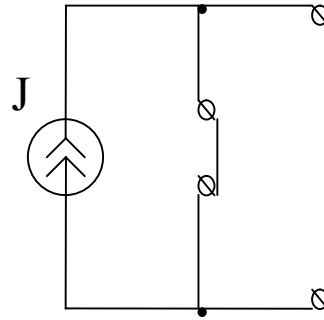
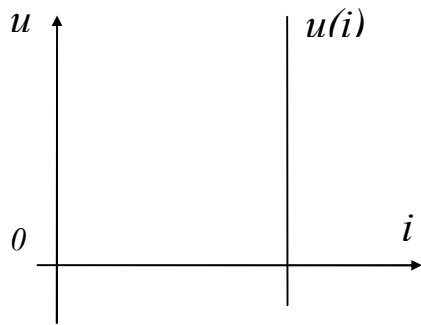
### а). Источник напряжения.

Это элемент с двумя выводами-полюсами, напряжение которого задано в виде некоторой функции во времени независимо от величины тока, отдаваемого во внешнюю цепь. Независимость означает, что внутреннее сопротивление такого источника равно нулю. Источник способен отдавать неограниченную мощность. Однако, режим короткого замыкания рассматриваться не должен, т.к. при этом напряжение на полюсах источника становится равным нулю. Источник можно обозначать на схемах буквой  $u$  или  $e$ .



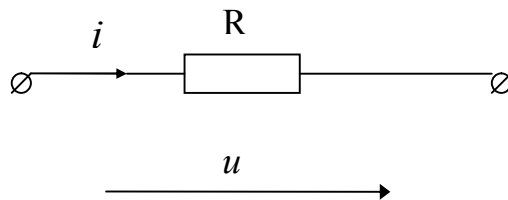
### б). Источник тока .

Это элемент, через выводы которого протекает ток с заданным законом изменения во времени независимо от величины напряжения, появляющегося при этом между выводами. Очевидно, что внутренняя проводимость такого источника равна нулю. Источник также способен отдавать неограниченную мощность. Однако, здесь нельзя рассматривать режим холостого хода, т.к. это противоречит определению (при этом не может существовать ток).



Активное сопротивление (резистивный элемент).

Это такой идеализированный элемент, в котором происходит только необратимое преобразование электромагнитной энергии в тепло или другие виды энергии, а запасание энергии в электрическом и электромагнитных полях отсутствует. Наиболее близкие к этим свойствам характеристики имеют угольные резисторы, реостаты, лампы накаливания.



Основные уравнения для них - закон Ома:

$$u = Ri \quad \text{или} \quad i = Gu.$$

В первом выражении коэффициент пропорциональности - электрическое сопротивление:

$$R = \frac{u}{i} \quad [Ом].$$

Обратная величина:

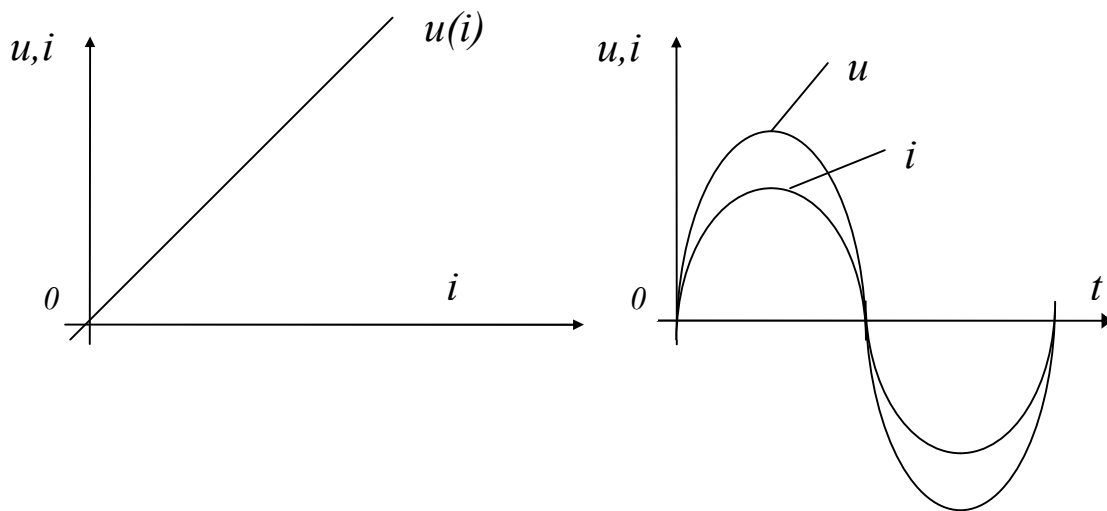
$$G = \frac{i}{u} = \frac{1}{R} \quad [См].$$

называется электрической проводимостью.

В теории линейных цепей принимают  $R$  и  $G$  постоянными, не зависящими от тока, напряжения и других факторов. В реальных элементах это допущение выполняется приближенно. Линейные алгебраические соотношения между током и напряжением можно представить графически в виде прямой, проходящей через начало координат, с угловым коэффициентом, равным значению сопротивления.

При этом кривые напряжения и тока на активном сопротивлении оказываются подобными - их ординаты пропорциональны в любой момент времени.





Мощность, выделяемая в виде тепла в активном сопротивлении

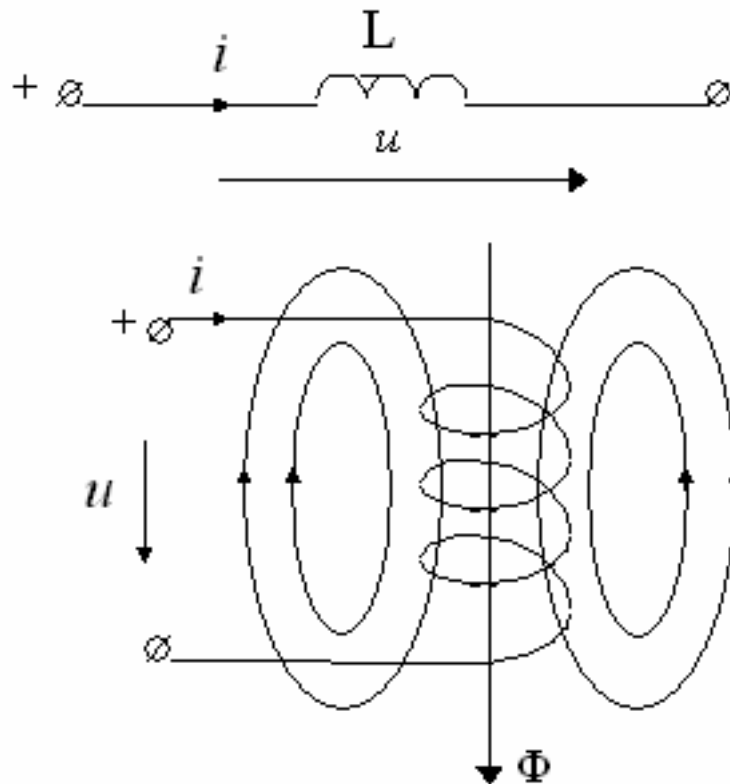
$$p = \frac{dw}{dt} = ui = Ri^2 = Gu^2$$

представляет квадратичную функцию тока или напряжения. Поэтому она не может быть отрицательной. Следовательно, энергия всегда поступает от источника в элемент. Ток и напряжение в элементе в любой момент времени имеют одинаковое направление.

## ЛЕКЦИЯ №2.

### Индуктивный элемент.

Это элемент, в котором происходит только запасание магнитной энергии, связанное с протеканием тока. Потери и запасание электрической энергии отсутствуют. Количественной мерой элемента является индуктивность  $L$ . В первом приближении таким элементом может служить высококачественная индуктивная катушка. При наличии тока  $i$  элемент создает магнитный поток  $\Phi$  [Вб].



Число линий магнитного поля, сцепленное с отдельными витками, неодинаково. Поэтому под потокосцеплением

$$\Psi = \sum_{k=1}^{k=w} \Phi_k$$

следует понимать алгебраическую сумму магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками.

Так как согласно закону полного тока напряженность магнитного поля пропорциональна току, при отсутствии ферромагнитных тел.

$$\Psi = L \cdot i.$$

Тогда индуктивность:

$$L = \frac{\Psi}{i}; \quad [L] = \frac{[\Psi]}{[i]} = \frac{B\delta}{A} = \frac{B \cdot c}{A} = \text{Ом} \cdot c = \text{Гн}.$$

В дальнейшем индуктивность принимаем постоянной величиной.

Связь между током и напряжением в индуктивном элементе устанавливается на основе закона электромагнитной индукции: при изменении магнитного потока, сцепленного с контуром, в нем наводится эдс, равная скорости изменения потокосцепления и направленная так, чтобы ток, вызванный ею, стремился бы воспрепятствовать изменению наводящего потока.

Если ток протекая в положительном направлении, возрастает так, что

$$\frac{di}{dt} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\Psi}{dt} > 0,$$

то эдс. должна иметь полярность, которая при отсутствии внешнего источника создавала бы ток, направленный навстречу  $i$ . Указанной полярности соответствует положительное направление напряжения элемента. Поэтому

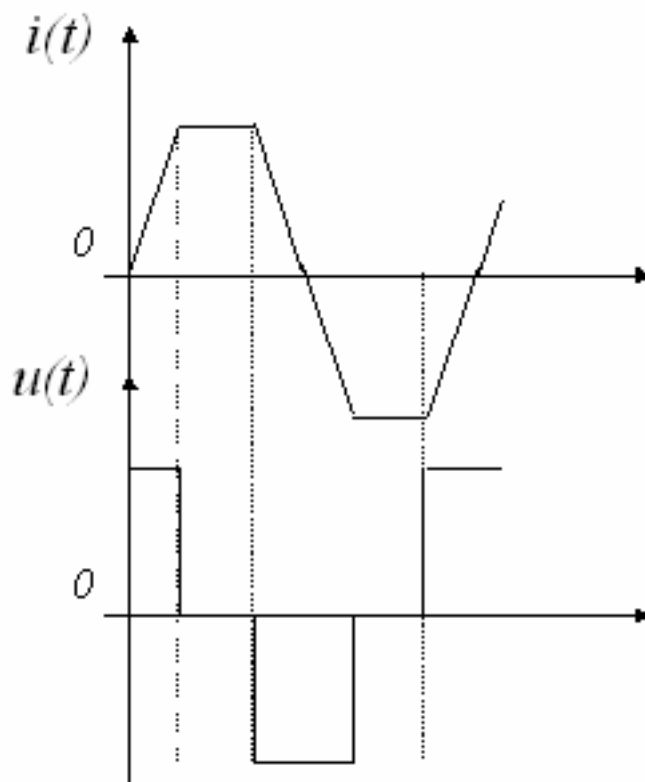
$$u = -e = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}.$$

При протекании через индуктивность постоянного тока поток не изменяется, напряжение равно нулю, что равносильно короткому замыканию выводов.

По напряжению можно определить ток

$$i = \frac{\Psi}{L} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt,$$

где  $t = -\infty$  означает необходимость суммирования всех изменений напряжения до  $t$  (учет предыстории). Значение  $u$  при  $t = -\infty$  принимается нулевым.



Можно записать подробнее:

$$i = \frac{\Psi}{L} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u dt + \frac{1}{L} \int_0^t u dt = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u dt .$$

На рисунке показаны  $i(t)$  и  $u(t)$  при токе трапециидальной формы через индуктивность. Если ток не изменяется, напряжение на индуктивности равно нулю.

Важно отметить, что потокосцепление и ток непрерывны, т.е. не могут изменяться скачком - только в этом случае  $\frac{d\Psi}{dt}$  является конечной величиной.

Поэтому

$$\Psi(0-) = \Psi(0+) , \quad \text{или} \quad i(0-) = i(0+) .$$

Эти условия употребляются при определенных постоянных интегрирования.

Мощность элемента

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} .$$

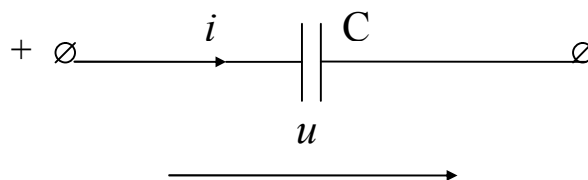
При совпадении знаков  $u$  и  $i$  происходит запасание энергии и мощность положительна. При отрицательной мощности элемент отдает энергию. Энергия в элементе определяется выражением

$$w_L = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{dt} dt = \int_0^i Li di = \frac{Li^2}{2} .$$

При  $t = -\infty$  ток полагаем равным нулю. Энергия не может принимать отрицательных значений.

Емкостный элемент.

В этом элементе происходит только запасание электрической энергии, зависящей от напряжения, а потери и запасание магнитной энергии отсутствуют.



Как известно

$$q = Cu ,$$

$C$  - электрическая емкость, измеряемая в  $[\Phi]$ .

Продифференцировав, получим:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt},$$

т.е. ток определяется скоростью изменения напряжения. При постоянном напряжении ток равен нулю - разрыв цепи. При задании тока

$$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

В соответствии с полученными выражениями при трапециидальном напряжении зарядный ток имеет вид прямоугольных импульсов.

Заряд и напряжения на емкости не могут изменяться скачком (производная  $\frac{dq}{dt}$  конечна), т.е.

$$q(0-) = q(0+), \quad \text{или} \quad u(0-) = u(0+).$$

Мощность

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt},$$

а энергия

$$w = \int_{-\infty}^t Cu \frac{du}{dt} dt = \int_0^u Cu du = \frac{Cu^2}{2}.$$

Дуальность элементов и их характеристик.  
Понятие о схемах замещения.

Подведем итоги рассмотрения элементов в виде таблицы.

Активное сопротивление $R$	$u_R = Ri_R$	$i_R = Gu_R$	$p = Ri_R^2 = Gu_R^2$
Индуктивность $L$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$	$w_L = \frac{Li_L^2}{2}$
Емкость $C$	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$w_C = \frac{Cu_C^2}{2}$

Между выражениями можно заметить определенную аналогию при замене токов напряжениями и наоборот. Такие соотношения называют дуальными. Дуально и взаимно заменяемые величины и элементы:

$$\begin{array}{ll}
 u \longleftrightarrow i & w_L \longleftrightarrow w_C \\
 L \longleftrightarrow C & p_L \longleftrightarrow p_C \\
 R \longleftrightarrow G & p_R \longleftrightarrow p_G
 \end{array}$$

Понятие дуальности является взаимным.

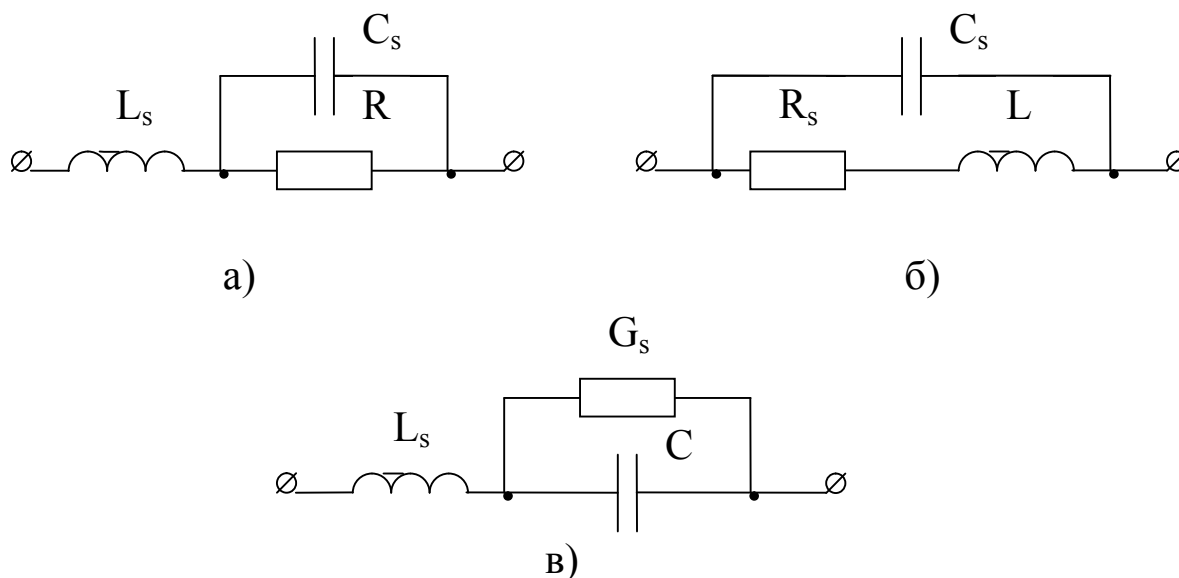
Введенные элементы пассивных цепей являются идеализированными - математическими моделями и не должны смешиваться с реальными. Однако, путем составления соответствующей схемы из идеальных элементов, можно приближенно передать поведение любого реального устройства. Для достижения достаточной точности приходится усложнять эти схемы замещения.

На рисунках приведены:

а/ схема замещения реального сопротивления,

б/ схема замещения реальной катушки,

в/ схема замещения реального конденсатора.

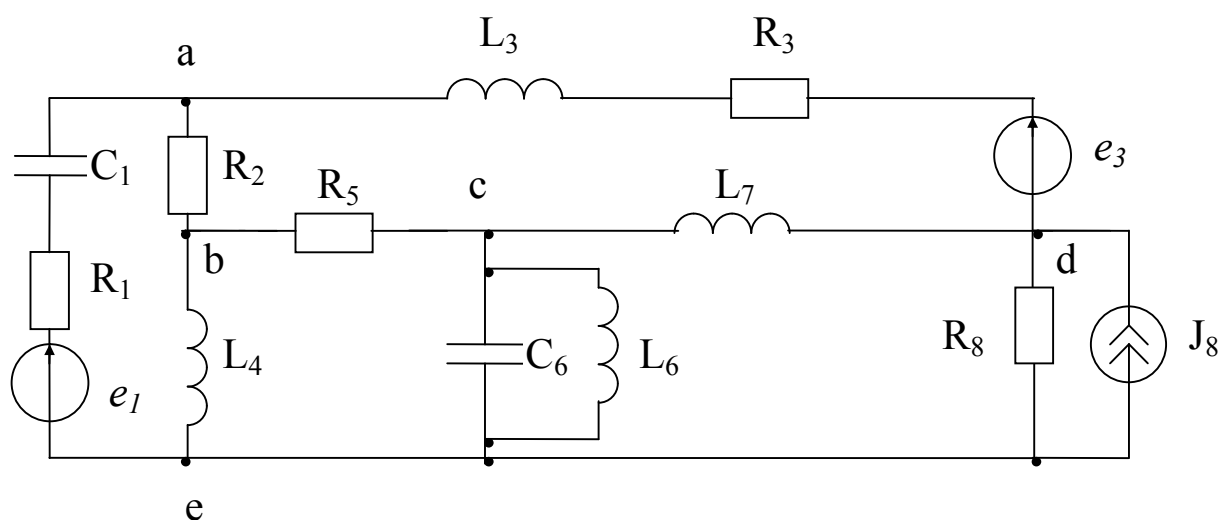


Совершенно так же с помощью идеальных источников и пассивных элементов можно передать характеристики реальных источников. Падение напряжения с ростом тока в источнике напряжения учитывается последовательно включенным сопротивлением. Уменьшение тока с ростом напряжения в источнике тока учитывается включением параллельно проводимости.

### Понятие об электрической цепи. Граф цепи.

Электрическая цепь составляется путем соответствующего соединения между собой рассмотренных двухполюсных элементов: сопротивлений, индуктивностей, емкостей и источников. Способ соединения должен быть таким, чтобы цепь с достаточной точностью отображала процессы в реальном устройстве.

Основными понятиями, характеризующими геометрию цепи, являются “ветвь”, “узел” и “контур”. В общем случае ветвь - участок цепи с двумя выводами. Однако, обычно при расчетах в качестве неизвестных принимаются токи или напряжения. Поэтому, хотя за ветвь можно принять каждый элемент цепи, практически для уменьшения переменных за ветвь принимают участки из последовательно соединенных элементов, токи которых имеют одно и то же значение (или участки из параллельно соединенных элементов, напряжения которых имеют одно и то же значение).



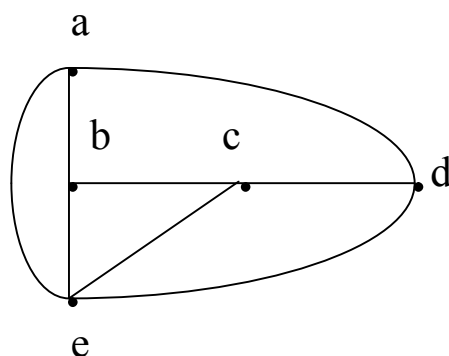
Узел электрической цепи - точка, в которой сходятся две и более ветви. Узел, где сходятся две ветви, называется устранимым узлом. Поэтому в дальнейшем под узлом понимаем точку, где сходятся не менее трех ветвей (например a и b на схеме).

Контуром называют любой замкнутый путь, проходящий через ряд ветвей и узлов (пути a-b-d-a, b-c-d-e).

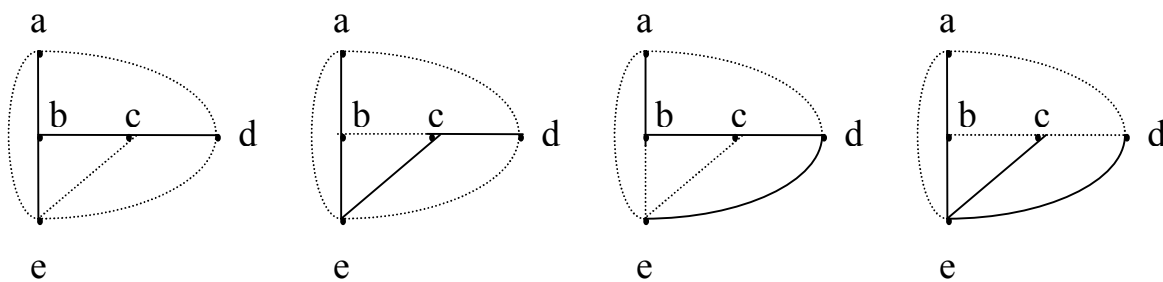
Источники напряжения включаются последовательно, а источники тока - параллельно. Ветвь с заранее известным током (или напряжением) можно исключить из схемы. Поэтому на схемах ветви, параллельные источнику напряжения, и последовательные источнику тока, можно не изображать.

При изучении геометрических свойств цепей оказывается удобным отвлекаться от физических элементов, заменив их линиями. При этом источники напряжения замыкаются накоротко, а цепь источников тока разрывается. В результате получается скелет схемы, ее геометрический образ, называемый графом цепи. Граф состоит из ветвей - линий (ребер) и узлов (вершин). При этом сохраняется число ветвей и узлов, т.е. число контуров и узловых пар исходной

цепи. Изображенный на рисунке граф нашей цепи является примером плоского или планарного графа (цепь тоже планарная) - на плоскости чертежа нет пересечения ветвей. В противном случае граф (и цепь) называют непланарным или пространственным.



Весьма важным понятием является дерево графа - любая система из минимального числа ветвей, соединяющих все узлы без образования замкнутых контуров (циклов). Протекание токов по ветвям дерева исключено. Для изображенного выше графа можно построить ряд деревьев.



Ветви графа для принятого дерева разбиваются на вошедшие в дерево (на рисунке - сплошные) - ветви дерева и не вошедшие (на рисунке - пунктирные) - ветви связи.

Так как первая ветвь дерева соединяет два узла, а каждая последующая ветвь добавляет по одному узлу, число ветвей дерева будет на единицу меньше числа узлов:

$$n_{в.д.} = n_y - 1.$$

Число ветвей, не вошедших в дерево ( ветвей связи) равно:

$$n_{в.с.} = n_в - n_{в.д.} = n_в - n_y + 1,$$

где  $n_в$  - общее число ветвей дерева.



## ЛЕКЦИЯ №3.

### Теория электрических цепей постоянного тока при установившемся режиме.

Основные определения и законы цепей.

Задачей анализа является отыскание токов и напряжений ветвей в заданной электрической цепи, где известны значения всех ее элементов, включая напряжения и токи источников. Далее рассматриваются линейные цепи (составленные из линейных элементов) при установившемся режиме. При подключении цепи установившейся режим наблюдается не сразу - необходимо некоторое время для перехода от прежнего состояния к новому (переходной режим), которое является следствием невозможности скачкообразного изменения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях. Будем считать, что прошло достаточное время и переходный режим закончен.

Постоянные токи и напряжения в электрических цепях возбуждаются источниками постоянного напряжения и тока. При этом для любой ветви, в общем случае составленной из пассивных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , можно записать:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt .$$

Так как в установившемся режиме ток не изменяется, то на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0 ,$$
$$i = const .$$

а ток через емкость при постоянном напряжении на ней

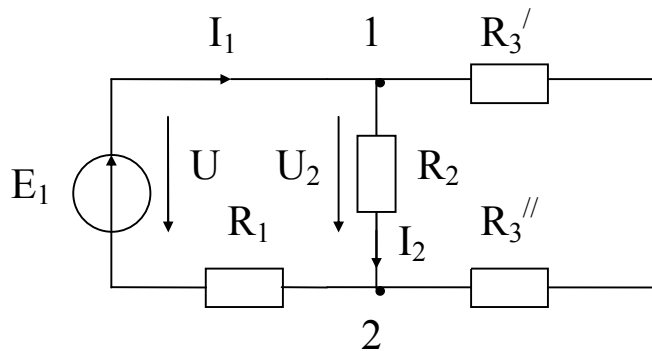
$$i = C \frac{du_c}{dt} = 0 ,$$
$$u_c = const .$$

Таким образом, индуктивность не оказывает сопротивления протеканию постоянного тока, а емкость вообще не проводит постоянного тока. Поэтому при расчете цепей постоянного тока в качестве пассивных элементов рассматривается только сопротивление.

Основным уравнением для анализа цепей являются известные из курса физики законы Ома и Кирхгофа. Записывая их для цепей постоянного тока, условимся неизменные во времени эдс, токи и напряжения обозначать большими буквами. Тогда

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad - \quad \text{1-ый закон Кирхгофа,}$$
$$\sum_{k=1}^{k=m} E_k = \sum_{k=1}^{k=m} R_k I_k \quad - \quad \text{2-ой закон Кирхгофа.}$$

Очень важно уметь безошибочно записывать закон Ома для участка цепи.



Для левого контура по 2-му закону Кирхгофа

$$E_1 = R_1 I_1 + R_2 I_2.$$

Обозначив

$$R_2 I_2 = U_2 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

получим

$$E_1 = R_1 I_1 + (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тогда

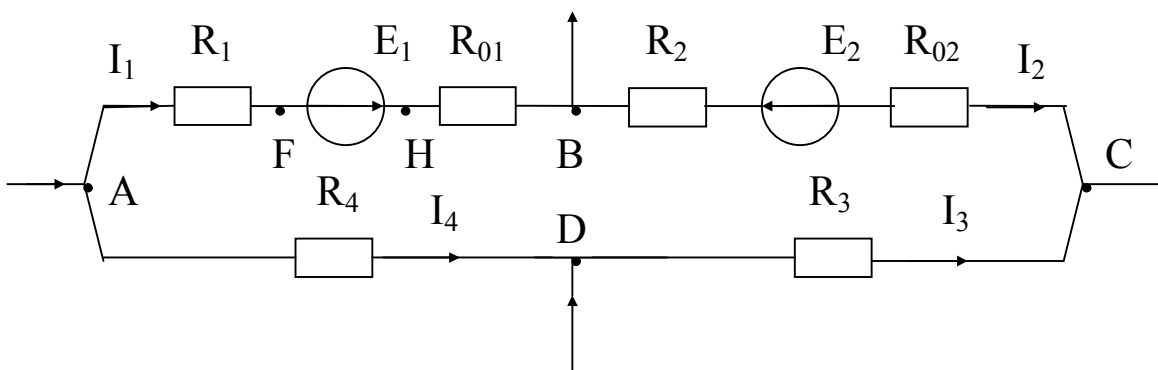
$$I_1 = \frac{E_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)}{R_1}.$$

В более общем случае

$$I_{12} = \frac{\Sigma E_{12} - U_{12}}{\Sigma R_{12}}.$$

Это и есть закон Ома для участка цепи. Порядок индексов определяет принятые положительные направления тока, эдс и напряжения.

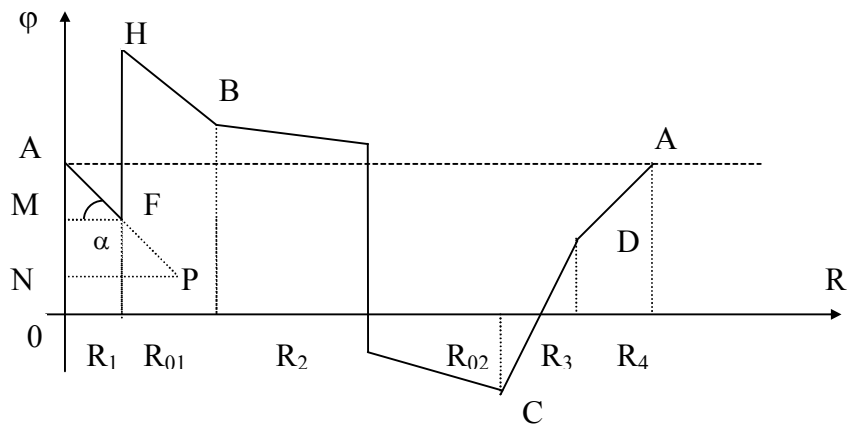
Распределение электрического потенциала вдоль цепи.  
(потенциальная диаграмма).



Для изображенной на рисунке цепи считая параметры ее и токи известными, найдем потенциалы всех точек, приняв потенциал одной из точек (А) за исходный (произвольной величины). Получим

$$\begin{aligned}\varphi_B &= \varphi_A - R_1 I_1 + E_1 - R_{01} I_1, \\ \varphi_C &= \varphi_B - R_2 I_2 - E_2 - R_{02} I_2, \\ \varphi_D &= \varphi_C + R_3 I_3, \\ \varphi_A &= \varphi_D + R_4 I_4.\end{aligned}$$

Представив изменение потенциала на графике в осях  $\varphi$  и  $R$ , получим потенциальную диаграмму.



Потенциальная диаграмма графически отображает второй закон Кирхгофа. Действительно сложив полученные уравнения получим:

$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_{01})I_1 + (R_2 + R_{02})I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4.$$

При этом тангенс угла наклона линии графика пропорционален току:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM}{MF} = \frac{OA - OM}{MF} = \frac{(\varphi_A - \varphi_F) \cdot m_R}{m_\varphi R_1} = \frac{m_R}{m_\varphi} \cdot \frac{U_{AF}}{R_1} = m_I I_1.$$

Практически потенциал исходной точки принимается равным нулю.

### Расчет сложных цепей постоянного тока.

Различают две задачи расчета:

а). Анализ электрических цепей, т.е. определение токов, напряжений и мощностей участков по заданным конфигурации цепи и ее элементам;

б). Синтез электрических цепей, где по заданным напряжениям и токам на участках определяется конфигурация цепи и выбираются ее элементы.

Ниже рассматриваются методы анализа электрических цепей.

## Метод составления и решения уравнений Кирхгофа.

Положим, что в схеме, содержащей "m" ветвей к "n" узлов, заданными являются все элементы и конфигурация, а искомыми - токи в ветвях. Число неизвестных при этом равно числу ветвей.

Наметим путь расчета.

1). Выбираем произвольно положительные направления токов в ветвях (удобно в ветвях с источниками напряжений направить токи по стрелке эдс).

2). Составляем уравнения 1-го закона Кирхгофа. Возможно составление "n" уравнений вида:

$$I_{12} + I_{13} + I_{14} + \dots + I_{1p} + \dots + I_{1n} = 0$$

$$I_{21} + I_{23} + \dots + I_{2p} + \dots + I_{2n} = 0$$

$$I_{p1} + I_{p2} + \dots + I_{p,p-1} + \dots + I_{pn} = 0$$

.....

$$I_{n1} + I_{n2} + \dots + I_{np} + \dots + I_{n,n-1} = 0$$

Нетрудно заметить, что каждый ток войдет в два уравнения с противоположными знаками. Поэтому сумма уравнений тождественно равна нулю, т.е. одно из уравнений вытекает из  $n-1$  остальных. Следовательно, по 1-му закону Кирхгофа необходимо составить

$$n - 1$$

независимых уравнений.

3). Недостающие для определения "m" неизвестных токов уравнения должны быть записаны по 2-ому закону Кирхгофа. Их необходимо иметь

$$m - (n - 1) = m - n + 1 .$$

Если ко всем ветвям применить закон Ома, то получится "m" уравнений вида:

$$U_{ip} = -E_k + R_k I_k = \varphi_i - \varphi_p ,$$

где  $U_{ip}$  - напряжение между узлами  $i$  и  $p$  ,

$E_k, I_k$  - эдс источника и ток в  $k$ -ой ветви, направленные от узла  $k$  к узлу  $p$ ,

$R$  - сопротивление  $k$ -ой ветви.

Более удобна запись:

$$U_{ip} = -E_{ip} + R_{ip} I_{ip} .$$

В систему уравнений закона Ома входят "m" неизвестных токов  $I_k$  и  $n-1$  неизвестных потенциалов (потенциал одного узла принимается равным нулю). Если исключить эти неизвестные потенциалы, останется

$$m - n + 1$$

уравнений, связывающих эдс источников с напряжениями на сопротивлениях, т. е. уравнения 2-го закона Кирхгофа. Для того, чтобы уравнения были незави-

симыми, необходимо, чтобы в каждое последующее входила хотя бы одна новая ветвь. Практически удобно записывать уравнения для контуров, не имеющих внутри ветвей, т. е. для ячеек.

4). Количество необходимых уравнений 1-го и 2-го законов Кирхгофа легко устанавливается по графу цепи. Для этого составляется дерево графа. Ранее установлено, что число ветвей дерева графа как раз равно

$$n - 1,$$

т. е. равно числу необходимых и достаточных уравнений 1-го закона Кирхгофа. Число необходимых и достаточных уравнений 2-го закона Кирхгофа

$$m - n + 1$$

равно числу ветвей связи.

5). При расчете цепей часто определяется мощность источников и приемников энергии. Следует учитывать, что должен соблюдаться закон сохранения энергии, вследствие которого

$$\sum_{h=1}^{h=m} E_h I_h = \sum_{h=1}^{h=m} R_h I_h^2.$$

В левой части уравнения при совпадении направлений  $E_h$  и  $I_h$  произведение положительно, а при несовпадении - отрицательно.

6). При наличии в схеме источников тока их следует учитывать при записи уравнений 1-го закона Кирхгофа. Отдаваемая ими энергия учитывается в левой части уравнения баланса мощностей.

7). Если ток определен отрицательным, то его действительное направление противоположно принятому в начале расчета.

#### Метод контурных токов (ячеек).

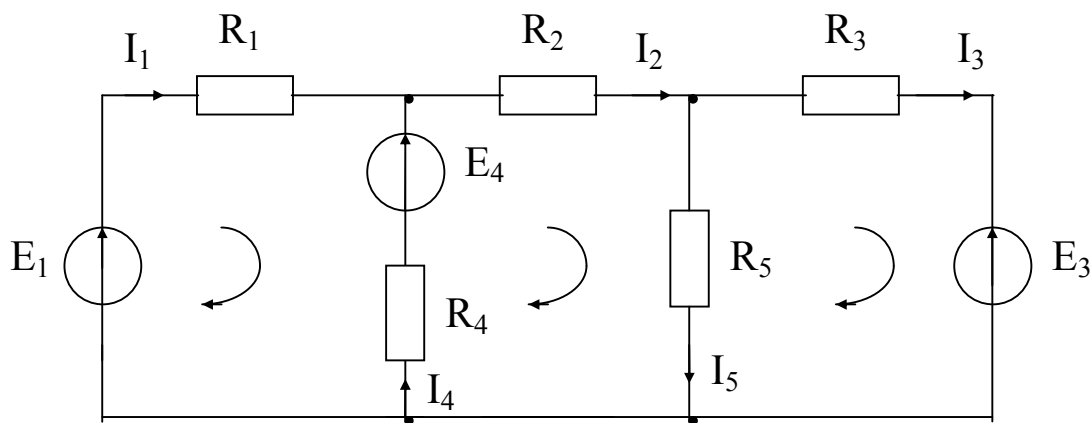
Является одним из основных методов расчета сложных цепей. Он заключается в том, что вместо токов в ветвях определяются на основании 2-го закона Кирхгофа так называемые контурные токи. При этом исключаются уравнения 1-го закона Кирхгофа.

Для независимых контуров по 2-ому закон Кирхгофа :

$$E_1 - E_4 = R_1 I_1 - R_4 I_4,$$

$$E_4 = R_4 I_4 + R_2 I_2 + R_5 I_5,$$

$$- E_3 = R_3 I_3 - R_5 I_5.$$



Исключим токи внутренних ветвей, выразив их через токи внешних

$$I_4 = I_2 - I_1,$$

$$I_5 = I_2 - I_3,$$

$$E_1 - E_4 = (R_1 + R_4)I_1 - R_4I_2,$$

$$E_4 = -R_4I_1 + (R_4 + R_2 + R_5)I_2 - R_5I_3,$$

$$-E_3 = R_5I_2 + (R_3 + R_5)I_3.$$

Полученная система уравнений содержит три неизвестных  $I_1, I_2, I_3$ , через которые могут быть затем определены  $I_4$  и  $I_5$ .

Уравнения могут быть записаны сразу, если приписать каждой ячейке некоторый контурный ток, совпадающий с током внешних ветвей. Тогда в каждой ячейке алгебраическая сумма эдс равна алгебраической сумме произведений

- а) контурного тока данной ячейки на сумму сопротивлений контура;
- б) контурных токов каждой смежной ячейки - на сопротивления смежных ветвей.

Правило знаков остается таким же, как и при записи уравнений 2-го закона Кирхгофа.

Общий вид уравнений для "n" контуров:

$$R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \dots + R_{1n}I_n = E_1,$$

$$R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + \dots + R_{2n}I_n = E_2,$$

.....

$$R_{n1}I_1 + R_{n2}I_2 + \dots + R_{nn}I_n = E_n,$$

где  $R_{mm}$  - сумма сопротивлений n-ой ячейки,

$R_{n2}$  - сумма сопротивлений ветви, общей для n-ого и 2-го контуров,

$E_n$  - алгебраическая сумма эдс n-ого контура.

Полученная система может быть решена с помощью определителей:

$$I_1 = E_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + \dots + E_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta},$$

$$I_2 = E_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + \dots + E_n \frac{\Delta_{n2}}{\Delta},$$

.....

$$I_n = E_1 \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} + E_2 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} + \dots + E_n \frac{\Delta_{nn}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{- определитель системы,}$$

$\Delta_{ik}$  - алгебраическое дополнение, полученное из определителя системы умножением на  $(-1)^{i+k}$  и исключением  $i$ -ой строки и  $k$ -го столбца.

Если схема содержит источники тока, то можно принять ток каждого замыкающимся по ветви любого незамкнутого контура, дополняющего ветвь с источником тока до замкнутого. Падение напряжения за счет такого тока на сопротивлении контура учитывается вместе с падением напряжений от контурных токов.

## ЛЕКЦИЯ №4.

### Метод узловых потенциалов.

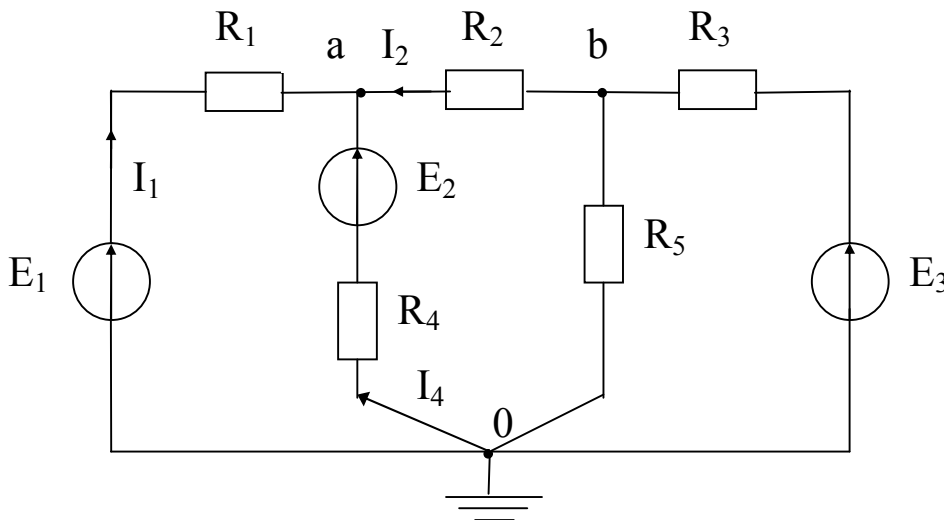
Этот метод позволяет уменьшить число уравнений Кирхгофа за счет исключения уравнений 2-го закона. На схеме принимаем потенциал точки "О" равным нулю.

Выразим токи всех ветвей, примыкающих к узлу "а" по закону Ома:

$$I_1 = \frac{E_1 + (\varphi_0 - \varphi_a)}{R_1},$$

$$I_4 = \frac{E_4 + (\varphi_0 - \varphi_a)}{R_4},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{R_2}.$$



На основании 1-го закона Кирхгофа:

$$\sum_a I_k = 0, \text{ т.е.}$$

$$E_1 G_1 + E_4 G_4 = \varphi_a (G_1 + G_4 + G_2) - \varphi_b G_2.$$

Аналогичного вида уравнения могут быть получены для узла 'b', а также для любого узла более сложной схемы.

Анализ уравнений показывает, что для любого узла алгебраическая сумма произведений эдс на проводимость всех подключенных к нему ветвей равна

а) потенциалу данного узла, умноженному на сумму проводимостей подключенных к нему ветвей,



б) минус произведение потенциалов остальных узлов, умноженных каждый на сумму проводимостей ветвей, соединяющих узел с тем, для которого пишется уравнение.

Если эдс направлена к узлу, то  $E_k G_k$  входит в уравнения с "плюсом", от узла - с "минусом".

Источники тока следует учитывать в левой части уравнений с "плюсом", если они направлены к данному узлу.

Общий вид уравнений:

$$\sum_{k=1}^l E_{k1} G_{k1} + J_{k1} = G_{11} \varphi_1 - G_{12} \varphi_2 - \dots - G_{1n} \varphi_n,$$

.....

$$\sum_{k=n}^n E_{kn} G_{kn} + J_{kn} = -G_{n1} \varphi_1 - G_{n2} \varphi_2 - \dots + G_{nn} \varphi_n,$$

где:

$G_{11}$  - сумма проводимостей ветвей, подключенных к 1-му узлу,

$G_{12}$  - сумма проводимостей ветвей, соединяющих 1-й узел со 2-м.

Уравнения записываются для  $(n - 1)$  узлов и решаются, например, с помощью определителей. По полученным узловым потенциалам определяются токи ветвей с помощью закона Ома.

### Метод наложения (суперпозиции).

Пусть для некоторой электрической цепи записаны уравнения Кирхгофа вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 + I_2 + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots = E_1 + E_2 + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Решение системы линейных уравнений однозначно определяет токи.

Предполагая поочередно в этой же цепи наличие только одной эдс при прочих равных нулю, можно для каждой эдс вычислить соответствующие токи ветвей, составив уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1' + I_2' + \dots = 0, \\ \dots \\ R_1 I_1' + R_2 I_2' + \dots = E_1 \\ \dots \end{array} \right. \quad \text{для } E_1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1'' + I_2'' + \dots = 0 \\ \dots \\ R_1 I_1'' + R_2 I_2'' + \dots = E_2 \\ \dots \end{array} \right. \quad \text{для } E_2.$$

и так далее.

Сложив уравнения почленно, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1' + I_1'' + \dots) + (I_2' + I_2'' + \dots) + \dots = 0, \\ \dots \\ R_1(I_1' + I_1'' + \dots) + R_2(I_2' + I_2'' + \dots) + \dots = E_1 + E_2 + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Полученная система имеет единственное решение для неизвестных

$$(I_1' + I_1'' + \dots) + (I_2' + I_2'' + \dots) + \dots = 0 \text{ и т.д.}$$

Из сравнения исходных уравнений и только что полученных следует, что решения должны совпадать, т.е.

$$I_1 = I_1' + I_1'' + \dots,$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + \dots,$$

.....

Таким образом, ток каждой ветви равен алгебраической сумме частичных токов, образованных действием каждой эдс в отдельности (принцип наложения).

На этом основан расчет цепей методом наложения.

Напряжение на участке цепи с сопротивлением  $R$ :

$$U = RI = R(I_1' + I_1'' + \dots) = RI_1' + RI_1'' + \dots = U' + U'' + \dots,$$

т.е. принцип наложения применим и к напряжениям.

Принцип наложения применим также и к источникам тока. При этом остальные источники тока отключаются.

Принцип наложения не применяется для мощностей - квадратичных функций токов и напряжений.

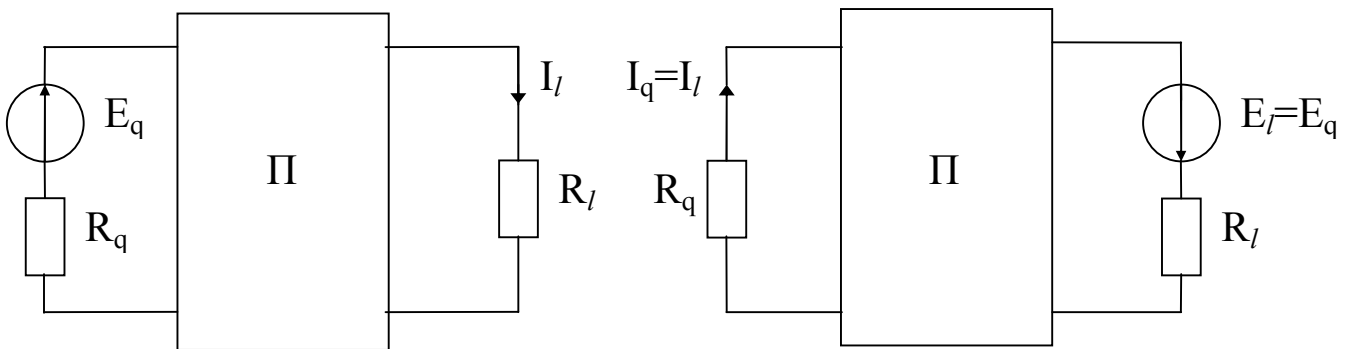
### Преобразование электрических цепей.

Различные преобразования применяются обычно совместно с другими методами расчета. При этом цепь остается эквивалентной заданной, но расчет токов значительно упрощается.

### Принцип взаимности.

Если эдс, действуя в одной ветви сложной цепи / $q$ / при отсутствии прочих эдс, вызывает в другой ветви / $l$ / ток  $I_l$ , то такая же эдс, действуя в ветви  $l$  при отсутствии прочих эдс, вызовет в первой / $q$ / такой же ток

$$I_q = I_l.$$



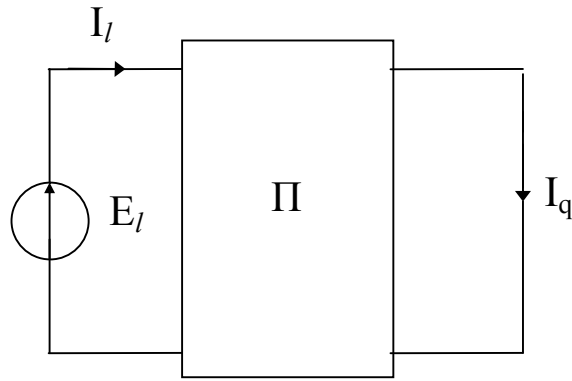
Согласно методу контурных токов :

$$I_l = E_q \frac{\Delta l q}{\Delta}, \quad I_q = E_l \frac{\Delta q l}{\Delta} = E_q \frac{\Delta q l}{\Delta},$$

Так как для системы



Входные и взаимные проводимости.



В соответствии с методом контурных токов

$$I_l = E_l \frac{\Delta l}{\Delta}, \quad I_q = E_l \frac{\Delta q l}{\Delta}.$$

Отношение

$$\frac{I_l}{E_l} = \frac{\Delta l}{\Delta} = G_{ll}$$

называется входной проводимостью ветви  $l$ . Она равна отношению тока и эдс одной и той же ветви при отсутствии эдс в других ветвях. Обратная величина называется входным сопротивлением.

Отношение

$$\frac{I_q}{E_l} = \frac{\Delta q l}{\Delta} = G_{ql}$$

называется взаимной проводимостью и определяется отношением тока в одной ветви к эдс в другой ветви при отсутствии эдс в прочих ветвях. В соответствии с принципом взаимности.

$$G_{ql} = G_{lq}.$$

Кроме того, в общем случае входная проводимость некоторой ветви равна сумме взаимных проводимостей между данной ветвью и каждой из остальных, присоединенных к одному из двух узлов, к которым подключена эта ветвь.

В самом деле, по 1-му закону Кирхгофа для узла

$$I_l = I_1 + I_2 + I_3 + \dots,$$

или

$$E_l = \frac{\Delta l}{\Delta} = E_l \frac{\Delta l}{\Delta} + E_l \frac{\Delta 2l}{\Delta} + E_l \frac{\Delta 3l}{\Delta} + \dots$$

и

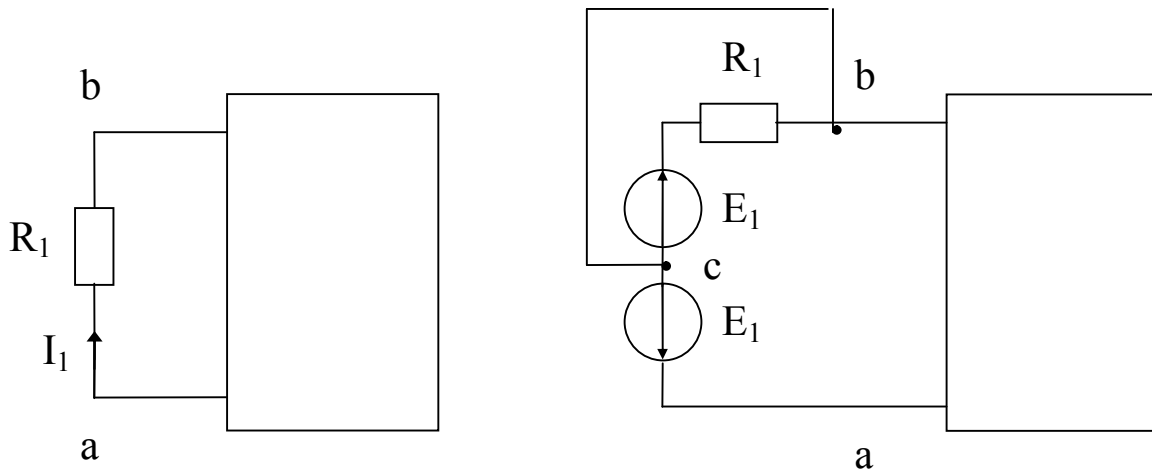
$$G_{ll} = G_{1l} + G_{2l} + G_{3l} + G_{4l} + \dots$$

Входные и взаимные проводимости удобно использовать при расчете цепей методом наложения.

## ЛЕКЦИЯ №5.

### Теорема о компенсации.

Любое сопротивление электрической цепи всегда можно заменить источником напряжения, эдс которого направлена навстречу току и равна по величине напряжению на этом сопротивлении.



Для доказательства включим в ветвь две равные, но противоположно направленные эдс  $E_1$ , равные  $R_1 I_1$ . Режим цепи при этом не изменится. Замечаем, что теперь точки  $b$  и  $c$  имеют одинаковый потенциал. Их можно соединить, не изменяя тока в ветви. Однако, при этом в ветви остается только одна эдс  $E_1$  (нижняя по схеме).

### Теорема об активном двухполюснике.

(теорема об активном генераторе, теорема Гевенена, метод холостого хода и короткого замыкания).

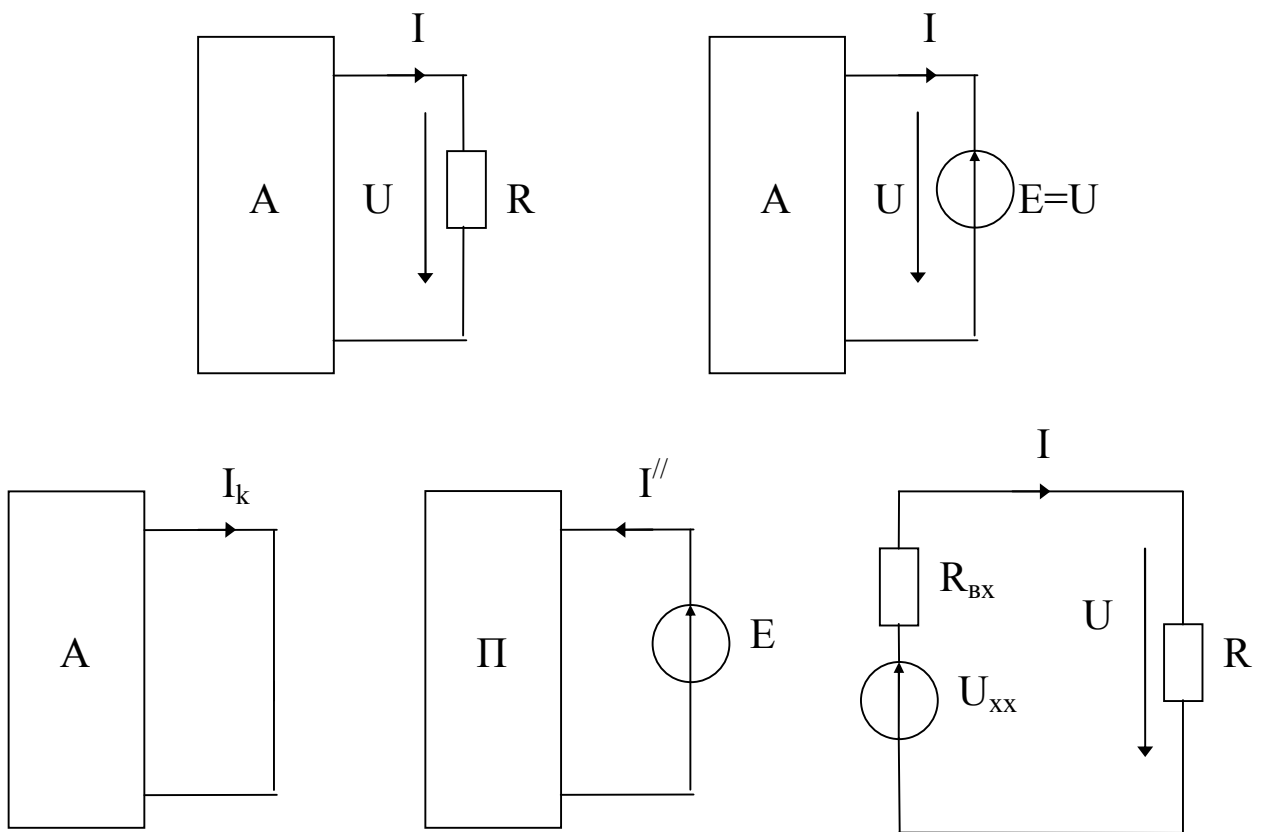
Часть электрической цепи произвольной конфигурации, рассматриваемая относительно выделенной ветви, т.е. двух зажимов (полюсов), называется двухполюсником. При наличии в его составе источников двухполюсник называют активным, при отсутствии - пассивным.

Теорема. По отношению к выделенной ветви прочая часть цепи может быть заменена эквивалентным генератором с эдс и внутренним сопротивлением, определяемым через известные эдс и сопротивления этой прочей части сложной цепи (активного двухполюсника).

Заменим  $R$  по теореме о компенсации эдс  $E$  и определим ток в выделенной ветви, используя метод наложения.

От всех эдс, кроме новой,

$$I' = I_k (\text{двухполюсника}),$$



от новой

$$I'' = -\frac{E}{R_{ex}} = -\frac{U}{R_{ex}}.$$

Ток в ветви

$$I = I' + I'' = I_k - \frac{U}{R_{ex}}.$$

Уравнение пригодно для любого режима. В частности при холостом ходе ветви:

$$I = 0 \quad \text{и} \quad 0 = I_k - \frac{U}{R_{ex}}.$$

Тогда

$$I_k = \frac{U_x}{R_{ex}}.$$

Ток ветви при любой нагрузке

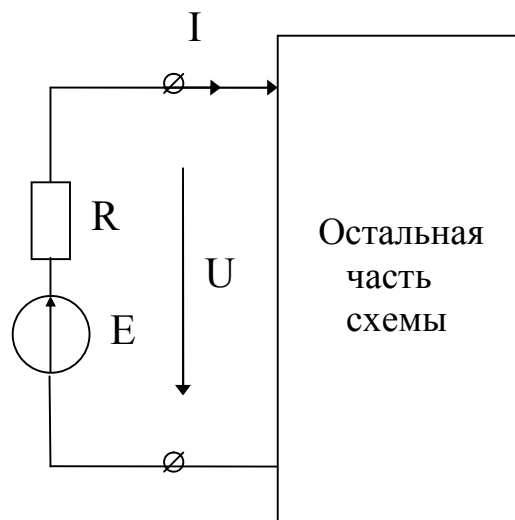
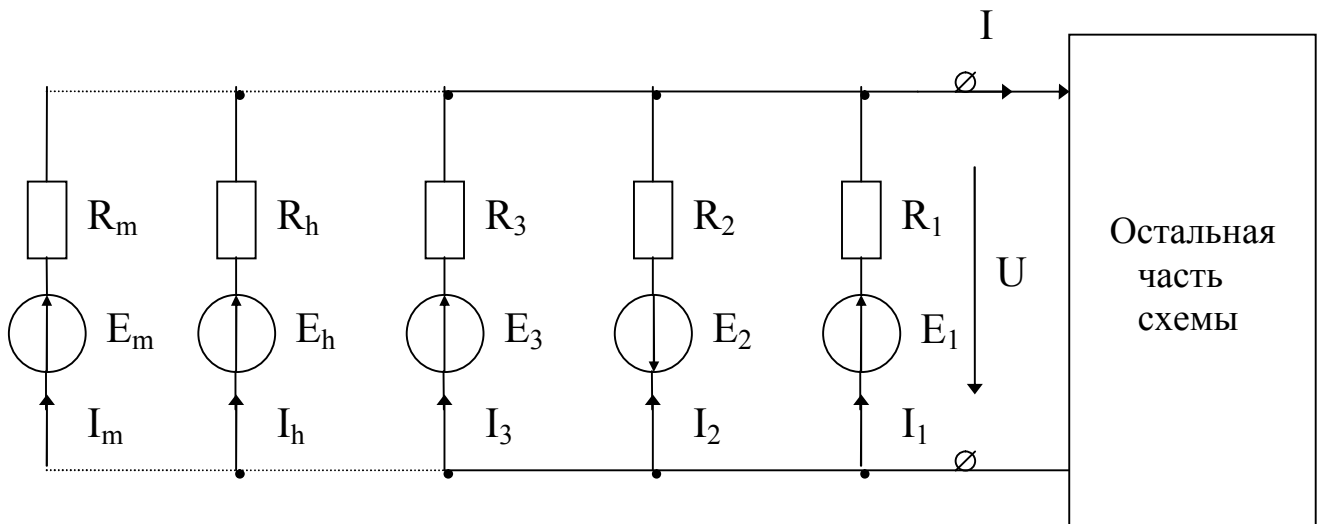
$$I = \frac{U_x}{R_{ex}} - \frac{U}{R_{ex}}.$$

Так как  $U=RI$ ,

то

$$I = \frac{U_x}{R + R_{ex}}, \quad R_{ex} = \frac{U_x}{I_{кз}}.$$

Преобразование источников энергии  
При параллельном соединении ветвей с источниками.



Ток любой ветви

$$I_h = \frac{E_h - U}{R_h}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$I = \sum_l^m I_h = E_1 G_1 - E_2 G_2 + \dots + E_h G_h + \dots + E_m G_m - U(G_1 + G_2 + \dots + G_h + \dots + G_m).$$

Для эквивалентной схемы



$$I = EG - UG.$$

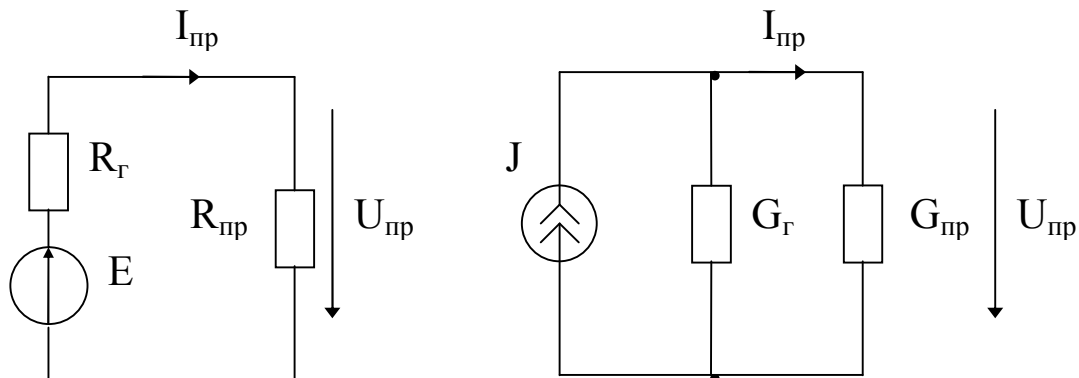
Из сравнения следует

$$G = \sum_l^m I_h \quad \text{и} \quad E = \frac{\sum_l^m E_h G_h}{\sum_l^m G_h}.$$

При наличии источников тока в числителе добавляются слагаемые в виде токов источников тока.

$E_h G_h$  - положительно, если в исходной схеме эдс (или ток источника тока) направлена также как и эквивалентная.

### Условия эквивалентности источников напряжения и источников тока.



Будем называть источник напряжения и источник тока эквивалентными, если замена одного из них другим не будет изменять режим в остальной цепи. В частности для схем рисунков при

$$R_{np} = \frac{I}{G_{np}}$$

условием эквивалентности будет равенство токов приемника в обоих случаях:

$$I_{np} = \frac{E}{R_{\Gamma} + R_{np}} = \frac{\frac{E}{R_{\Gamma}}}{1 + \frac{R_{np}}{R_{\Gamma}}} = \frac{J}{\frac{R_{np}}{R_{\Gamma}}},$$

$$I_{np} = J \frac{G_{np}}{G_{\Gamma} + G_{np}} = \frac{J}{1 + \frac{G_{\Gamma}}{G_{np}}}$$

Для одинаковости токов при любом сопротивлении (проводимости) приемника необходимо, чтобы

$$1 + \frac{R_{np}}{R_{\Gamma}} = 1 + \frac{G_{\Gamma}}{G_{np}}, \text{ т.е. } R_{\Gamma} G_{\Gamma} = 1.$$

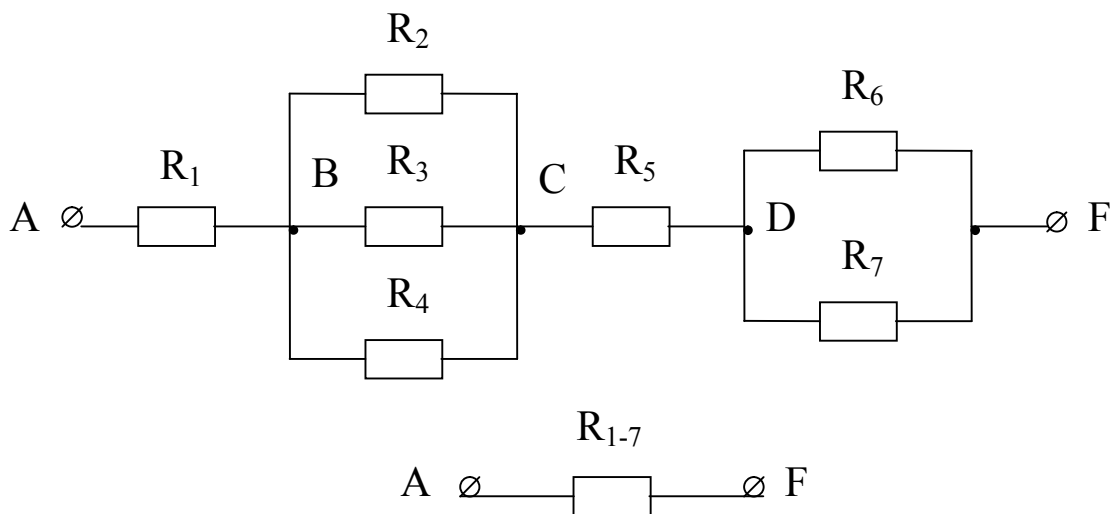
Кроме того:

$$J = \frac{E}{R_{\Gamma}} \text{ и } E = \frac{J}{G_{\Gamma}}.$$

Таким образом, замена возможна, если ни  $R_{\Gamma}$ , ни  $G_{\Gamma}$  не равны ни нулю, ни бесконечности.

### Преобразование сопротивлений.

При последовательном и параллельном соединениях.



Для участка BC:

$$G_{BC} = G_2 + G_3 + G_4 = \frac{R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_4 R_2}{R_2 R_3 R_4},$$

или

$$R_{BC} = \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_4 R_2}.$$

Для участка DF:

$$G_{DF} = G_6 + G_7 = \frac{R_6 + R_7}{R_6 R_7},$$

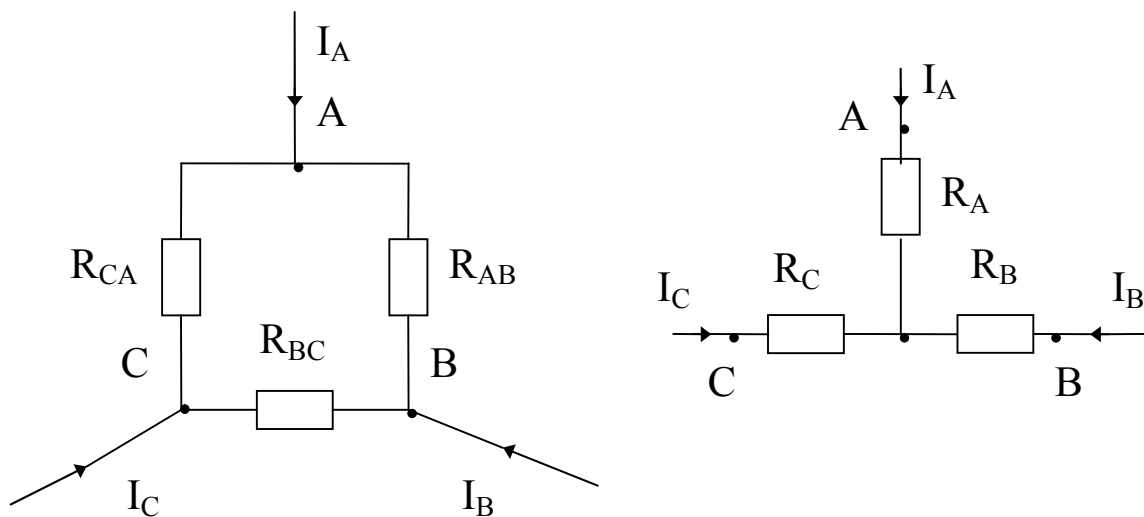
или

$$R_{DF} = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7}.$$

Для всей цепи:

$$R_{1-7} = R_1 + \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_4 R_2} + R_5 + \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7}.$$

При сопротивлениях, соединенных в “треугольник” или “звезду”.



Для определения эквивалентных сопротивлений звезды применим для токов принцип наложения, поочередно принимая  $I_A = 0$ ,  $I_B = 0$  и  $I_C = 0$ . Чтобы при этом не изменялся режим работы остальной схемы, необходимо, чтобы на пути оставшихся токов сопротивления в обеих схемах были одинаковы:

$$R_B + R_C = \frac{R_{BC}(R_{CA} + R_{AB})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}},$$

$$R_A + R_C = \frac{R_{CA}(R_{AB} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}},$$

$$R_A + R_B = \frac{R_{AB}(R_{BC} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

Решая уравнения совместно, получим:

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}, \quad R_B = \frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}, \quad R_C = \frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}, \quad R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_C R_B}{R_A}, \quad R_{CA} = R_A + R_C + \frac{R_A R_C}{R_B}.$$

## ЛЕКЦИЯ №6.

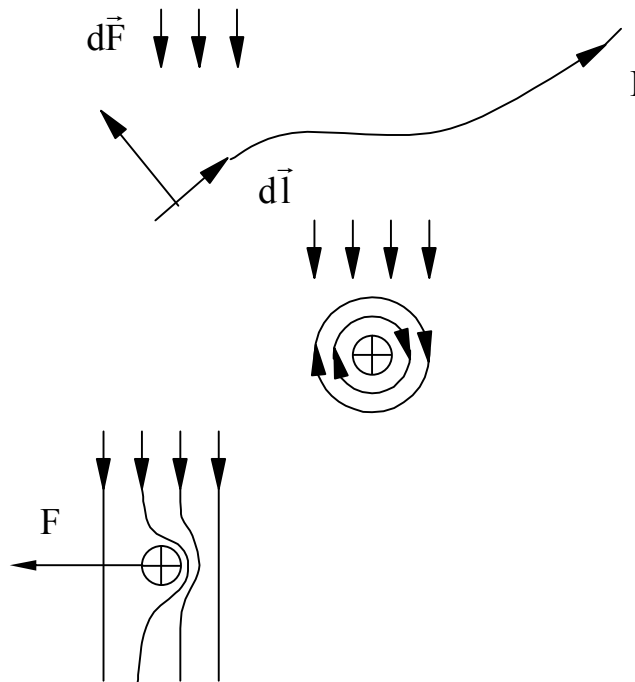
### О механических проявлениях магнитного и электрического полей.

Этот раздел логично изучать при исследовании свойств электромагнитного поля в конце курса ТОЭ. Однако, некоторые предварительные сведения об электромагнитных силах необходимы для успешного изучения электроизмерительной техники уже в следующем семестре.

#### Механические силы в магнитном поле.

Из опыта известно, что на проводник с током в магнитном поле действует электромагнитная сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$$

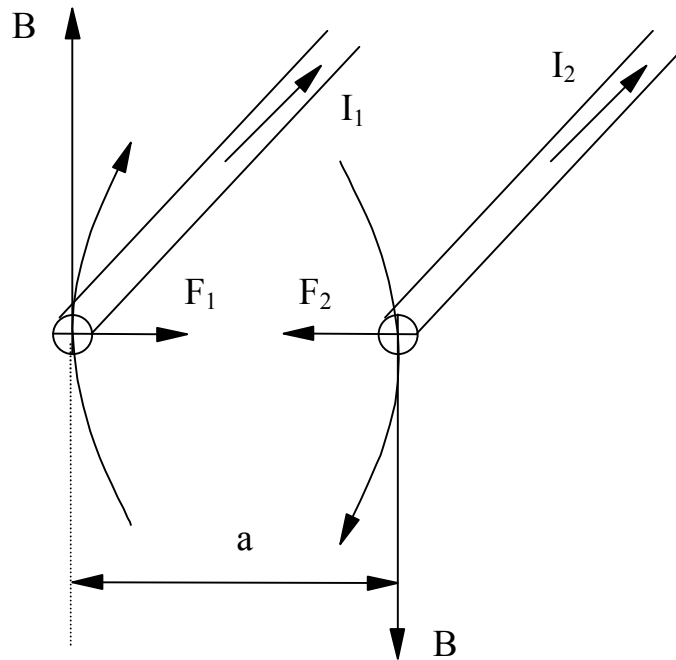


Направление может быть установлено «правилом левой руки», а также введением понятия «бокового распора» магнитных линий, введенным В.Ф. Миткевичем.

#### Механическое взаимодействие двух проводов с токами.

Как следует из рисунка, на 2-й провод действует сила

$$\vec{F}_2 = \int_0^l I_2 [d\vec{l} \times \vec{B}_1],$$



$$F_2 = B_1 l I_2 = \mu_a H_1 l I_2 = \mu_a \frac{I_1 I_2}{2\pi a} l.$$

На первый провод:

$$F_1 = \mu_a \frac{I_1 I_2}{2\pi a} l,$$

т.е.  $F_1 = F_2$ .

Сила, действующая на единицу длины провода:

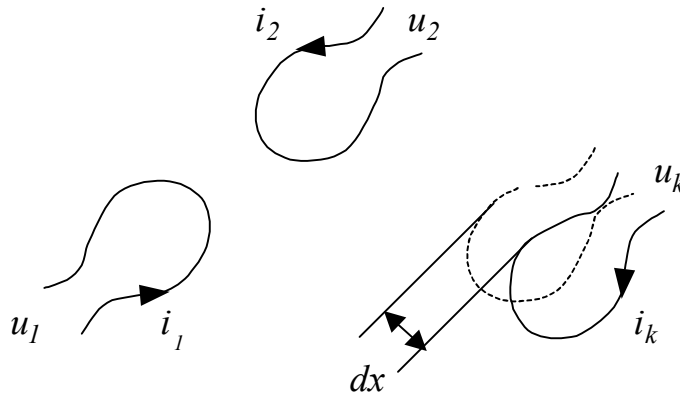
$$F_0 = \mu_a \frac{I_1 I_2}{2\pi a} l.$$

Приближенно для воздушной среды:

$$F_0 \approx \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{a} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{a} \text{ [Н/м]}.$$

Выражение силы в виде производной от энергии по обобщенной координате.

Рассмотрим систему, состоящую из «n» контуров с токами. Их положение определяется необходимым количеством обобщенных геометрических координат (линейное перемещение  $dx$  или угловое  $d\alpha$  при одной степени свободы). Механические силы, стремящиеся изменить координаты системы, рассматриваем также как обобщенные.



Под действием силы  $F$  координата получает приращение  $dx$ . Остальные координаты не изменяются, а остальные контуры неподвижны.

По закону Кирхгофа в контуре

$$u_k = R_k i_k = \frac{d\Psi_k}{dt}.$$

Умножим уравнение на  $i_k dt$  и просуммируем по всем «n» контурам:

$$\sum_1^n u_k i_k dt = \sum_1^n R_k i_k^2 dt + \sum_1^n i_k d\Psi_k.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\sum_1^n u_k i_k dt = \sum_1^n R_k i_k^2 dt + Fdx + dW_M.$$

Тогда

$$\sum_1^n i_k d\Psi_k = Fdx + dW_M.$$

Пусть при движении остаются неизменными потокоцепления:

$$\Psi_k = const, \quad d\Psi_k = 0, \quad \sum_1^n i_k d\Psi_k = 0,$$

т.е. источники энергии совершают работу только для выделения тепла в контурах:

$$0 = dW_M + Fdx.$$

Т.к.  $Fdx$  больше нуля, то  $dW_M$  меньше нуля, т.е. энергия магнитного поля убывает (за ее счет осуществляется механическая работа). Тогда

$$F = -\frac{dW_M}{dx} \quad \text{при} \quad \Psi_k = const.$$

Предположим теперь, что неизменными остаются токи, а потокосцепления изменяются:

$$\sum_I^n i_k d\Psi_k \neq 0.$$

С другой стороны энергия магнитного поля

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_I^n i_k d\Psi_k.$$

При  $i_k = const$  приращение энергии

$$dW_M = \frac{1}{2} \sum_I^n i_k d\Psi_k.$$

Таким образом, при постоянстве токов приращение энергии магнитного поля в точности равно половине работы источников энергии.

Подстановка дает:

$$Fdx = dW_M,$$

т.е. при постоянстве токов получение механической работы связано с увеличением запаса энергии в системе, равным механической работе. Тогда сила

$$F = \frac{dW_M}{dx} \text{ при } i_k = const.$$

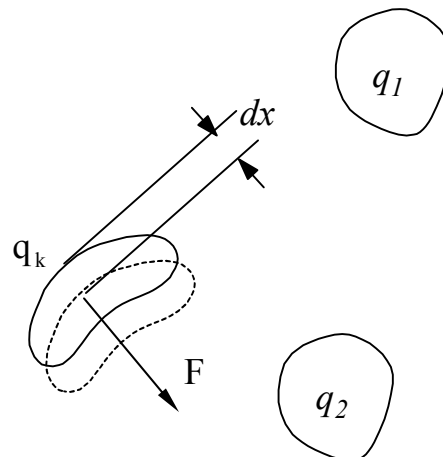
### Механические силы в электрическом поле.

Тело «к» системы «n» тел переместилось. Тогда

$$\sum_I^n u_k dq_k = dW_\varphi + Fdx,$$

где левая часть представляет работу внешних источников энергии. Если тела отключены от источников, то  $q_k = const$  и  $dq_k = 0$ . Тогда

$$\sum_I^n u_k dq_k = 0 \text{ и } 0 = dW_\varphi + Fdx.$$





Т.к.  $Fdx > 0$ , то  $dW_{\text{э}} < 0$  - энергия убывает. Работа совершается за счет убыли энергии. Отсюда следует

$$F = -\frac{dW_{\text{э}}}{dx} \text{ при } q_k = \text{const.}$$

При подключенных к внешним источникам тел  $U_k = \text{const}$  и энергия системы

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_1^n u_k q_k ,$$

а ее приращение

$$dW_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_1^n u_k dq_k .$$

Остальная такая же часть работы внешних источников затрачивается на производство механической работы.

Тогда

$$Fdx = dW_{\text{э}},$$

и

$$F = \frac{dW_{\text{э}}}{dx} \text{ при } u_k = \text{const.}$$

## ЛЕКЦИЯ №7.

### Теория линейных электрических цепей синусоидального тока. (установившийся режим)

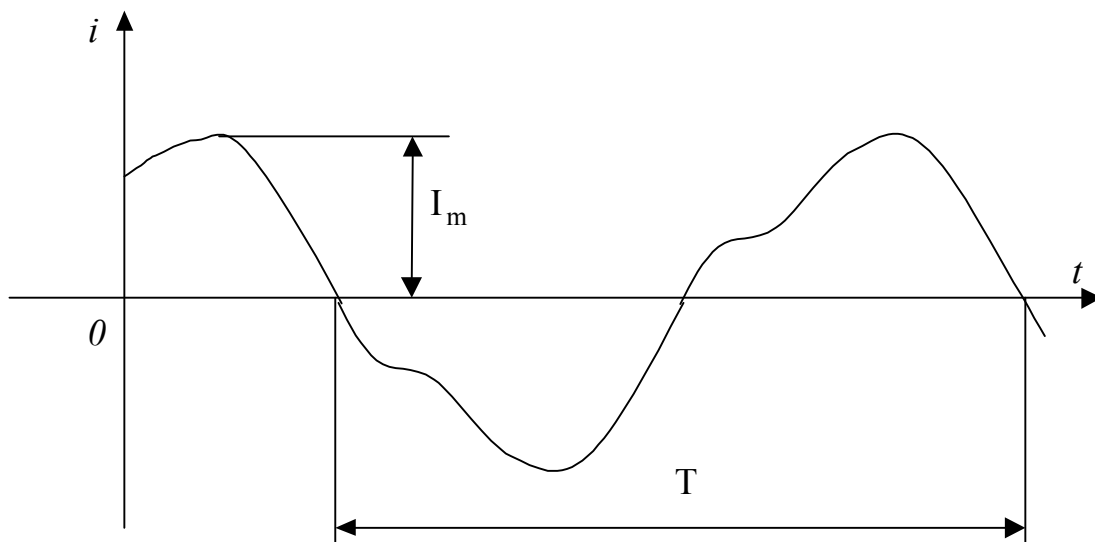
#### Основные понятия и определения.

Переменным называют ток, изменяющийся во времени по величине и по направлению. Одно из возможных направлений тока принимают за положительное. Ток считается вполне определенным, если известна зависимость  $i=f(t)$  и указано его положительное направление.

Токи, мгновенные значения которых повторяются через определенные промежутки времени, называют периодическими. Наименьший промежуток времени, через который эти значения повторяются, называется периодом. Для периодического тока

$$i(t) = i(t + T),$$

где  $T$  - период.



Величина, обратная периоду, т.е. число периодов за единицу времени, называется частотой. Частота

$$f = \frac{1}{T}, \quad \frac{1}{с} = \text{Гц}.$$

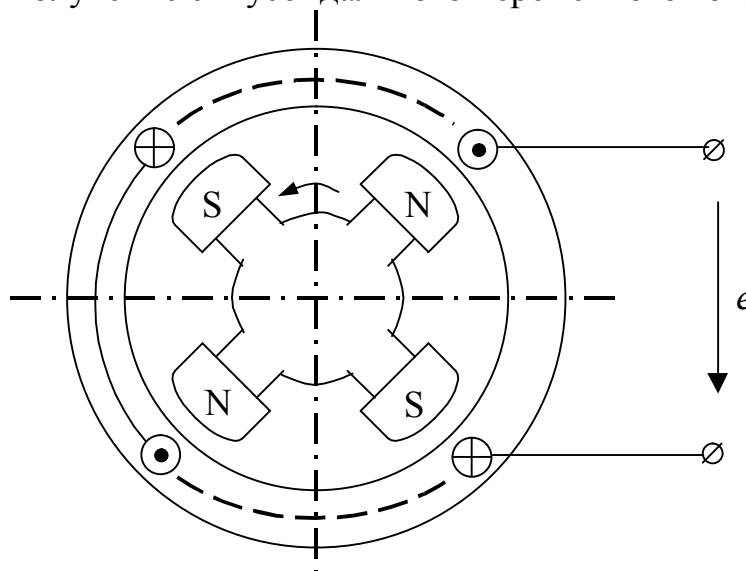
Наибольшее из мгновенных значений периодически изменяющихся токов, называется максимальным или амплитудным.

Наиболее распространены простые гармонические или синусоидальные токи. Если элементы цепи линейны, то при синусоидальной эдс токи и напряжения также синусоидальны.

Переменный ток получил преимущественное распространение главным образом благодаря возможности легко преобразовывать величины напряжений

в трансформаторах. Он широко применяется как в силовых установках, так и в устройствах автоматики, телефонной связи и радиотехники. В энергетических системах России и Европы принята стандартная частота 50 Гц. В США принята частота 60 Гц. Более низкие частоты применяются редко. В установках слабых токов применяют широкий диапазон частот от звуковых (20 Гц - 20 кГц) до сверхвысоких (тысячи МГц).

Получение синусоидального переменного тока.



Генерирование переменного тока промышленной частоты производится обычно вращающимися машинными генераторами. Генератор состоит из неподвижного статора и вращающегося ротора. На роторе помещена обмотка возбуждения, питаемая от источника постоянного напряжения. В пазах статора заложена обмотка из соединенных последовательно проводников. При вращении ротора в каждом проводе статора наводится эдс:

$$e_k = B l v,$$

закон изменения которой зависит от закона изменения магнитной индукции непосредственно под проводом. Его стремятся сделать синусоидальным.

За один оборот ротора происходит «р» полных периодов изменения эдс, где «р» - число пар полюсов. Если ротор делает за минуту «п» оборотов, то частота

$$f = \frac{pn}{60}.$$

Таким образом на зажимах статора появляется синусоидальная эдс

$$e = E_m \sin(p\alpha),$$

где  $\alpha$  - геометрический угол поворота,

$p\alpha$  - «электрический» угол, определяющий величину эдс.

Отношение электрического угла ко времени называют угловой скоростью или угловой частотой эдс:

$$\omega = \frac{p\alpha}{t} = \frac{p2\pi}{pT} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Аналитическое, графическое и векторное изображение синусоидальных величин. Начальная фаза и сдвиг фаз.  
Применение векторных диаграмм.

Аналитическая запись легко получается из

$$e = E_m \sin(p\alpha),$$

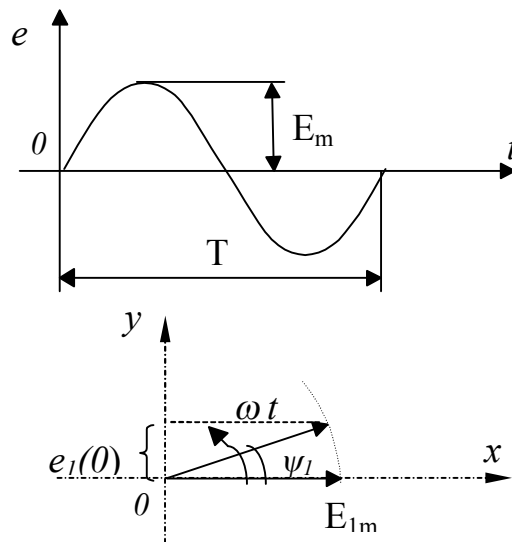
если учесть, что

$$p\alpha = \omega t,$$

а

$$e = E_m \sin(p\alpha) = E_m \sin 2\pi f t.$$

Графическое изображение функций приведено на рисунке.



Однако, наиболее удобным оказалось изображение синусоидальных величин вращающимся с постоянной скоростью  $\omega$  вектором. Мгновенные значения эдс выражаются при этом его проекциями на ось ординат.

Пусть при  $t=0$  (в момент начала отсчета времени) положение ротора таково, что

$$e_1(0) = E_{1m} \sin \psi_1,$$

где  $\psi_1$  - электрический угол определяющий начальное значение эдс.

При дальнейшем вращении

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1).$$

Угол  $\psi_1$ , определяющий начальное значение синусоидальной эдс (или тока, напряжения) называется начальным фазным углом или просто начальной фазой.

Пусть другая эдс

$$e_2(0) = E_{2m} \sin \psi_2,$$

и

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Разность начальных фаз двух синусоидальных величин называется углом сдвига фаз

$$\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2.$$

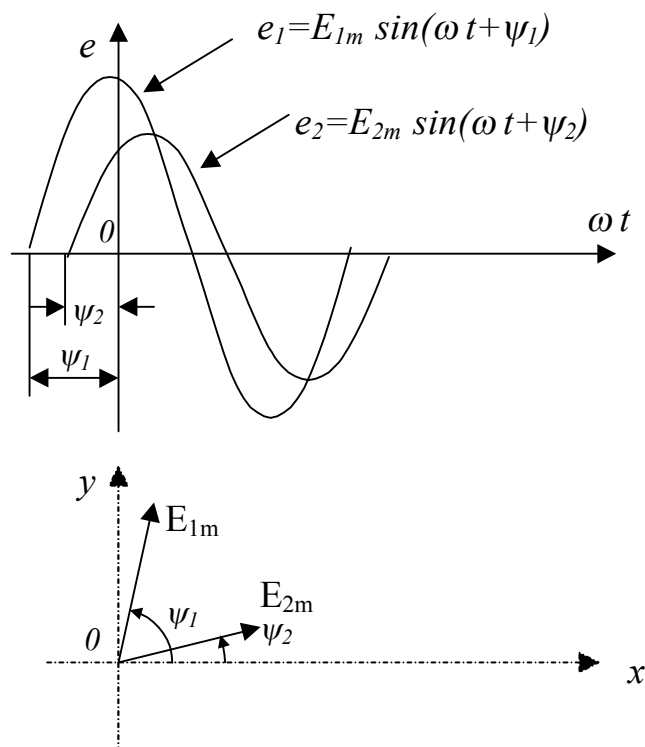
Ему соответствует время

$$t_{12} = \frac{\psi_{12}}{\omega} = \frac{\psi_{12}}{2\pi} T,$$

показывающее на какую часть периода (какое время) одна величина достигает своих нулевых (или амплитудных) значений раньше другой. Одна величина называется опережающей по фазе, а другая - отстающей. Если  $\psi_{12} = 0$ , то величины совпадают по фазам.

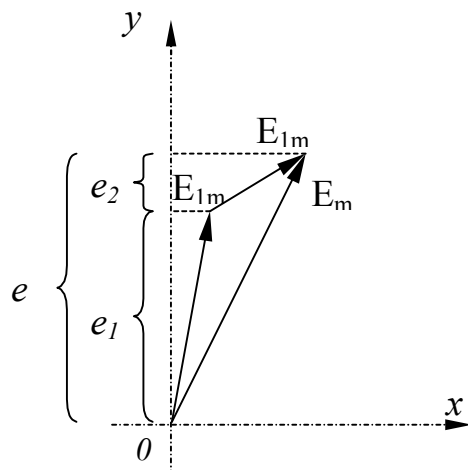
Для сопоставления синусоидальных величин часто необходимо изобразить их графически на одном рисунке. Совокупность нескольких синусоид, изображающих синусоидальные величины, называют волновой диаграммой. Частоты величин могут быть различными.

Совокупность нескольких векторов, изображающих синусоидальные величины одинаковой частоты, называют векторной диаграммой. Частоты должны быть одинаковыми, чтобы между вращающимися векторами сохранялся постоянный сдвиг фаз.



При расчете цепей синусоидального тока приходится складывать и вычитать синусоидальные токи, напряжения и эдс. При этом в каждый момент времени мгновенные значения суммарной величины равно алгебраической сумме мгновенных значений слагаемых. Так как мгновенные значения изображаются

проекциями вращающихся векторов, то оказалось удобным проводить эти математические операции с помощью сложения или вычитания изображающих их векторов. Вектор, изображающий суммарную синусоиду, равен сумме векторов, изображающих слагаемые. Правильность этого положения вытекает непосредственно из рисунка.



Заметим, что вычитание двух векторов можно заменить сложением, но с повернутым на  $180^\circ$  вектором, изображающим отрицательную величину.

### Средние и действующие значения переменных эдс, токов и напряжений.

Средним значением переменного тока за полупериод называют равноценное значение постоянного тока, равное отношению количества электричества, прошедшего в одном направлении через поперечное сечение проводника в течение половины периода, ко времени этого полупериода.

$$I_{cp} = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} i dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt.$$

По аналогичным уравнениям определяются и  $E_{cp}$ ,  $U_{cp}$ .

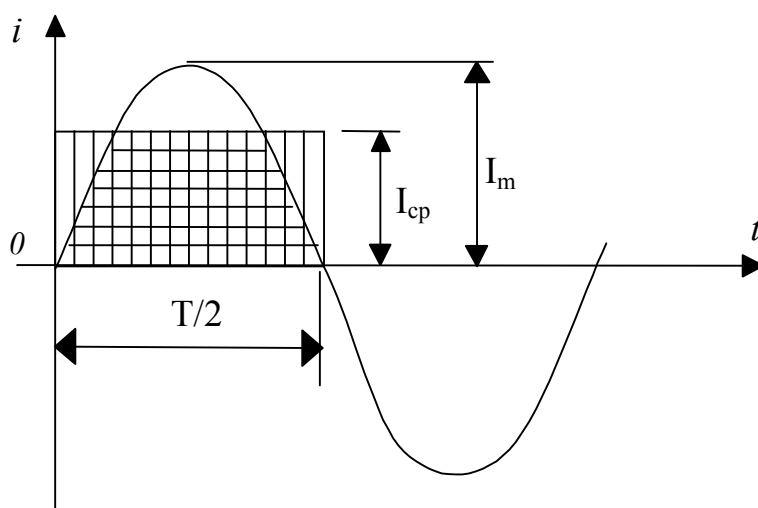
Для синусоидального тока

$$I_{cp} = \frac{2I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{T} \left| -\frac{1}{\omega} \cos \frac{2\pi}{T} t \right|_0^{\frac{T}{2}},$$

$$I_{cp} = \frac{2I_m}{\pi} \cong 0.637 I_m.$$

При расчетах удобнее пользоваться действующими или эффективными значениями переменного тока.

Действующее значение переменного тока численно равно такому постоянному току, которое в течении периода производит тоже тепловое (или динамическое) действие, что и рассматриваемый переменный ток.



Тепловое действие постоянного тока за это время оценивается величиной  $I^2 RT$ .

Переменный ток за это же время производит тепловой эффект, оцениваемый величиной

$$\int_0^T i^2 R dt .$$

При одинаковом действии

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt .$$

Тогда действующее значение

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} .$$

Для синусоидального переменного тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \left[ \int_0^T \frac{dt}{2} - \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} dt \right]} ,$$

или

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cong 0,707 I_m .$$

Совершенно так же определяются действующие значения напряжения и эдс.

Для синусоидального тока действующие и амплитудные значения находятся в постоянном соотношении между собой. Поэтому на векторных диаграммах вектор, изображающий амплитудное значение, в другом масштабе выражает действующее.

Различные значения переменных токов связывают между собой коэффициентами

формы  $k_\phi = \frac{E}{E_{cp}}$  (для синусоиды  $k_{\phi\sim} = \frac{E_m \pi}{\sqrt{2} 2 E_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.11$ ),

амплитуды  $k_a = \frac{E_m}{E}$  (для синусоиды  $k_{a\sim} = \frac{E_m \sqrt{2}}{E_m} = \sqrt{2} \cong 1.41$ ).

В частности при изменении магнитного потока, сцепленного с катушкой индуктивности, в последней индуцируется эдс индукции.

При этом если

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t,$$

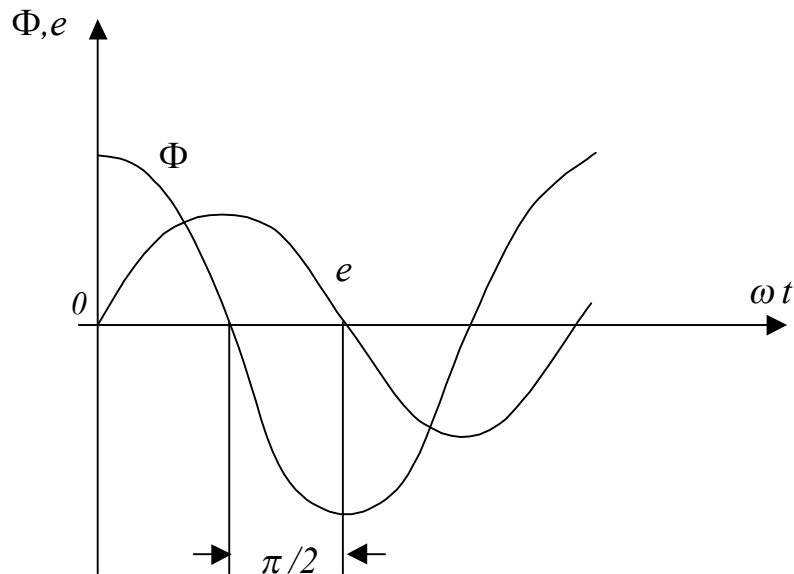
то эдс

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -w \omega \Phi_m (-\sin \omega t) = w \omega \Phi_m \sin \omega t.$$

Здесь

$$E_m = w \omega \Phi_m.$$

Таким образом, синусоидальный магнитный поток наводит эдс, изменяющуюся по закону синуса и отстающую от потока на  $\pi/2$ .



Среднее значение этой эдс

$$E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m = \frac{2\omega}{\pi} w \Phi_m = \frac{4\pi}{\pi} f w \Phi_m = 4 f w \Phi_m.$$

Действующее значение этой эдс

$$E = k_\phi E_{cp} = 4 k_\phi f w \Phi_m,$$

или с учетом синусоидальности эдс

$$E \cong 4,44 f w \Phi_m.$$



## ЛЕКЦИЯ №8.

### О цепях переменного тока.

Существование электрического тока неразрывно связано с существованием электрического и магнитного полей. При переменном токе поля изменяются во времени. Изменяющееся магнитное поле наводит эдс; изменяющееся электрическое поле сопровождается изменением зарядов на проводниках. В проводниках, а частью в окружающей среде электромагнитная энергия преобразуется в тепловую. Некоторое количество энергии излучается. На всех участках цепи имеют место все эти явления.

Для упрощения анализа реальную электрическую цепь заменяют расчетной схемой - идеализированной цепью, составленной из отдельных элементов, каждый из которых характеризует одно какое-либо явление.

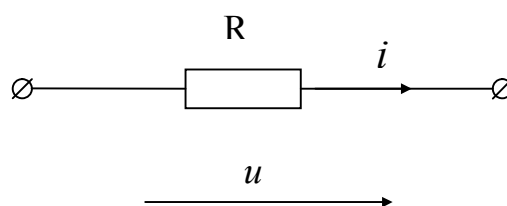
Вводятся:

- а) сопротивления, где происходит только преобразование электромагнитной энергии в тепловую,
- б) индуктивности, характеризующиеся только наличием магнитного поля,
- в) емкости, характеризующиеся только наличием электрического поля.

На схемах указываются индуктивные связи. Реальные источники представляют в виде источников напряжения или тока. Провода считают не обладающими сопротивлением, индуктивностью и емкостью. Это делает возможным применение для мгновенных значений законов Кирхгофа.

В дальнейшем рассматриваются линейные цепи при установившемся режиме действий источников синусоидальных эдс.

### Сопротивление в цепи переменного тока.



Если по сопротивлению протекает ток

$$i = I_m \sin \omega t,$$

то напряжение на его зажимах

$$u = Ri = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t,$$

где

$$U_m = RI_m,$$

или для действующих значений

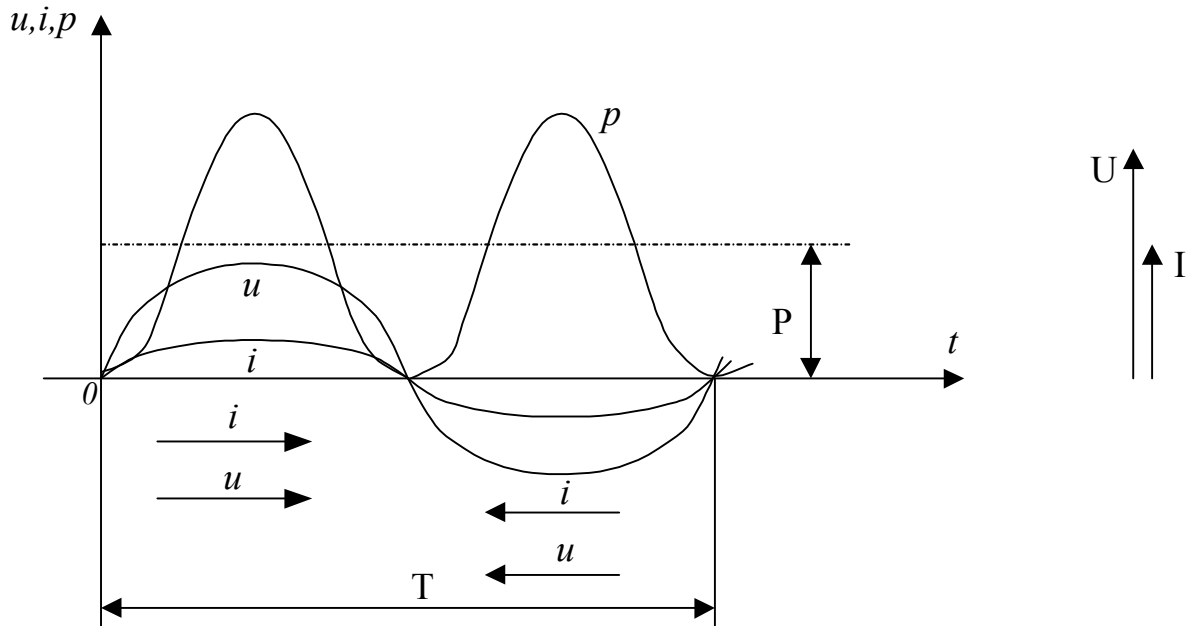
$$U = RI.$$

Мгновенная мощность

$$p = ui = Ri^2 = U_m I_m \sin^2 \omega t.$$

характеризует скорость преобразования электрической энергии в тепловую. Она всегда положительна, т.е. от генератора всегда отбирается энергия

$$p = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t = UI - UI \cos 2\omega t.$$

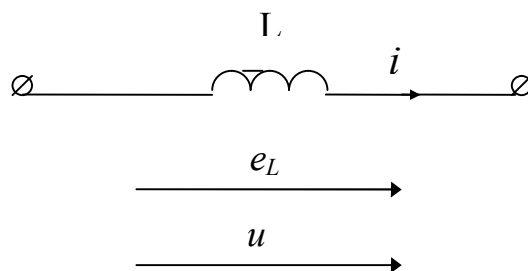


Средняя за период или активная мощность характеризует среднюю скорость преобразования энергии

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Сопротивление принято называть активным, так как на нем выделяется активная мощность.

Индуктивность в цепи переменного тока.



При токе в индуктивности

$$i = I_m \sin \omega t$$

возникает ЭДС

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = E_{Lm} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

где

$$E_{Lm} = \omega L I_m.$$

По закону Кирхгофа

$$e_L = -u,$$

т.е.

$$u = -e_L = \omega L I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где

$$U_m = \omega L I_m,$$

или для действующих значений

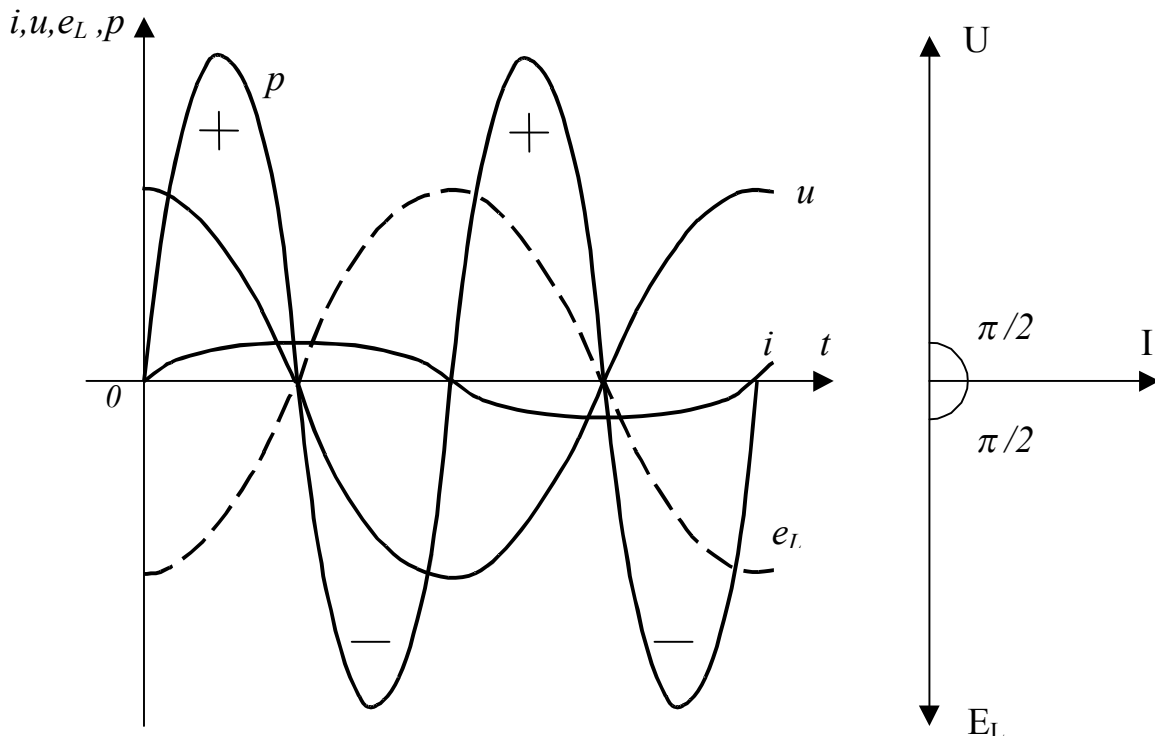
$$U = \omega L I \quad \text{или} \quad I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L},$$

где  $X_L = \omega L = 2\pi fL$  - индуктивное сопротивление.

Мгновенная мощность

$$p = ui = L \frac{di}{dt} i = L i \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{L i^2}{2} \right)$$

характеризует скорость преобразования электрической цепи в энергию магнитного поля.



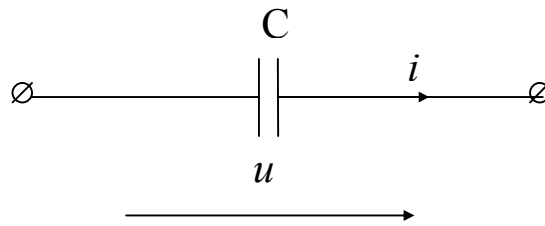
$$p = ui = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t.$$

Из графика видно, что в цепи происходит только периодический обмен энергией между генератором и магнитным полем (в соответствии с возрастанием или убыванием энергии  $W_m = \frac{Li^2}{2}$ ) без преобразования ее в механическую или тепловую. Средняя за период или активная мощность равна нулю.

За меру скорости обмена принимают максимальное значение мгновенной мощности, называемое реактивной мощностью

$$Q = UI = \omega LI^2.$$

Емкость в цепи переменного тока.



Если

$$u = U_m \sin \omega t,$$

то происходит перезаряд емкости током

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu) = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где

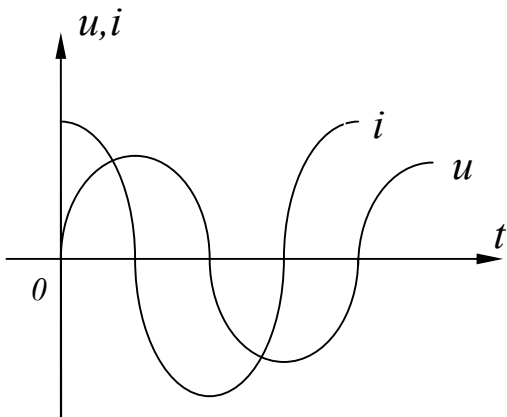
$$I_m = \omega C U_m,$$

или для действующих значений

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{X_c},$$

где

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \text{ - емкостное сопротивление.}$$



Мгновенная мощность

$$p = ui = uC \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Cu^2}{2} \right)$$

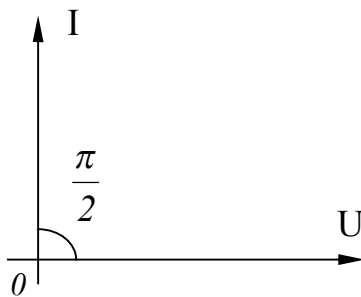
характеризует скорость преобразования энергии источника в энергию электрического поля емкости.

При

$$i = I_m \sin \omega t,$$

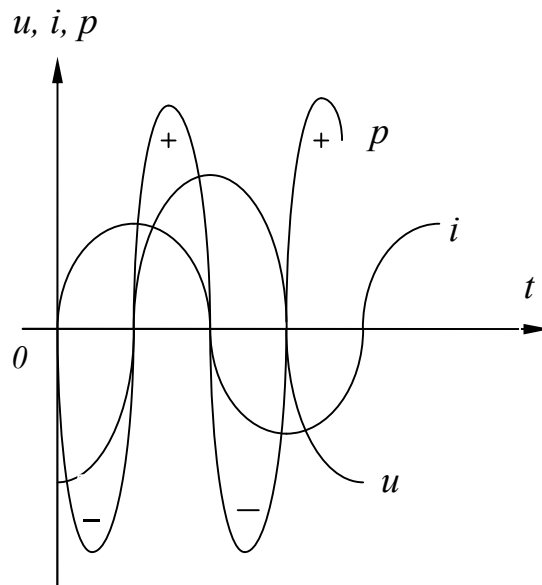
$$u = U_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{и}$$

$$p = \frac{U_m I_m}{2} \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) - \frac{U_m I_m}{2} \cos \left( 2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -UI \sin 2\omega t.$$



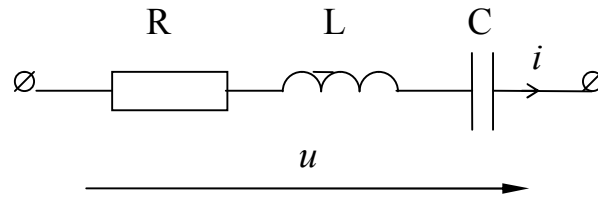
В цепи происходит периодический обмен энергией между генератором и электрическим полем емкости. Скорость обмена характеризуют максимальным значением обмениваемой мощности - реактивной мощностью

$$Q = UI = \omega CU^2.$$



## ЛЕКЦИЯ №9.

Последовательное соединение R, L, C в цепи переменного тока.



При токе

$$i = I_m \sin \omega t$$

напряжения на участках :

$$u_a = U_{am} \sin \omega t; U_{am} = RI_m; U_a = RI - \text{ на активном сопротивлении,}$$

$$u_L = U_{Lm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); U_{Lm} = \omega LI_m; U_L = X_L I - \text{ на индуктивности,}$$

$$u_c = U_{cm} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right); U_{cm} = \frac{1}{\omega C} I_m; U_c = X_c I - \text{ на емкости.}$$

В соответствии с последовательным соединением:

$$u = u_a + u_L + u_c = U_{am} \sin \omega t + U_{Lm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_{cm} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Обозначим

$$u_L + u_c = u_p = (U_{Lm} - U_{cm}) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{pm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом возможны случаи:

$$U_{Lm} > U_{cm}, \quad U_{Lm} = U_{cm} \quad \text{и} \quad U_{Lm} < U_{cm}.$$

Очевидно, напряжение источника в общем случае

$$u = U_m \sin(\omega t \pm \varphi),$$

где  $\varphi$  может принимать любые значения от 0 до  $90^\circ$ .

Продолжим анализ первого случая.

Из диаграммы следует

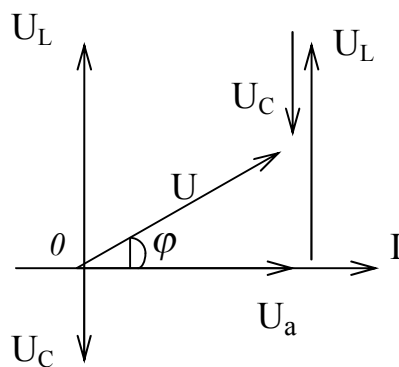
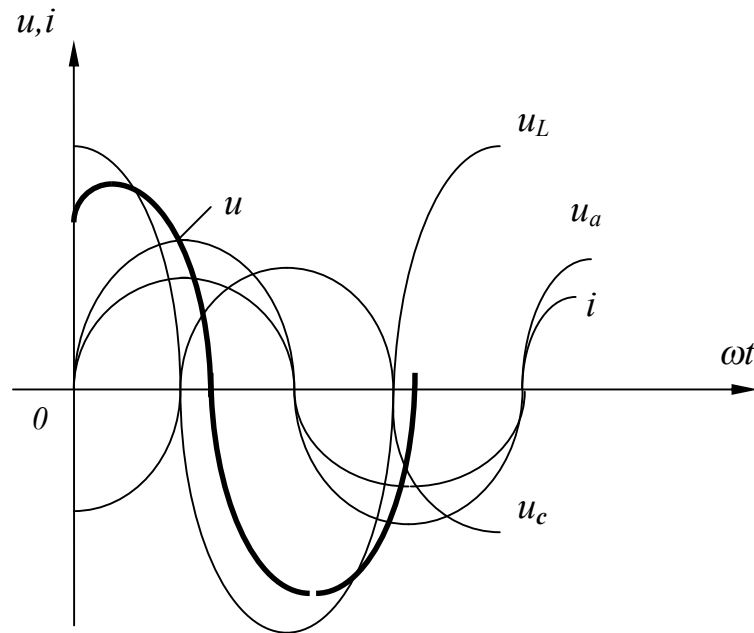
$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_c)^2} = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2} = ZI,$$

где

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2} - \text{ полное сопротивление.}$$

При этом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_c}{U_a} = \frac{X_L - X_c}{R},$$



или

$$\cos \varphi = \frac{U_a}{U} = \frac{R}{Z}.$$

Условно при  $U_L > U_C$  (ток отстает от напряжения) угол сдвига фаз считается положительным, а при  $U_L < U_C$  (ток опережает напряжение) угол считается отрицательным. Этому соответствует вполне определенная запись начальных фаз напряжения и тока: за исходную - принимается напряжение

$$u = U_m \sin \omega t.$$

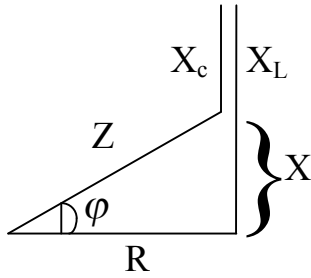
Тогда ток всегда записывается в виде

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

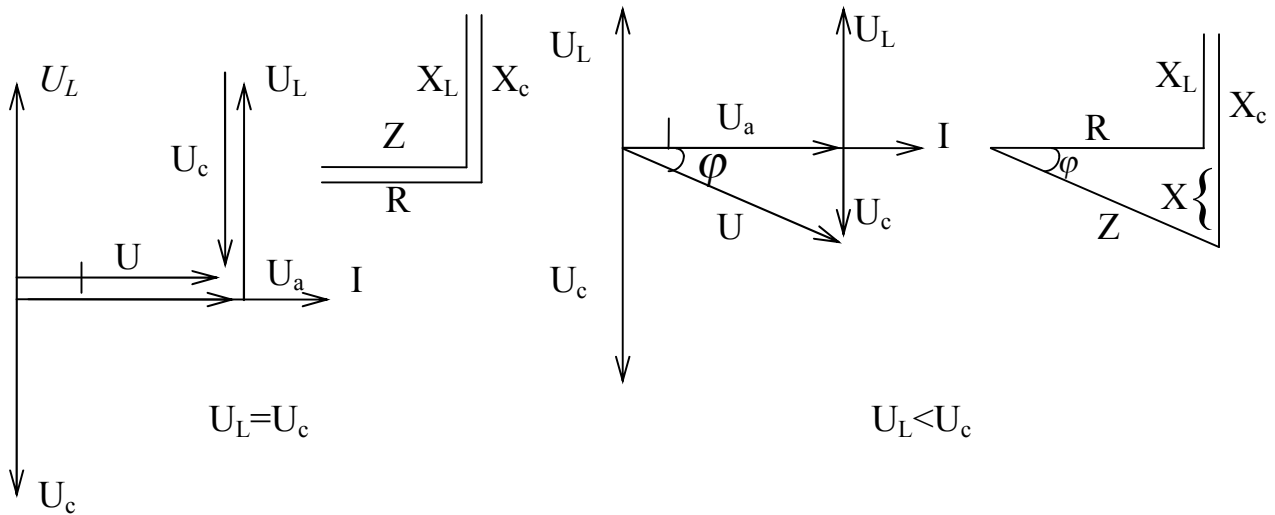
(при этом в состав обозначения угла  $\varphi$  входит знак).

При  $U_L = U_C$  ( $X_L = X_C$ ) напряжение и ток совпадают по фазе. Такой режим называют резонансным.

От векторной диаграммы легко перейти к треугольнику сопротивлений (например, уменьшением всех ее сторон в  $I$  раз).



Нетрудно заметить, что в треугольнике  $Z$  является гипотенузой,  $R$  - прилежащим к углу  $\varphi$  катетом, а  $X$  - противолежащим. Ниже приведены векторные диаграммы и треугольники сопротивлений для второго и третьего случаев.



Мгновенная мощность цепи

$$p = p_a + p_L + p_c = u_a i + u_L i + u_c i.$$

При

$$i = I_m \sin \omega t$$

МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ

$$p = U_{am} I_m \sin^2 \omega t + U_{Lm} I_m \sin \omega t \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + U_{cm} I_m \sin \omega t \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= 2U_a I \sin^2 \omega t + U_L I \sin 2\omega t - U_c I \sin 2\omega t.$$

В цепи происходит в разные промежутки времени как обмен энергией между полями и генератором, так и преобразование ее в тепловую энергию.

Средняя за период или активная мощность

$$P = U_a I = UI \cos \varphi, \text{ Вт,}$$

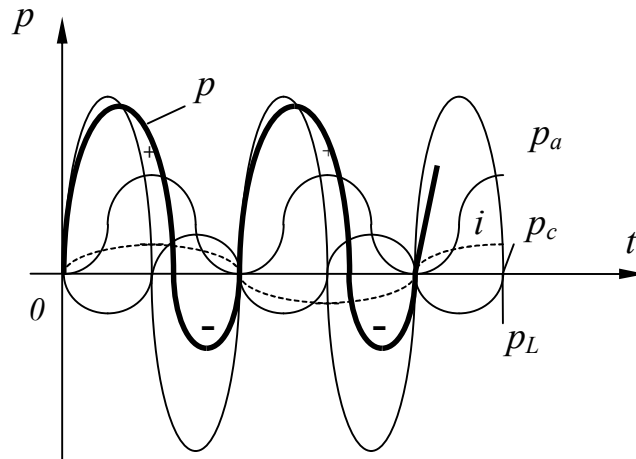
реактивная мощность

$$Q = (U_L - U_c) I = UI \sin \varphi, \text{ вар,}$$

полная мощность

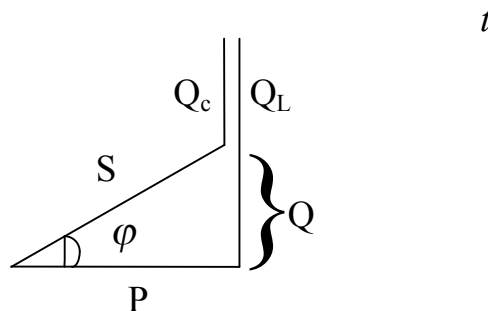
$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ В А.}$$





Мощности связаны между собой также как стороны прямоугольного треугольника (на рисунке представлен треугольник мощностей для первого случая). Из него следует

$$\frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi \quad ; \quad \frac{P}{S} = \cos \varphi .$$



Цепи переменного тока с параллельно включенными элементами.  
Метод проводимостей.

Пусть

$$u = U_m \sin \omega t .$$

Тогда

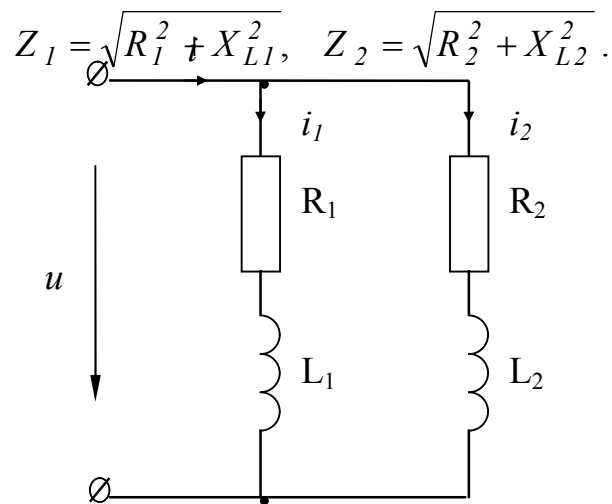
$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1) ,$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2) .$$

При этом

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} , \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} , \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_{L1}}{R_1} , \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_{L2}}{R_2} ,$$

где

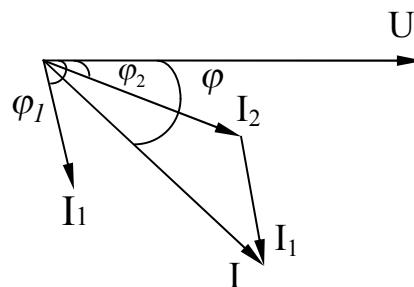


Обратные полным сопротивлениям величины называются полными проводимостями:

$$Y_1 = \frac{I}{Z_1}, \quad Y_2 = \frac{I}{Z_2}, \quad I_1 = Y_1 U, \quad I_2 = Y_2 U.$$

Ток в неразветвленной части

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$



Из векторной диаграммы следует

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2}.$$

Такой способ определения токов при большом числе параллельных ветвей оказывается громоздким.

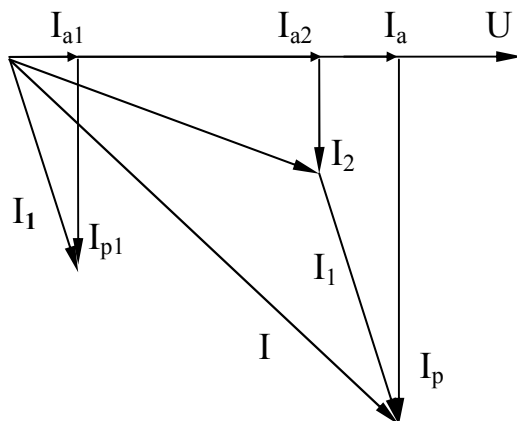
Рассмотрим ток ветви как сумму двух составляющих

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = U \frac{R_1}{Z_1^2} = G_1 U$$

и 
$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = U \frac{X_{L1}}{Z_1^2} = B_1 U,$$

где  $G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}$  - активная проводимость первой ветви

$B_1 = \frac{X_{L1}}{Z_1^2}$  - реактивная проводимость первой ветви.



Аналогично:

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = G_2 U, \quad \text{где } G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2},$$

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = B_2 U, \quad \text{где } B_2 = \frac{X_{L2}}{Z_2^2}.$$

Тогда

$$I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{p1}^2} = U \sqrt{G_1^2 + B_1^2}, \quad I_2 = U \sqrt{G_2^2 + B_2^2},$$

где  $\sqrt{G_1^2 + B_1^2} = Y_1$ ,  $\sqrt{G_2^2 + B_2^2} = Y_2$ .

Нетрудно заметить, что проводимости связаны между собой как стороны прямоугольного треугольника проводимостей. Из него следует:

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = U(G_1 + G_2) = GU,$$

$$I_p = I_{p1} + I_{p2} = U(B_1 + B_2) = BU,$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = U \sqrt{G^2 + B^2} = YU,$$

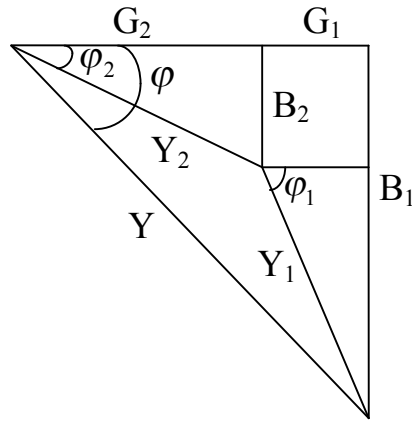
где  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{G}$ .

Мощности

$$P = UI_1 \cos \varphi_1 + UI_2 \cos \varphi_2 = UI_{a1} + UI_{a2} = UU(G_1 + G_2) = GU^2,$$

$$Q = BU^2,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = YU^2.$$



При нескольких параллельных ветвях задача решается аналогично с учетом того, что реактивная емкостная проводимость отрицательна.

Решая уравнение

$$\begin{cases} G = \frac{R}{Z^2} \\ B = \frac{X}{Z^2} \\ Y = \frac{I}{Z} \end{cases}$$

относительно  $R, X, Z$ , получим возможность определить по проводимостям эквивалентные сопротивления ветви:

$$R = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B}{Y^2}, \quad Z = \frac{I}{Y}.$$

## ЛЕКЦИЯ №10.

Мощность цепей однофазного переменного тока .  
Коэффициент мощности.

В общем случае при напряжении

$$u = U_m \sin \omega t$$

ток

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Мгновенная мощность

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi).$$

Средняя за период - активная мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi \quad (\text{Вт}).$$

Активная мощность (точнее - энергия) потребляется только активными сопротивлениями. Для каждого из них

$$P_k = U_k I_k = R_k I_k I_k = R_k I_k^2,$$

а для всех

$$P = \sum_1^n P_k = \sum_1^n R_k I_k^2.$$

Сумма всех генерируемых активных мощностей равна сумме всех потребляемых мощностей.

Электрические машины рассчитываются для определенных - номинальных значений напряжений и токов. Поэтому их характеризуют полной мощностью, определяемой как

$$S = UI \quad (\text{ВА}).$$

Отношение

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi$$

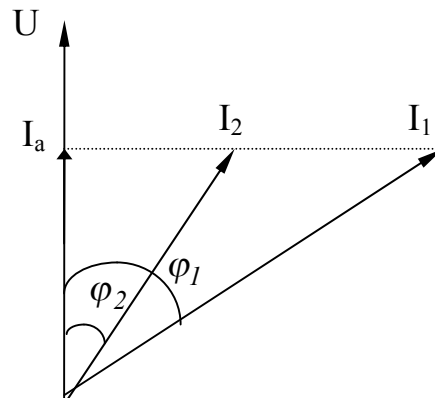
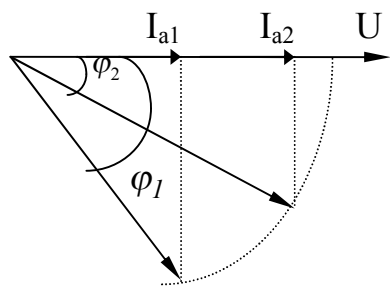
называется коэффициентом мощности.

Для лучшего использования электрооборудования желательно иметь  $\cos \varphi = 1$ . Например, при  $P = 10000 \text{ кВт}$  и  $\cos \varphi = 0.7$  генератор должен быть рассчитан на  $S = P / \cos \varphi = 14300 \text{ кВА}$ . При  $\cos \varphi = 1$  он должен быть рассчитан на  $S = 10000 \text{ кВА}$ .

Для уменьшения потерь в линии передачи также желателен высокий коэффициент мощности, так как потери в линии

$$\Delta P_{\text{Л}} = R_{\text{Л}} I^2 = R_{\text{Л}} \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}.$$

Чем ниже коэффициент мощности, тем дороже обходится энерго-



снабжение. Основной путь повышения  $\cos \varphi$  - нормальная загрузка электрооборудования. Так для асинхронного двигателя при холостом ходе  $\cos \varphi_{xx} = 0.2 - 0.3$ , а при номинальной нагрузке -  $\cos \varphi_H = 0.85 - 0.9$ .

При одном и том же токе нагрузки (и напряжении) повышение  $\cos \varphi$  ведет к возрастанию отдаваемой активной мощности, так как

$$P = UI \cos \varphi = UI_a.$$

Повышение  $\cos \varphi$  при одной и той же активной мощности ведет к уменьшению тока нагрузки, т.е. к лучшему использованию генератора.

Активная мощность является мерой механической загрузки машины и определяет работу за единицу времени.

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi \text{ (вар)}$$

является мерой энергии, колеблющейся в цепи между генератором и приемником. Принято считать реактивную мощность индуктивности положительной, а емкости - отрицательной. Поэтому емкость часто называют «генератором» реактивной мощности.

Желательно уменьшение реактивной мощности, так как это снижает необходимую полную мощность генератора

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

а также потери энергии в линии передачи

$$\Delta P_{\text{Л}} = R_{\text{Л}} I^2 = R_{\text{Л}} \frac{S^2}{U^2} = R_{\text{Л}} \frac{P^2}{U^2} + R_{\text{Л}} \frac{Q^2}{U^2}.$$

Реактивная мощность может быть определена и по элементам. Для каждого из них

$$Q_k = U_k I_k = X_k I_k I_k = X_k I_k^2,$$

а для всех

$$Q = \sum_1^n Q_k = \sum_1^n X_k I_k^2,$$

где  $X_k$  для индуктивности положительно, а для емкости - отрицательно. Сумма всех генерируемых реактивных мощностей равна сумме всех потребляемых.

За время  $t$  цепью потребляется активная энергия

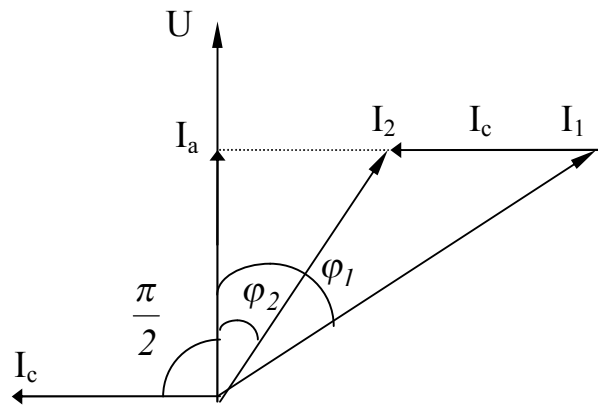
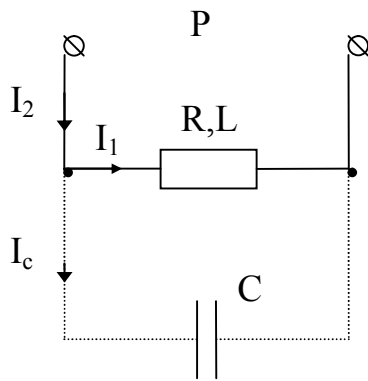
$$W_a = \int_{t_1}^{t_2} P dt \text{ или } W_a = Pt - \text{при постоянной мощности.}$$

$[W_a] = \text{Вт. с.}, \text{ чаще Вт.ч.}$

По аналогии определяется реактивная энергия

$$W_p = \int_{t_1}^{t_2} Q dt \text{ или } W_p = Qt - \text{при постоянной мощности. (вар.ч.).}$$

Улучшение коэффициента мощности может быть достигнуто и искусственным путем. Для этого параллельно нагрузке включается емкость.



Из векторной диаграммы следует:

$$I_{1p} - I_{2p} = I_a \operatorname{tg} \varphi_1 - I_a \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{P}{U} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2).$$

Но  $I_{1p} - I_{2p} = I_c = \omega C U$ .

Тогда  $C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$ .

Улучшение  $\cos \varphi$  достигается при этом за счет обмена энергией между емкостью и индуктивностью:

$$Q = Q_L + Q_c,$$

$$Q_L = UI_1 \sin \varphi_1,$$

$$Q_c = UI_c \sin \varphi_c = -UI_c,$$

$$UI_2 \sin \varphi_2 = UI_1 \sin \varphi_1 - UI_c.$$

Эквивалентные параметры цепи переменного тока и ее элементов и их экспериментальное определение.

На практике часто встречаются весьма сложные цепи как по схеме, так и по происходящим в них явлениям. Однако, при синусоидальных токах и на-

пряжениях эти сложные цепи можно заменить простыми эквивалентными с параметрами  $X$ ,  $R$ , и  $Z$  или  $B$ ,  $G$  и  $Y$ , определяемыми из треугольников напряжений или токов и соотношений:

$$U = ZI, \quad I = YU,$$

$$U_a = RI, \quad I_a = GU,$$

$$U_p = XI, \quad I_p = BU.$$

Определение эквивалентных  $Z$  или  $Y$  исходит из

$$Z = \frac{U}{I} \quad \text{или} \quad Y = \frac{I}{U},$$

где  $U$  и  $I$  измеряются амперметром и вольтметром.

Далее, измерив ваттметром  $P$ , определяется

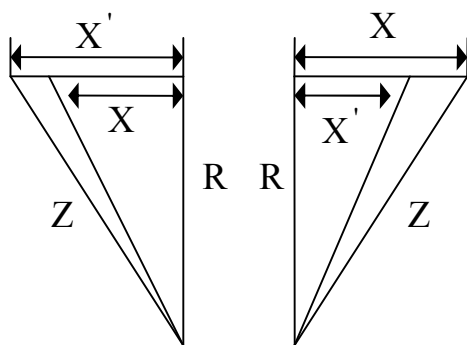
$$R = \frac{U_a}{I} = \frac{U_a I}{I^2} = \frac{P}{I^2} \quad \text{или} \quad G = \frac{I_a}{U} = \frac{I_a U}{U^2} = \frac{P}{U^2}.$$

Наконец, из треугольника сопротивлений или проводимостей следует:

$$X = \pm \sqrt{Z^2 - R^2} \quad \text{или} \quad B = \pm \sqrt{Y^2 - G^2}.$$

Для определения знака  $X$  или  $B$  следует включить последовательно или параллельно с исследуемой цепью вполне известное сопротивление с реактивной составляющей и произвести повторное измерение. Так для определения  $X$  можно включить последовательно емкость (конденсатор) с реактивным сопротивлением

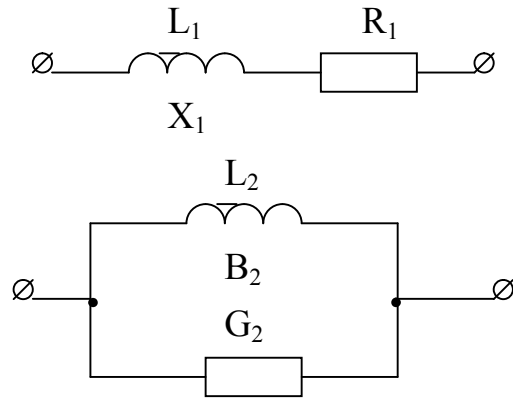
$$X' = \frac{1}{\omega C}.$$



Таким образом, сколь угодно сложную цепь можно заменить ей эквивалентной, состоящей из последовательно соединенных  $R$  и  $X$  или параллельно соединенных  $G$  и  $B$ . По  $X$  и  $B$ , зная частоту  $\omega$ , можно вычислить эквивалентную индуктивность  $L$  сложной цепи при  $X > 0$  и  $B > 0$  или емкость  $X < 0$  и  $B < 0$ .

При этом следует иметь ввиду, что эквивалентные параметры цепи зависят от параметров всех элементов ее и являются функциями частоты. Кроме того, эквивалентные  $L$  и  $C$ , вычисленные по  $X$ , не эквивалентны  $L$  и  $C$ , вычисленные по  $B$ .





При эквивалентности цепей на рисунках приняв

$$X_1 = \omega L_1 \text{ и } B_2 = \frac{1}{\omega L_2},$$

получим

$$R_1 = \frac{G_2}{G_2^2 + B_2^2} = \frac{G_2 \omega^2 L_2^2}{1 + G_2^2 \omega^2 L_2^2},$$

$$X_1 = \frac{B_2}{G_2^2 + B_2^2} = \frac{\omega L_2}{1 + G_2^2 \omega^2 L_2^2}, \quad L_1 = \frac{X_1}{\omega} = \frac{L_2}{1 + G_2^2 \omega^2 L_2^2}.$$

Таким образом  $L_1 \neq L_2$  и каждый из параметров первой цепи зависит от обоих параметров второй и от частоты.

Даже для простой реактивной катушки ее параметры сложным образом зависят от частоты. Так при низких частотах катушка является индуктивным сопротивлением, но при высоких частотах наличие емкости между витками может привести к тому, что ее эквивалентное сопротивление принимает емкостный характер.

Активное сопротивление также зависит от частоты из-за явления поверхностного эффекта и вихревых токов.

### Влияние поверхностного эффекта и вихревых токов на параметры цепи.

Если определить на постоянном токе

$$R_- = \frac{P_-}{I^2},$$

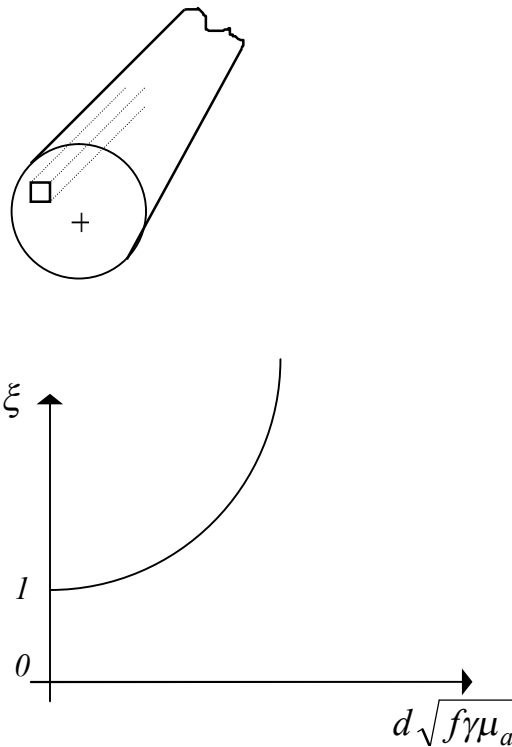
а затем включить этот же проводник на такое же значение переменного тока и определить

$$R_{\sim} = \frac{P_{\sim}}{I^2}$$

то окажется, что

$$P_{\sim} > P_{-} \quad \text{и} \quad R_{\sim} > R_{-}.$$

Для их различия иногда сопротивление постоянному току называют омическим, а переменному - активным. Увеличение сопротивления на переменном токе объясняется неодинаковой плотностью тока по сечению на переменном токе. Это явление заключается в большей плотности тока на участках поперечного сечения проводника, расположенных ближе к его поверхности - явление поверхностного эффекта. Оно объясняется тем, что при переменном токе внутри проводника в центральных элементарных проводниках возникает большая эдс, т.к. они охвачены большим числом магнитных линий. Поверхностный эффект возрастает в стальных проводниках с увеличением диаметра проводов, частоты тока, удельной электропроводности и магнитной проницаемости. При небольших частотах и медных проводах поверхностный эффект незначителен.



Для оценки увеличения сопротивления при переменном токе можно воспользоваться приводимой в справочных пособиях кривой.

Тогда

$$R_{\sim} = \xi R_{-},$$

где  $\xi$  - коэффициент поверхностного эффекта.

Для медного провода диаметром 11.3 мм при площади поперечного сечения 100 мм<sup>2</sup> для частоты 150 Гц коэффициент поверхностного эффекта составляет 1.03.

За счет явления поверхностного эффекта кроме того вследствие ослабления плотности тока в центральных частях сечения магнитный поток внутри провода уменьшается, что приводит к некоторому уменьшению индуктивности.

Близость соседних проводов, несущих переменные токи, нарушает симметричное расположение плотности тока по сечению - эффект близости.

На параметры электрической цепи оказывают влияние так же вихревые электрические токи (токи Фуко), возникающие в сплошных проводящих телах, расположенных в переменном магнитном поле рассматриваемой цепи. Собственное поле их по закону Ленца действует размагничивающим образом. Это ведет к уменьшению индуктивности цепи. Кроме того наличие вихревых токов сопровождается выделением тепла, т.е. имеют место потери на вихревые токи. В этом случае:

$$R_{\sim} = \left[ \frac{(I^2 R + P_{\epsilon})}{I^2} \right] > 0.$$

## ЛЕКЦИЯ №11.

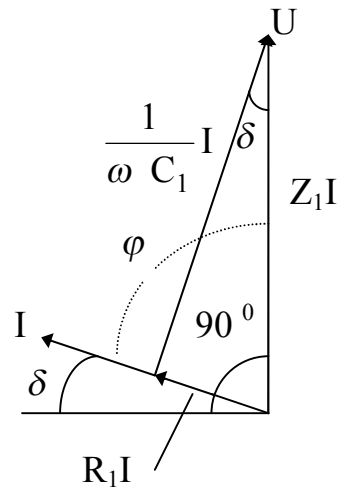
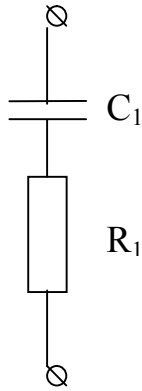
### Параметры несовершенного конденсатора.

В воздушном конденсаторе практически нет активных потерь. Поэтому их характеризуют только емкостью. При наличии диэлектрика имеет место выделение тепла. При этом  $|\varphi| < 90^\circ$ . Реальный конденсатор может быть на схемах представлен последовательным соединением  $R$  и  $C$ .

Угол

$$\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi|.$$

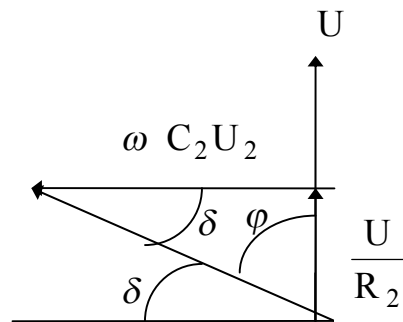
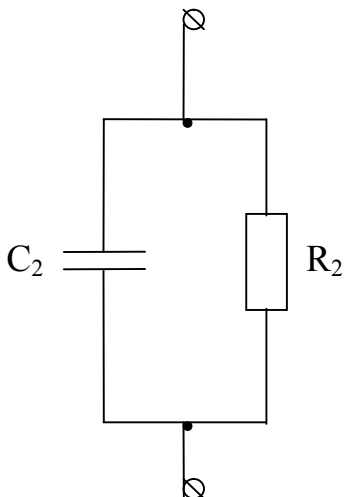
называется углом диэлектрических потерь.



Из векторной диаграммы следует :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R_1 I}{\frac{1}{\omega C_1} I} = \omega R_1 C_1, \quad \sin \delta = \frac{R_1}{Z_1}, \quad \cos \delta = \frac{1}{\omega C_1 Z_1}.$$

Этот же конденсатор можно представить параллельной схемой.



Тогда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{l}{\omega C_2 R_2}, \quad \sin \delta = \frac{Z_2}{R_2}, \quad \cos \delta = \omega C_2 Z_2.$$

Так как  $Z_1 = Z_l = Z$ , то

$$\sin^2 \delta = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{и} \quad \cos^2 \delta = \frac{C_2}{C_1}.$$

Практически угол  $\delta$  очень мал. Поэтому

$$C_1 \approx C_2, \quad R_1 \ll R_2.$$

Приняв  $\operatorname{tg} \delta \approx \delta$ , имеем:

$$R_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega C_1} \approx \frac{\delta}{\omega C_1} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{l}{\omega C_2 \operatorname{tg} \delta} \approx \frac{l}{\omega C_2 \delta}.$$

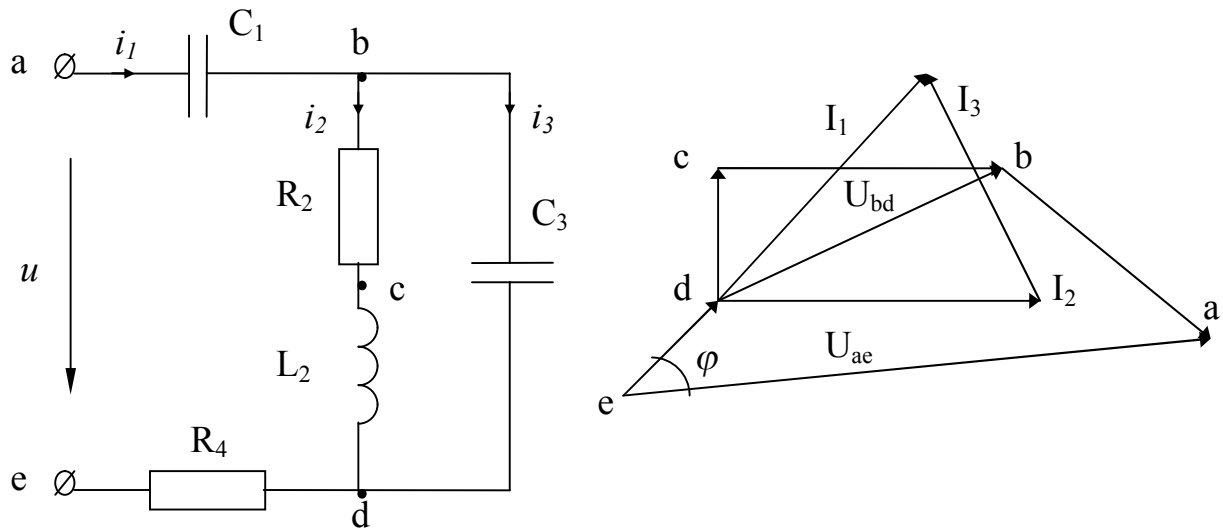
Параметры различных устройств в цепи переменного тока.

В некоторых пределах изменения частоты можно с достаточно большой точностью считать, что  $R$  реостатов,  $L$  катушек и  $C$  конденсаторов остаются постоянными. Сопротивление ламп накаливания можно считать чисто активными и независимыми от частоты. Асинхронные двигатели обладают сопротивлением, носящим индуктивно-активный характер и зависящим от нагрузки на валу двигателя. Синхронные двигатели могут иметь сопротивление как индуктивного характера (недовозбужденный двигатель), так и емкостного (перевозбужденный).

О топографических диаграммах при расчете цепей.

Рассмотренный ранее расчет цепей переменного тока, основанный на векторных диаграммах достаточно прост только при расчете простых цепей. Обычно расчет иллюстрируется векторными диаграммами, построенными в топографическом исполнении (так, что бы каждой точке схемы соответствовала вполне определенная точка диаграммы). В качестве примера такая диаграмма приводится на рисунке.

Ее построение удобно начать с вектора тока в одной из параллельных ветвей, в которой включено больше элементов ( $I_2$ ). Затем от точки  $d$  (приняв ее потенциал за исходный) строим опережающий ток  $I_2$ , напряжение  $U_{cd}$  и совпадающее  $U_{bc}$ . Их сумма дает  $U_{bd}$ . Относительно последнего построен вектор тока  $I_3$ , который в сумме с  $I_2$  дает ток неразветвленной части  $I_1$ . Затем построены относительно тока  $I_1$  напряжение  $U_{ab}$ , отстающее от тока, и  $U_{de}$ , совпадающее с ним таким образом, чтобы сумма всех напряжений определила бы напряжение на зажимах цепи  $U_{ae}$ .



Символический метод расчета цепей переменного тока.  
(разработан американским электротехником Ч. Штейнмецем в 1893-95 гг.)

Так как переменный ток исчерпывающе задается амплитудой вектора и его фазой, то оказалось удобным использовать для его изображения комплексные числа. Комплексным называют число

$$A + \sqrt{-B^2} = A + B\sqrt{-1} = A + jB.$$

Ему соответствует вполне определенная точка на плоскости. При этом комплексное число будем изображать вектором с модулем

$$M = \sqrt{A^2 + B^2},$$

углом

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A}.$$

Тогда множитель  $j$  можно рассматривать как поворотный (он поворачивает вектор против часовой стрелки на  $90^\circ$ ).

Любое комплексное число может быть записано в различных формах:

$$A = A' + jA'' \text{ - алгебраическая форма,}$$

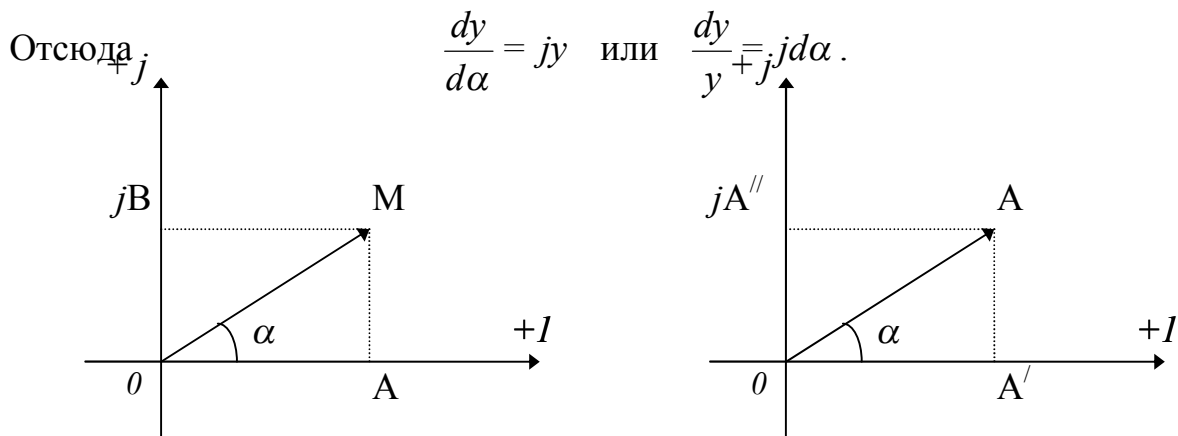
$$A = |A| (\cos \alpha + j \sin \alpha) \text{ - тригонометрическая форма.}$$

Примем

$$\cos \alpha + j \sin \alpha = y.$$

Тогда

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\sin \alpha + j \cos \alpha = j(\cos \alpha + j \sin \alpha) = jy.$$



Решение уравнения  $lny = j\alpha + K$ .

При  $\alpha = 0$ ,  $lny = K$ ,  $y_{\alpha=0} = I$ , т.е.  $K = \ln I = 0$ .

Тогда  $y = e^{j\alpha}$ , а  $A = |A| e^{j\alpha}$  - показательная форма.

Значительно реже применяется полярная форма записи:

$$A = |A| \angle \alpha.$$

При действиях с комплексными числами фактически осуществляется действия с векторами, что и необходимо в цепях переменного тока. При этом сложение и вычитание удобнее производить в алгебраической форме, а умножение и деление - в показательной.

Токи, напряжения, эдс, сопротивления и проводимости в комплексной форме.

Пусть задан ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Его можно представить в виде:

$$i = I_m \cos\psi \sin\omega t + I_m \sin\psi \cos\omega t.$$

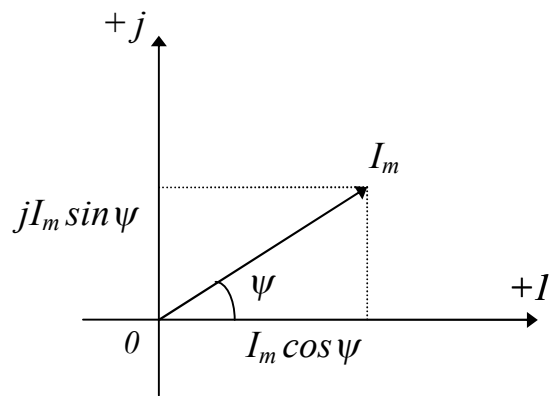
и изобразить в виде суммы двух векторов, первый из которых расположен в положительном направлении оси вещественных чисел, а второй - мнимых чисел. Тогда в комплексной форме

$$\underline{I}_m = I_m \cos\psi + jI_m \sin\psi = I_m e^{j\psi}.$$

Аналогичным образом можно записать любое напряжение или эдс. При этом вектор, изображающий амплитудные значения, в другом масштабе изображает действующие.

Мгновенное значение запишется символически

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)}.$$



По формуле Эйлера

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Поэтому

$$i = \text{Im} \left[ I_m e^{j(\omega t + \psi)} \right] \text{ (латинское Imaginarius - мнимый).}$$

Интегралы и производные заданной функции определяются из выражений:

$$\int i dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi) = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \psi) = \omega I_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Откуда следует, что если  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$  изображается  $\underline{I}_m e^{j\omega t}$ , то интеграл изображается как

$$\frac{I_m}{\omega} e^{j\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\underline{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t},$$

а производная  $\omega \underline{I}_m e^{j\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}.$

Запишем уравнение Кирхгофа для последовательного соединения  $R$ ,  $L$  и  $C$ :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

На основании изложенного

$$R \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}.$$

Сократив на  $e^{j\omega t}$ , получим:

$$\underline{I}_m \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U}_m,$$



или 
$$\underline{I} \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U},$$

или 
$$\underline{I} \left( R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) = \underline{U}.$$

Отсюда при заданном  $\underline{U}$  и параметрах цепи  $R$ ,  $L$  и  $C$  легко определяется  $\underline{I}$ .

Величина  $R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = \underline{Z}$  называется комплексным сопротивлением ветви, содержащей  $R$ ,  $L$  и  $C$ . При этом  $R$  - положительно,  $j\omega L$  - положительно, а  $-j\frac{1}{\omega C}$  - отрицательно.

Величина

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y} = \frac{I}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{R - jX}{Z^2} = G - jB$$

называется комплексной проводимостью.

Комплексная мощность:

Если  $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$ , а  $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$ ,

то

$$\underline{U} \underline{I}^* = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ = \underline{S},$$

$$P = \operatorname{Re}[\underline{U} \underline{I}^*], \quad Q = \operatorname{Im}[\underline{U} \underline{I}^*], \quad (\text{лат. } \textit{Realis} - \text{вещств.})$$

так как  $\psi_u - \psi_i = \varphi$  - угол сдвига фаз между током и напряжением.

### Законы Кирхгофа и Ома в символической форме.

Закон Ома был получен ранее:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \quad \underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$$

или 
$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}, \quad \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}.$$

По 1-му закону Кирхгофа для мгновенных значений

$$\sum_1^n i_k = 0$$

или в символической (комплексной) форме:

$$\sum_l^n \underline{I}_k = 0$$

Аналогично для 2-го закона Кирхгофа

$$\sum_l^m e_k = \sum_l^m u_k ,$$

или

$$\sum_l^m \underline{E}_k = \sum_l^m \underline{Z}_k \underline{I}_k .$$

При записи законов Кирхгофа необходимо приписать всем эдс и токам положительное направление.

Расчет цепей с помощью символического метода.

В символической форме законы Ома и Кирхгофа аналогичны соответствующим законам цепей постоянного тока. Отсюда следует применимость всех расчетных методов, рассмотренных на постоянном токе для расчета цепей переменного тока, но в символической (комплексной) форме.

## ЛЕКЦИЯ №12.

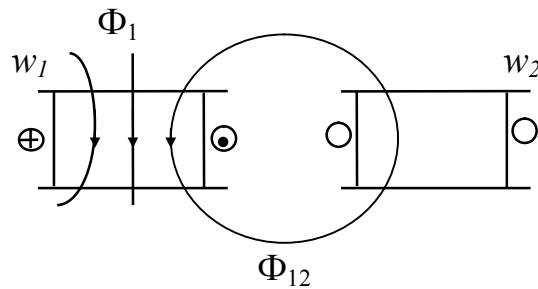
Цепи со взаимной индукцией.

Основные понятия и определения.

Явление наведения эдс в каком-либо контуре (катушке) при изменении тока в другом называется явлением взаимной индукции. При этом если токи протекают в обеих катушках, полное потокоцепление каждой из них:

$$\Psi_{1\Pi} = w_1(\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \Psi_1 \pm \Psi_{21},$$

$$\Psi_{2\Pi} = w_2(\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \Psi_2 \pm \Psi_{12}.$$



Из опыта установлено, что при постоянной магнитной проницаемости среды:

$$\Psi_{21} = M_{21}i_2, \quad \Psi_{12} = M_{12}i_1,$$

при этом

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Коэффициент пропорциональности « $M$ » называется коэффициентом взаимной индукции или просто взаимной индуктивностью.

При изменении токов в катушках возникает эдс:

$$e_1 = -\frac{d\Psi_{1\Pi}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Psi_1 \pm \Psi_{21}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} + e_{1M},$$

$$e_2 = -\frac{d\Psi_{2\Pi}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Psi_2 \pm \Psi_{12}) = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} + e_{2M},$$

где  $e_{1M}$  и  $e_{2M}$  - эдс взаимной индукции, при которой знак «минус» соответствует согласному направлению потоков самоиндукции и взаимной индукции.

Составим отношения

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Psi_{12}w_1}{w_2\Psi_1} = \frac{Mi_1w_1}{w_2L_1i_1} = \frac{M}{L_1} \cdot \frac{w_1}{w_2},$$

$$\frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} = \frac{\Psi_{21}w_2}{w_1\Psi_2} = \frac{Mi_2w_2}{w_1L_2i_2} = \frac{M}{L_2} \cdot \frac{w_2}{w_1}.$$

которые характеризуют долю связанного потока, созданного катушками. Их среднее геометрическое называют коэффициентом связи:

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} \cdot \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Коэффициент связи может находиться в пределах

$$0 \leq k \leq 1,$$

так как  $\Phi_1 \geq \Phi_{12}$  и  $\Phi_2 \geq \Phi_{21}$ .

На практике к максимальному коэффициенту связи стремятся в трансформаторах, где он близок к единице.

Энергия двух катушек при магнитной связи определится как сумма:

$$W_{1M} = \frac{\Psi_{1\Pi} i_1}{2} \quad \text{и} \quad W_{2M} = \frac{\Psi_{2\Pi} i_2}{2},$$

т.е.

$$W_M = \frac{1}{2} [(L_1 i_1 \pm M i_2) i_1 + (L_2 i_2 \pm M i_1) i_2] = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2.$$

В общем случае « $n$ » катушек (контуров):

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_1^n L_k i_k^2 \pm \sum_{k \neq p} M_{kp} i_k i_p.$$

Расчет цепей переменного тока при наличии индуктивных связей.

Пусть в 1-ой катушке

$$i_1 = I_{1m} \sin \omega t,$$

а во 2-ой

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi).$$

При этом в каждой возникает как эдс самоиндукции, так и эдс взаимной индукции. При их согласном направлении:

$$u_1 = R_1 i_1 - e_{L1} - e_{M1} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 = R_2 i_2 - e_{L2} - e_{M2} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

В символической форме:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1.$$

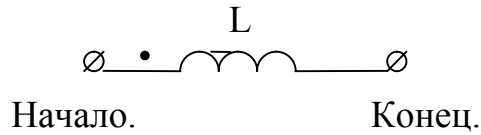
При встречном включении

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1.$$

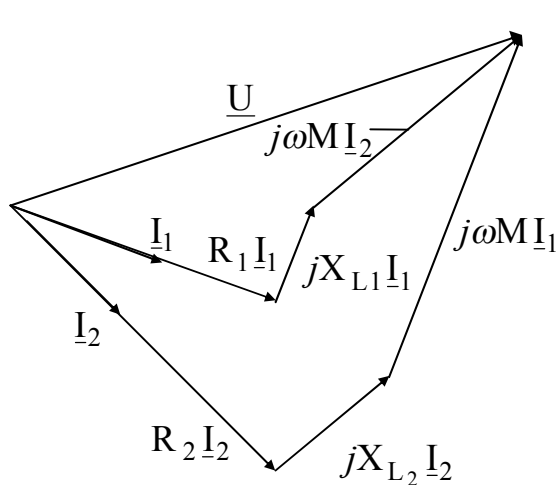
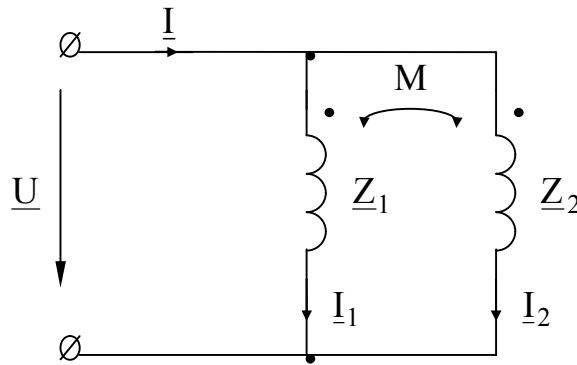
Уравнения и схемы замещения для магнитно-связанных контуров.

Для расчета необходимо ввести понятие одноименных зажимов. Зажимы называются одноименными, если при одинаковом направлении токов относительно них магнитные потоки само- и взаимоиндукции совпадают. Для катушек это зависит от взаимного расположения и направления намотки. Условно точкой обозначается «начало» катушки.



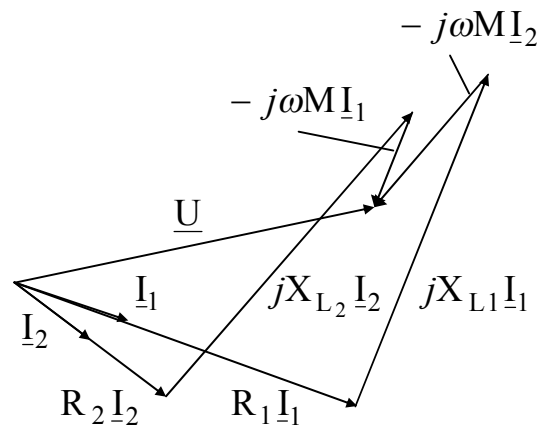
Индуктивно связанные катушки при параллельном и последовательном включении.

Для параллельного соединения элементов при согласном и встречном включении ниже приводятся уравнения и векторные диаграммы.



$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2,$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1.$$



$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2,$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1.$$

При последовательном соединении

$$\underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I} \pm 2j\omega M \underline{I},$$

где «+» означает согласное включение, а «-» - встречное.

Этот способ соединения может быть применен для определения взаимной индуктивности.

При согласном включении:

$$Z_{\text{согл}} = \frac{U_{\text{согл}}}{I_{\text{согл}}} = \sqrt{R^2 + X_{\text{согл}}^2}, \quad R = \frac{P_{\text{согл}}}{I_{\text{согл}}^2}, \quad X_{\text{согл}} = \sqrt{Z_{\text{согл}}^2 - R^2}.$$

При встречном:

$$Z_{\text{встр}} = \frac{U_{\text{встр}}}{I_{\text{встр}}} = \sqrt{R^2 + X_{\text{встр}}^2}, \quad X_{\text{встр}} = \sqrt{Z_{\text{встр}}^2 - R^2}.$$

Так как

$$X_{\text{согл}} = \omega L + 2\omega M,$$

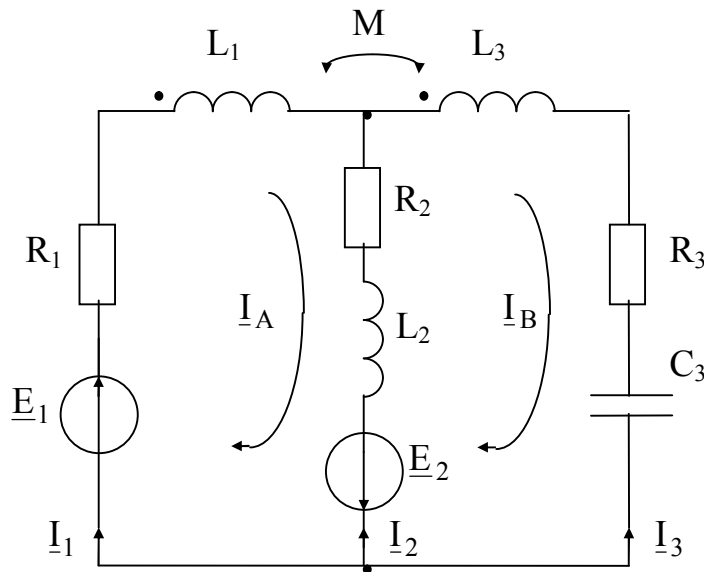
$$X_{\text{встр}} = \omega L - 2\omega M,$$

то

$$M = \frac{X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}}}{4\omega}.$$

Сложные цепи при наличии индуктивных связей.

При расчете сложных цепей можно воспользоваться законами Кирхгофа в символической форме, в составе которых должны быть напряжения взаимной индукции вида  $\pm j\omega M_{pq} \underline{I}_q$ . В соответствии с ранее сделанными замечаниями положительный знак ставится, если направление обхода катушки «*p*» и тока катушки «*q*» относительно одноименных зажимов совпадают.



Например, для цепи, изображенной на рисунке, уравнения Кирхгофа принимают вид:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0, \\ R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_3 - R_2 \underline{I}_2 - j\omega L_2 \underline{I}_2 &= \underline{E}_1 + \underline{E}_2, \\ j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_2 \underline{I}_2 - j\omega L_3 \underline{I}_3 + j\omega M \underline{I}_1 - R_3 \underline{I}_3 + j \frac{1}{\omega C_3} \underline{I}_3 &= -\underline{E}_2. \end{aligned}$$

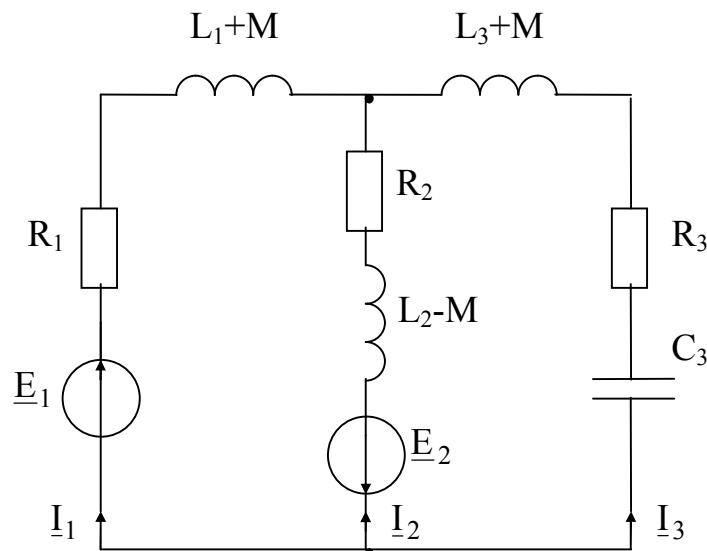
Возможно применение метода контурных токов

$$\begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_A - (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_B + j\omega M \underline{I}_B &= \underline{E}_1 + \underline{E}_2, \\ \left( R_2 + j\omega L_2 + R_3 + j\omega L_3 - j \frac{1}{\omega C_3} \right) \underline{I}_B - (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_A + j\omega M \underline{I}_A &= -\underline{E}_2. \end{aligned}$$

Может быть применен также метод наложения.

Метод узловых потенциалов не применяется, так как основан на 1-ом законе Кирхгофа, не учитывающем напряжения взаимной индукции. Не применяются также методы преобразования и эквивалентного генератора. Однако, и эти методы могут применяться после предварительной «развязки» индуктивных связей. Для этого исключим из уравнений 2-го закона Кирхгофа с помощью 1-го закона токи ветвей, не входящих в контур, для которого они записаны:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= -\underline{I}_2 - \underline{I}_1, \\ \underline{I}_1 &= -\underline{I}_2 - \underline{I}_3. \end{aligned}$$



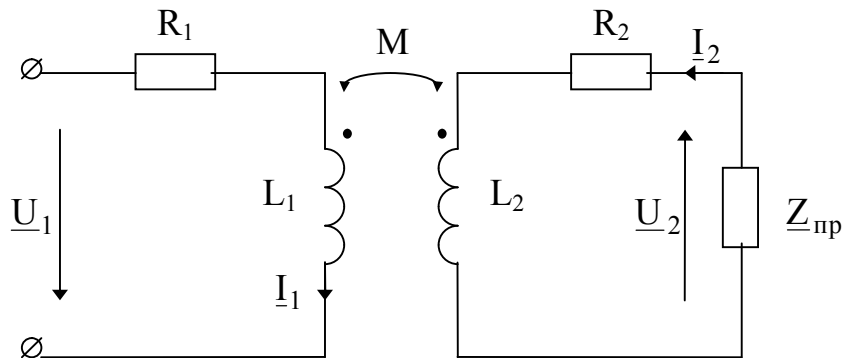
Уравнения принимают вид, которому соответствует изображенная на рисунке электрическая цепь без индуктивных связей:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0, \\ (R_1 + j\omega L_1 + j\omega M)\underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2 - j\omega M)\underline{I}_2 &= \underline{E}_1 + \underline{E}_2, \\ (R_2 + j\omega L_2 - j\omega M)\underline{I}_2 - \left( R_3 - j\frac{1}{\omega C_3} + j\omega L_3 + j\omega M \right)\underline{I}_3 &= -\underline{E}_2. \end{aligned}$$

### Трансформаторы в линейном режиме.

Широко используемые в технике двухобмоточные трансформаторы представляют собой две индуктивно связанные катушки, называемые обмотками. В трансформаторах с сильной связью ( $k \approx 1$ ) обмотки располагают на общем ферромагнитном сердечнике. Трансформаторы со слабой связью ( $k \ll 1$ ) без ферромагнитного сердечника называют воздушными.

Предполагаем отсутствие насыщения сердечника, что делает режим трансформатора линейным.



По 2-му закону Кирхгофа

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + u_2. \end{aligned}$$

С учетом линейности получим в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \\ 0 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 + \underline{U}_2. \end{aligned}$$

Считая известным

$$\underline{Z}_{np} = R_{np} + jX_{np},$$

а также  $\underline{U}_1$ , найдем первичный ток. Для краткости записи положим:

$$\omega L_1 = X_1, \quad R_1 + R_{np} = R_{II}, \quad \omega L_2 + X_{np} = X_{II}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \\ 0 &= (R_{II} + jX_{II})\underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1, \end{aligned}$$



а

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + j\omega M \left( -\frac{j\omega M \underline{I}_1}{R_{II} + jX_{II}} \right) = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{II} + jX_{II}} \underline{I}_1 = \\ &= (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2 (R_{II} - jX_{II})}{R_{II}^2 + X_{II}^2} \underline{I}_1.\end{aligned}$$

Первичный ток

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underbrace{\left( R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{II}^2 + X_{II}^2} R_{II} \right)}_{\underline{Z}_{ex}} + j \underbrace{\left( X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_{II}^2 + X_{II}^2} X_{II} \right)}_{\underline{Z}_{ex}}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{ex}}.$$

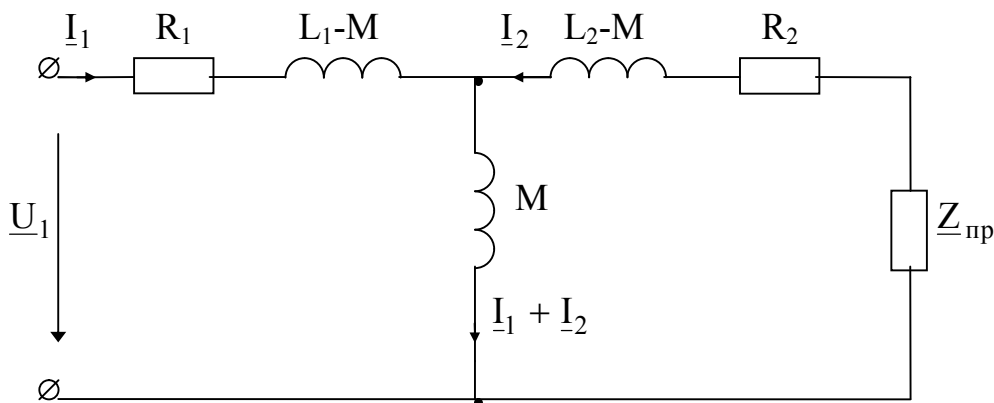
В уравнении тока  $\underline{I}_1$  подчеркнуты так называемые вносимые активное и реактивное сопротивления.

При  $\underline{Z}_{np} \neq \infty$  эквивалентное активное сопротивление больше  $R_1$ , что связано с передачей энергии от первичной стороны на вторичную. Эквивалентное реактивное сопротивление может быть больше  $X_1$ , если  $X_{II} < 0$  и меньше  $X_1$ , если  $X_{II} > 0$ .

Представим уравнения трансформатора в другой форме, вычитая и добавляя  $j\omega M \underline{I}_1$  и  $j\omega M \underline{I}_2$ :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\underline{I}_1 + j\omega M(\underline{I}_1 + \underline{I}_2), \\ 0 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\underline{I}_2 + j\omega M(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \underline{Z}_{np} \underline{I}_2.\end{aligned}$$

Уравнениям соответствует эквивалентная схема трансформатора, изображенная на рисунке.



Рассмотрим работу трансформатора при  $R_1=R_2=0$  и  $k=1$ .

Тогда

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \\ 0 &= j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 + \underline{U}_2.\end{aligned}$$

Выразим  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$  через  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ :

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \left( -\frac{\underline{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \underline{I}_2 \right) + j\omega M \underline{I}_2 = -\frac{L_1}{M} \underline{U}_2 + j\omega \left( M - \frac{L_1 L_2}{M} \right) \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = -\frac{\underline{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \underline{I}_2.$$

При  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$ ,  $M - \frac{L_1 L_2}{M} = \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} = \frac{L_1 L_2 - L_1 L_2}{M} = 0$ .

Обозначим  $\frac{L_1}{M}$  через  $C$  ( $M = \frac{L_1 L_2}{M}$ ;  $\frac{L_2}{M} = \frac{M}{L_1} = \frac{1}{C}$ ).

$$\underline{U}_1 = -C \underline{U}_2, \quad \underline{I}_1 = -\frac{C \underline{U}_2}{j\omega L_1} - \frac{1}{C} \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{C} \underline{I}_2, \quad \text{т.к.} \quad \frac{L_2}{M} = \frac{1}{C}.$$

Трансформатор, для которого  $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = C$  при любой нагрузке, называется совершенным.

Если дополнительно принять  $L_1 = \infty$  (практически достаточно иметь  $L_1$  достаточно большой, чтобы пренебречь  $\frac{\underline{U}_1}{\omega L_1}$  по сравнению с  $\frac{1}{C} \underline{I}_2$ ), то

$$\underline{U}_1 = -C \underline{U}_2 \quad \text{и} \quad \underline{I}_1 = -\frac{1}{C} \underline{I}_2.$$

Трансформатор, для которого соблюдаются эти условия, называется идеальным. Он преобразует токи и напряжения в определенное число раз независимо от сопротивления приемника.

Для идеального трансформатора

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{\text{ex}} = \frac{-C \underline{U}_2}{-\frac{1}{C} \underline{I}_2} = C^2 \underline{Z}_{\text{np}},$$

т.е. он преобразует сопротивление в определенное число раз, независимо от характера этого сопротивления, что важно при согласовании участков сложных цепей.

Свойствами, близкими к свойства идеального и совершенного трансформаторов, обладают трансформаторы с ферромагнитными сердечниками, с достаточно большим числом витков и большой магнитной проницаемостью ферромагнитного материала.

## ЛЕКЦИЯ №13.

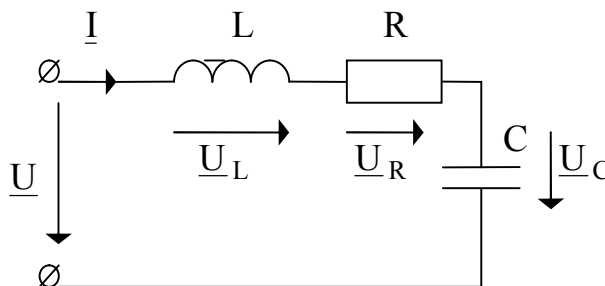
Частотные свойства электрических цепей и резонансные эффекты.

Реактивные сопротивления и проводимости отдельных участков могут быть как положительными, так и отрицательными и, следовательно, складываясь могут взаимно компенсировать друг друга. Поэтому возможны случаи когда, несмотря на наличие в цепи индуктивностей и емкостей, входное реактивное сопротивление или проводимость всей цепи оказываются равными нулю. При этом ток и напряжение совпадают по фазе, а эквивалентное сопротивление всей цепи (или проводимость) будет активным. Такое явление называют резонансным.

На некоторых частных случаях выясним характерные черты этого явления и его связь с так называемыми частотными характеристиками, понимая под ними зависимость от частоты параметров цепи ( $R, X, Z, G, B, Y$ ), а также зависимость величин, определяемых параметрами

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{и т.д.}$$

Резонанс напряжений.



Так называют резонанс при последовательном соединении  $R, L$  и  $C$ , если

$$X = X_L - X_C = 0,$$

т.е.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

При этом угловая частота напряжения сети близка к частоте собственных колебаний контура  $L, C$ :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

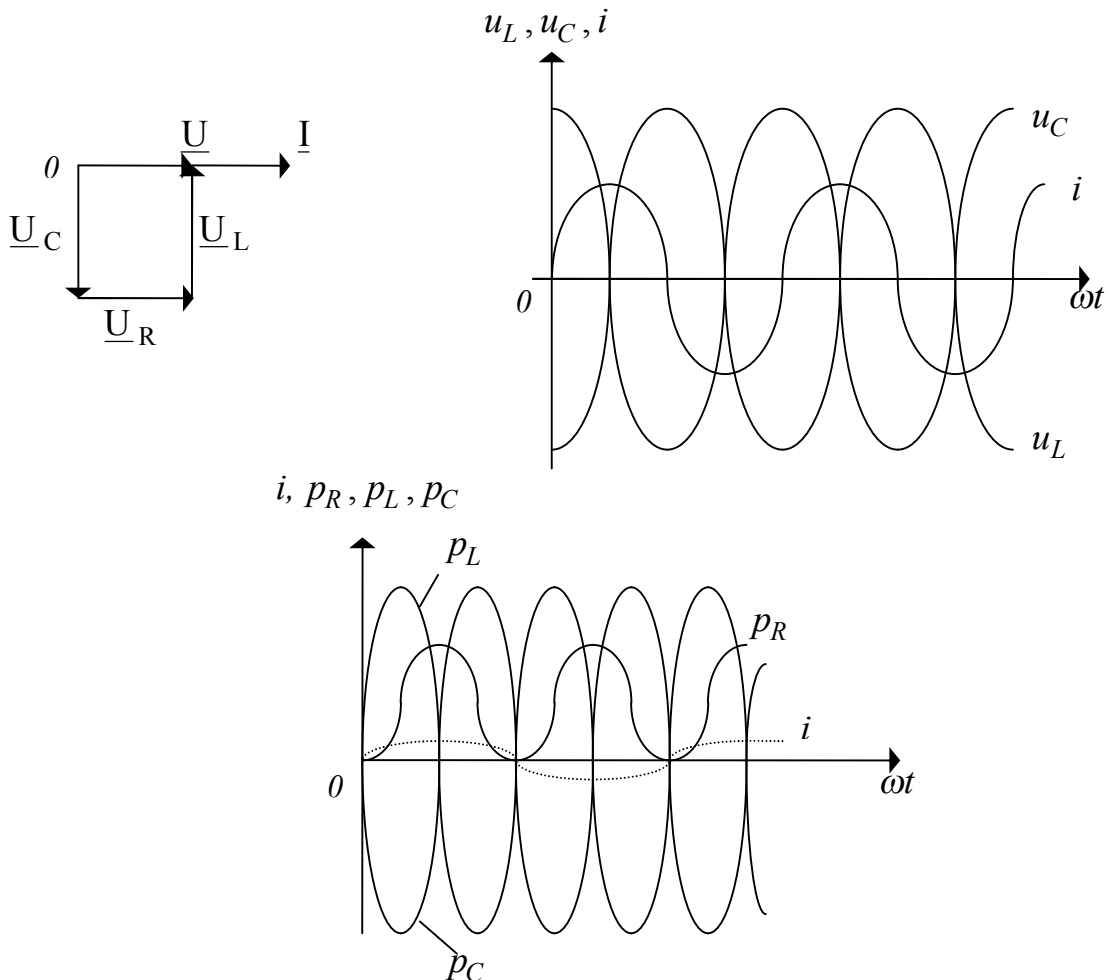
является чисто активным, а

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = X_L = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho.$$

Ток

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}.$$

Ток при резонансе имеет максимальную величину.  $\underline{U}_L$  и  $\underline{U}_C$  и равны по величине, но противоположны по фазе.



Напряжение на реактивных сопротивлениях

$$U_L = \frac{U}{R} X_L = U \frac{\rho}{R}$$

могут быть больше, чем напряжение источника при  $\rho > R$ .

Увеличение магнитной энергии при этом происходит исключительно за счет энергии электрического поля и наоборот.

Отношение

$$\frac{\rho}{R} = Q$$

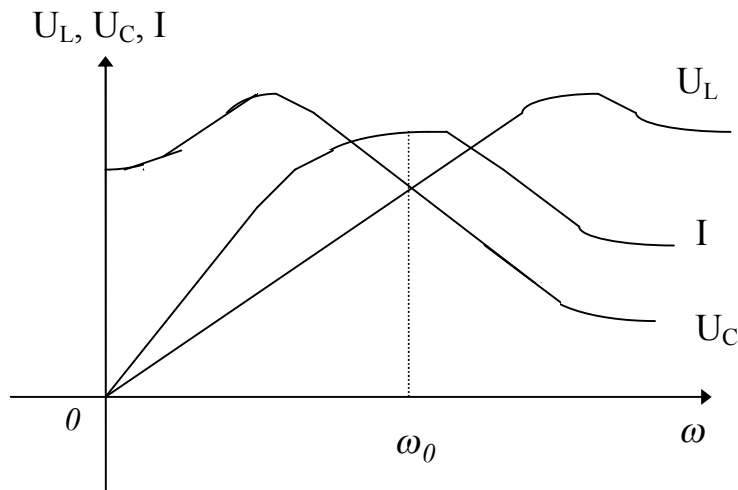
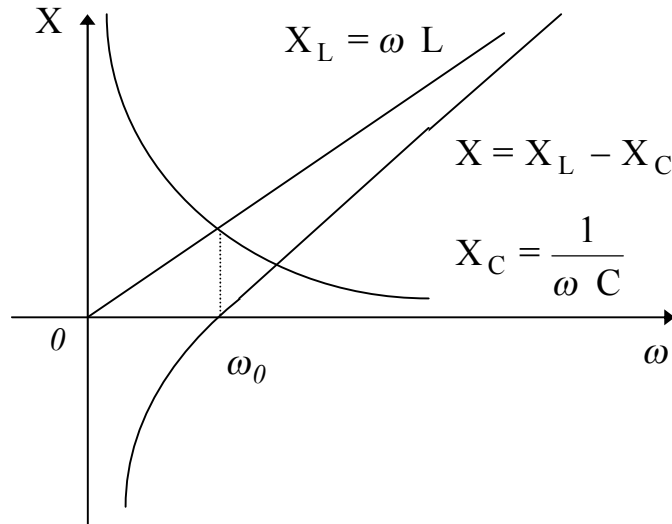
называется добротностью контура.

Обратная величина

$$d = \frac{I}{Q} = \frac{R}{\rho}$$

называется затуханием цепи.

К условиям резонанса можно прийти, изменяя  $\omega$ ,  $L$  или  $C$ . Зависимости  $I$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  от  $\omega$ ,  $L$  или  $C$  называют резонансными кривыми или характеристиками. Зависимости  $X_L$ ,  $X_C$  от частоты называют частотными характеристиками. Из построенных графиков видно, что цепь обладает «избирательными» свойствами, т.е. наименьшим сопротивлением на резонансной частоте.



Часто характеристики строят как функции относительной частоты

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \sqrt{LC}$$

при заданной добротности контура

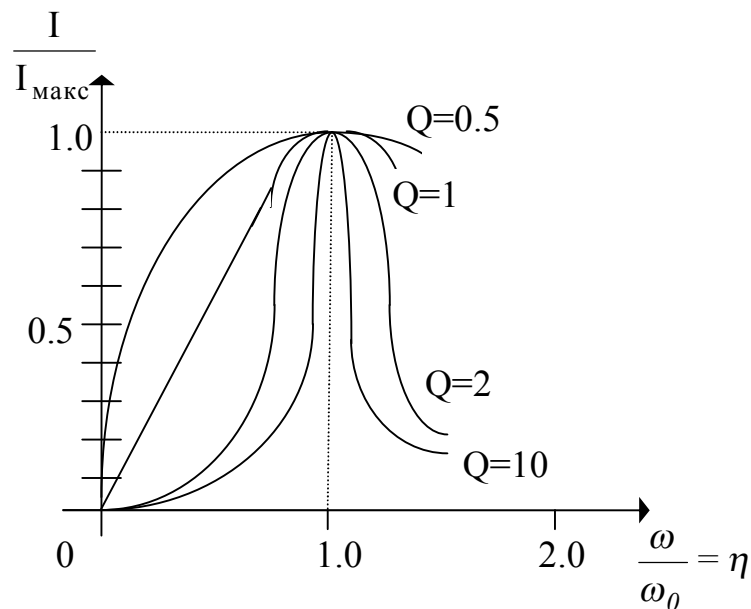
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R}$$

Из

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

введя  $\eta$  и  $Q$ , получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{R\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{R\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\eta\omega_0 L - \frac{1}{\eta\omega_0 C}\right)^2}} = \\ &= \frac{U}{R\sqrt{1 + Q^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}. \end{aligned}$$



Важной характеристикой резонансного контура является ширина резонансной кривой - полоса пропускания

$$\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1,$$

при которой ток в  $\sqrt{2}$  раз меньше  $I_{\max}$ .

Значения  $\eta_1$  и  $\eta_2$  определяются из уравнения тока, если принять

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + Q^2\left(\eta_{1,2} - \frac{1}{\eta_{1,2}}\right)^2},$$

или

$$I = \pm Q \left( \eta_{1,2} - \frac{I}{\eta_{1,2}} \right),$$

где «+» относится к  $\eta_2$ , а «-» - к  $\eta_1$ .

Тогда

$$\eta_2 - \frac{I}{\eta_2} = \frac{I}{Q}, \quad \eta_1 - \frac{I}{\eta_1} = -\frac{I}{Q}.$$

Складывая получим

$$\eta_2 + \eta_1 - \frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 \eta_1} = 0,$$

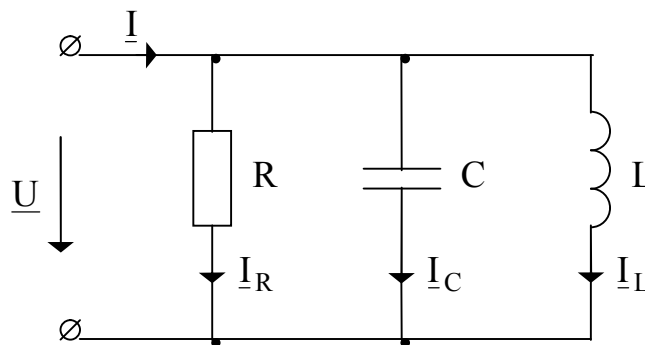
откуда  $\eta_1 \eta_2 = 1$  или  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ .

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\eta_2 - \eta_1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 \eta_1} = \frac{2}{Q}, \quad \eta_2 - \eta_1 = \Delta\eta = \frac{I}{Q} = d,$$

т.е. полоса пропускания равна обратной величине добротности контура.

Резонанс токов.



Так называют резонанс при параллельном соединении  $R$ ,  $L$  и  $C$ , если

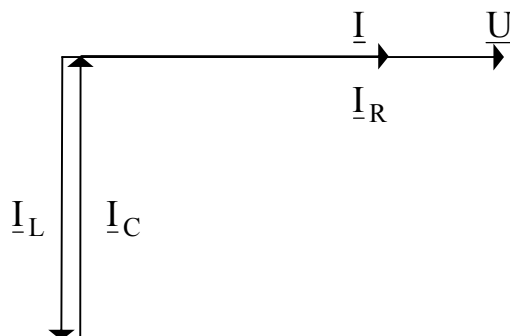
$$B_L - B_C = 0,$$

т.е.  $\frac{I}{\omega L} = \omega C$  и  $\omega = \frac{I}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ .

При этом

$$I = U \sqrt{G^2 + B^2} = U \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = UG = \frac{U}{R},$$

т.е. ток в цепи минимальный, а  $\varphi = 0$ .



Реактивные проводимости

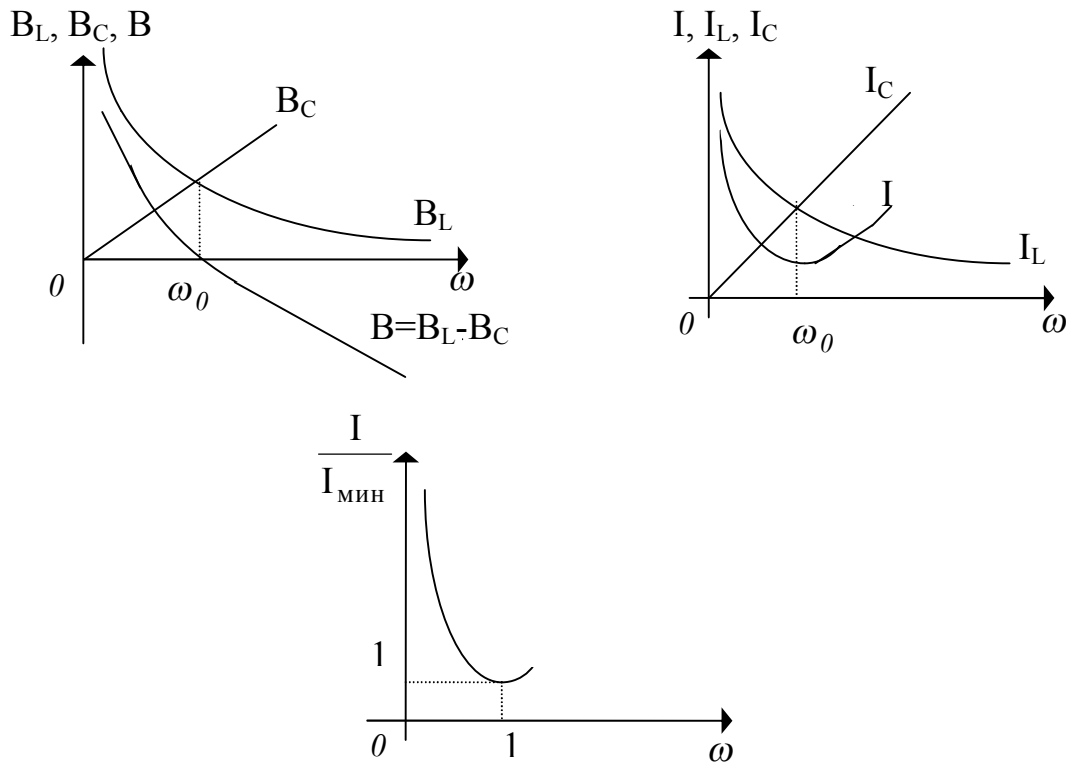
$$\frac{I}{\omega L} = \omega C = \omega_0 C = \frac{C}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{I}{\rho}$$

равны волновой проводимости цепи.

При  $\frac{I}{\rho} > G$

$$\frac{I_L}{I} = \frac{U \frac{I}{\rho}}{UG} = \frac{I}{G} \quad \text{и} \quad I_L > I.$$

Энергетическая сторона процесса такая же, что при резонансе напряжений. Основные характеристики представлены на рисунках.



Из сравнения режима резонансов напряжений и токов видно, что токи во второй цепи ведут себя аналогично напряжениям в первой. Такие цепи называются дуальными.

Заметим, что если исключить из цепи активное сопротивление то ток в неразветвленной части

$$I = U \sqrt{(B_L - B_C)^2} = 0 \quad (\text{при резонансе}).$$



## ЛЕКЦИЯ №14.

### Резонанс в сложных цепях.

В общем случае при резонансе ток и напряжение на зажимах резонансного участка совпадают по фазе, несмотря на наличие реактивных элементов.

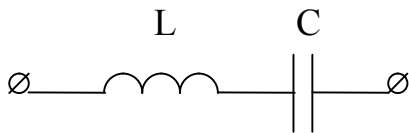
Для отыскания связи между частотой и параметрами цепи при резонансе необходимо найти выражение для реактивного сопротивления  $X$  или для реактивной проводимости  $B$  и приравнять то или другое нулю. Очевидно, что при  $R \neq 0$ , если  $X = 0$ , то и

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = 0.$$

В идеализированных случаях чисто реактивных цепей условия  $X = 0$  и  $B = 0$  не однозначны. Тогда условиями резонанса будут

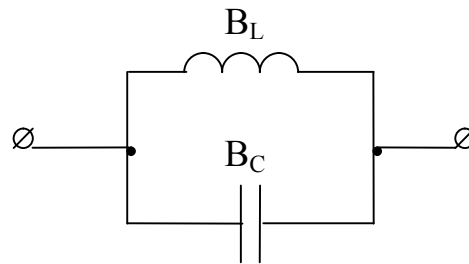
1.  $X = 0$  и  $B = \frac{I}{X} = \infty$  или
2.  $B = 0$  и  $X = \frac{I}{B} = \frac{I}{0} = \infty$ .

Применимость того или иного условия определяется конфигурацией цепи. Например, для простейших цепей



$$X = X_L - X_C = 0$$

$$B = \frac{I}{X} = \infty$$

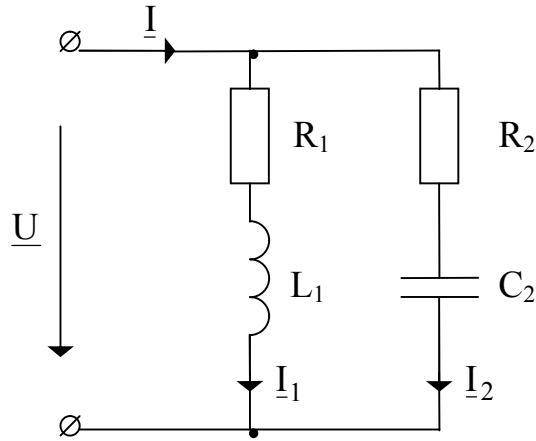


$$B = B_L - B_C = 0$$

$$X = \frac{I}{B} = \infty$$

Рассмотрим случай резонанса при смешанном соединении сопротивлений. Комплексная проводимость

$$\begin{aligned} \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 &= \frac{I}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{I}{R_2 - j\frac{I}{\omega C_2}} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{I}{\omega^2 C_2^2}} - \\ &- j \left( \frac{\omega L_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} - \frac{\frac{I}{\omega C_2}}{R_2^2 + \frac{I}{\omega^2 C_2^2}} \right) = G - jB. \end{aligned}$$



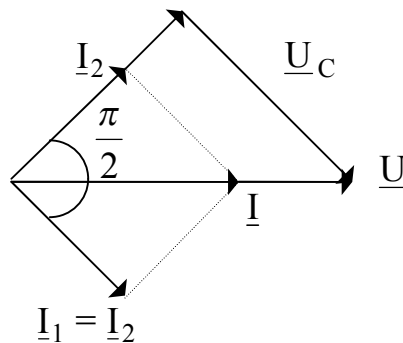
Из условий резонанса при  $B = 0$  получим

$$\omega_0 = \frac{I}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{\frac{L_1}{C_2} - R_1^2}{\frac{L_1}{C_2} - R_2^2}}$$

Такую же зависимость можно получить и приняв  $X = 0$  по уравнению

$$\underline{Z} = \frac{(R_1 + j\omega L_1) \left( R_2 - j \frac{I}{\omega C_2} \right)}{R_1 + R_2 + j \left( \omega L_1 - \frac{I}{\omega C_2} \right)}$$

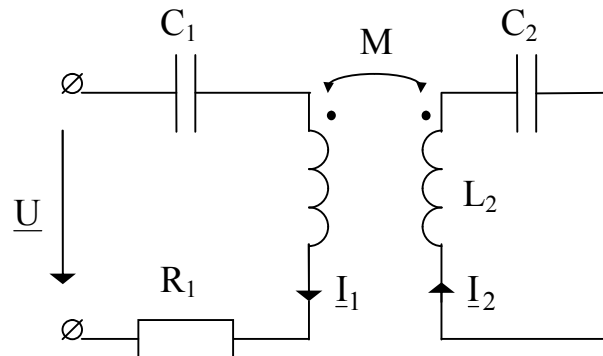
Это условие резонанса отличается от простейшего и совпадает с ним только при  $R_1 = R_2$ .



Энергетическая сторона так же отличается от рассмотренных ранее случаев. При  $R \neq 0$  и  $I \neq 0$ , т.е. в цепь поступает энергия. При этом сумма энергий электрического и магнитного полей не остается постоянной, т.е. имеются промежутки времени, когда энергия от источника переходит в энергию электрического и магнитного полей, имеются так же промежутки времени, когда энергия электрического и магнитного полей преобразуется в тепловую на активных сопротивлениях. Однако, возврата энергии генератору нет. На диаграмме представлен случай когда обмена энергией между полями вообще нет,

т.к.  $\underline{U}_C$  и  $\underline{I}_L$  находятся в фазе, а поэтому  $W_C = \frac{CU_C^2}{2}$  и  $W_L = \frac{Li_L^2}{2}$  одновременно возрастают и убывают.

Резонанс в индуктивно связанных контурах.



Для упрощения задачи будем пренебрегать активным сопротивлением 2-го контура. При отсутствии взаимной индукции резонансные частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Составим уравнения при наличии взаимной индукции

$$\begin{cases} \underline{U} = \left[ R_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2, \\ 0 = -j\omega M \underline{I}_1 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \underline{I}_2. \end{cases}$$

Определим из второго уравнения  $\underline{I}_2$  и подставим в первое:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{j\omega M \underline{I}_1}{j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}, \quad \underline{U} = \left[ R_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \underline{I}_1 - j\omega M \frac{\omega M \underline{I}_1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \\ &= \left[ R_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right) \right] \underline{I}_1 = (R_1 + jX_{1\text{Э}}) \underline{I}_1. \end{aligned}$$

По условию резонанса

$$X_{I\Omega} = 0, \text{ т.е. } \omega L_1 - \frac{I}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{I}{\omega C_2}} = 0,$$

или 
$$\left(\omega L_1 - \frac{I}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{I}{\omega C_2}\right) = \omega^2 M^2.$$

Разделим обе части на  $\omega L_1 \cdot \omega L_2$ .

Тогда

$$\left(1 - \frac{I}{\omega^2 L_1 C_1}\right)\left(1 - \frac{I}{\omega^2 L_2 C_2}\right) = \frac{M^2}{L_1 L_2},$$

$$\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right) = k^2, \text{ где } k < 1.$$

Определим резонансную частоту

$$\left(\omega_{рез}^2 - \omega_1^2\right)\left(\omega_{рез}^2 - \omega_2^2\right) = \omega_{рез}^4 \cdot k^2,$$

или 
$$\omega_{рез}^4 (1 - k^2) - \omega_{рез}^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0.$$

Резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_1^2 \omega_2^2}}{2(1 - k^2)}}.$$

Если оба контура предварительно настроены на одинаковую частоту

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0,$$

то

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 4\omega_0^4(1 - k^2)}}{2(1 - k^2)}} = \sqrt{\frac{2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 k^2}}{2(1 - k^2)}}.$$

Или окончательно

$$\omega_{рез} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 \pm k^2}{1 - k^2}},$$

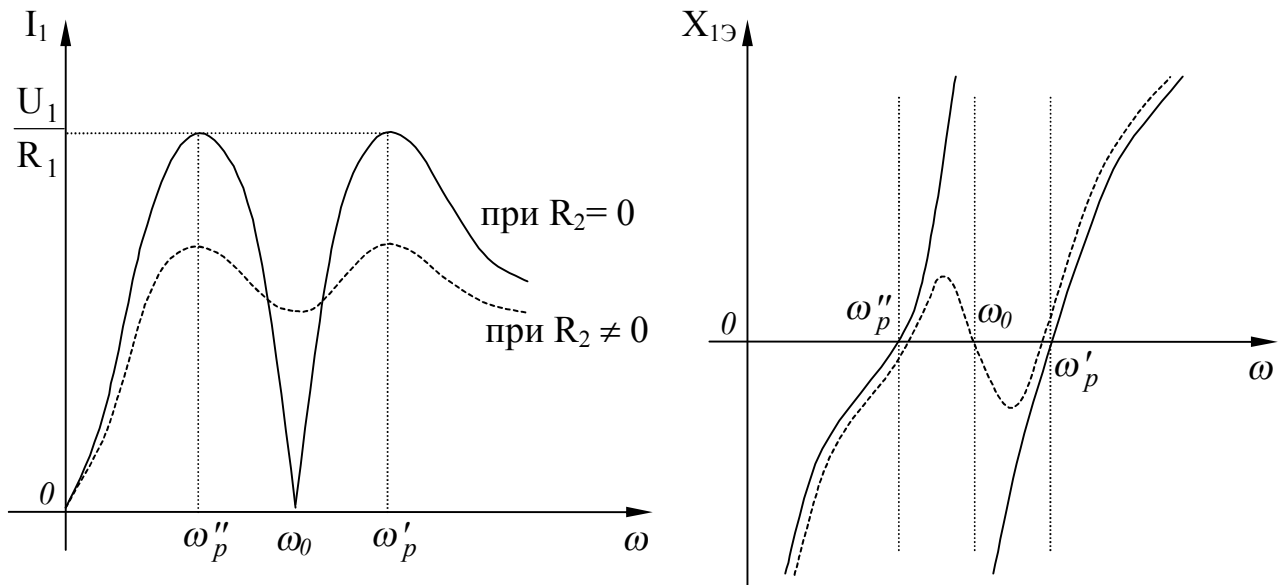
т.е.

$$\omega'_{рез} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad \omega''_{рез} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

При  $\omega = \omega_0$  эквивалентное реактивное сопротивление  $X_{I\Omega} = \infty$  и  $I_1 = 0$ .

При  $\omega = \omega_0$  и при  $Z_2 = 0$ ,  $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0$ . Из второго уравнения

следует, что при конечном значении тока  $I_2$  эдс  $j\omega M I_1$ , т.е.  $I_1 = 0$ . Ток  $I_2$  устанавливается таким, чтобы эдс уравновесила бы приложенное напряжение (уравнение 1). Этот случай аналогичен резонансу токов в контуре без потерь.



На характеристиках пунктиром нанесены их вид при  $R_2 \neq 0$ .

## ЛЕКЦИЯ №15.

### Круговые диаграммы цепей переменного тока.

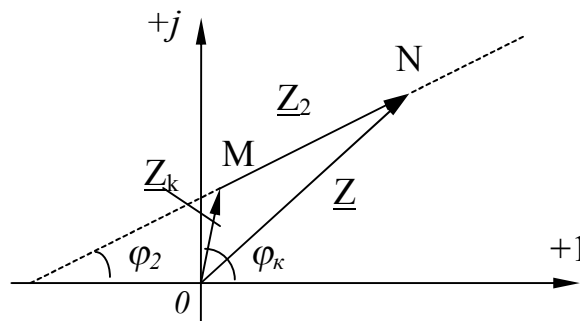
При анализе цепей часто важно знать, как изменяется модуль и аргумент комплексных тока и напряжения в зависимости от изменения параметров цепи. Для решения подобного рода задач широко применяются круговые диаграммы.

При этом необходимо построить годографы (геометрические места) концевых точек векторов, изображающих комплексные величины. В общем случае годографы имеют сложную форму. В простых случаях они представляют прямые линии или окружности.

Например, при последовательном соединении комплексных сопротивлений  $\underline{Z}_k = Z_k e^{j\varphi_k}$  и  $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2}$ , если  $\underline{Z}_k$ ,  $\varphi_k$  и  $\varphi_2$  неизвестны, а модуль  $Z_2$  сопротивления  $\underline{Z}_2$  изменяется от 0 до  $\infty$ , комплексное сопротивление ветви

$$\underline{Z} = \underline{Z}_k + \underline{Z}_2 = \underline{Z}_k + Z_2 e^{j\varphi_2}$$

изменяется так, что годограф на комплексной плоскости получается в виде прямой линии.



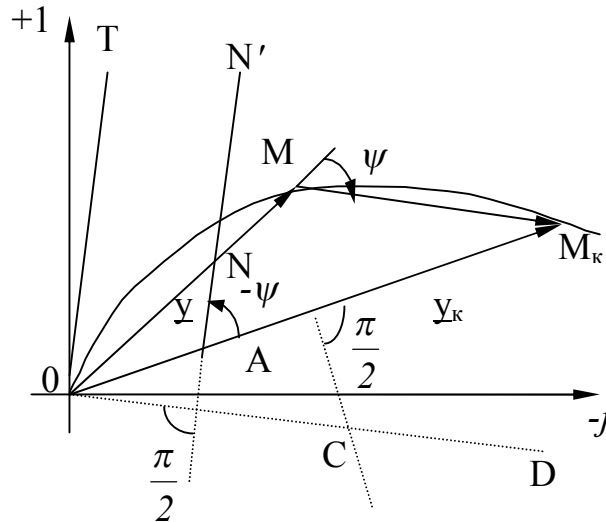
Комплексная проводимость этой ветви

$$\underline{Y} = \frac{I}{\underline{Z}_k + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{I}{\underline{Z}_k}}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_k}} = \frac{\underline{Y}_k}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_k} e^{j(\varphi_2 - \varphi_k)}}.$$

Обозначим  $\varphi_2 - \varphi_k$  через  $\psi$  и перепишем уравнение в виде:

$$\underline{Y} + \underline{Y} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_k} e^{j\psi} = \underline{Y}_k.$$

Рассматривая это уравнение как векторное, замечаем, что сумма двух изменяющихся по величине и по направлению векторов  $\underline{Y}$  и  $\underline{Y} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_k} e^{j\psi}$ , а также угол между ними не изменяются. Это возможно только в случае, если годограф конца вектора  $\underline{Y}$  представляет собой окружность с хордой  $OM_k$ . На рисунке показан годограф при  $\psi < 0$ .



При  $Z_2 = 0$  конец вектора  $\underline{Y}$  совпадает с точкой  $M_k$  ( $\underline{Y} = \underline{Y}_k$ ); при  $Z_2 = \infty$  - с точкой  $O$  ( $Y = 0$ ). Центр окружности можно найти, исходя из следующих соображений.

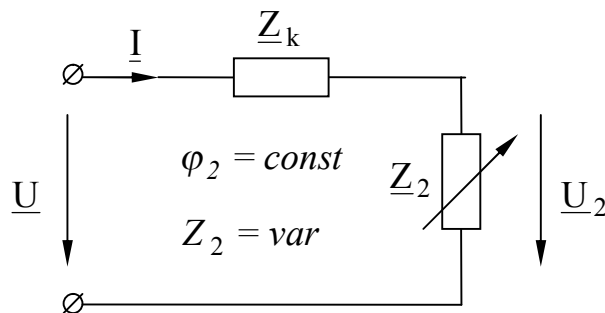
Отложим из  $O$  по направлению хорды отрезок  $OA$ , равный в некотором масштабе  $Z_k$ . Из его конца проведем линию  $AN'$  под углом  $-\psi = \varphi_k - \varphi_2$  к  $OA$ .

Очевидно, что  $\triangle OAN \in \triangle OMM_k$ , т.е.

$$\frac{AN}{OA} = \frac{MM_k}{OM} = \frac{Z_2}{Z_k},$$

или если  $OA$  изображает  $Z_k$ , то  $AN$  в том же масштабе изображает  $Z_2$ . Следовательно  $AN'$  - линия переменного параметра. Отложив по ней  $Z_2$  и соединив  $O$  и  $N$ , для любого  $Z_2$  можно определить  $OM$ . При увеличении  $Z_2$  точка  $M$  приближается к  $O$ . В пределе при  $Z_2 \rightarrow \infty$  вектор  $\underline{Y} = 0$ , а точка  $M$  сольется с  $O$ . При этом секущая  $ON$  становится касательной  $OT$ , а  $ON$  будет параллельна  $OT$ . Поэтому перпендикуляр  $OD$  к  $AN'$  является также перпендикуляром к  $OT$ , т.е. совпадает по направлению с диаметром. Его пересечение со вторым диаметром - перпендикуляром к середине хорды  $OM_k$  определяет центр окружности.

Рассмотрим теперь простую электрическую цепь из последовательно соединенных  $\underline{Z}_k$  и  $\underline{Z}_2$ .



Напряжение и ток связаны соотношениями:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}, \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}, \quad \text{где } \underline{Z} = \underline{Z}_k + \underline{Z}_2, \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

Если цепь присоединена к источнику тока  $\underline{J} = \underline{I} = const$ , то напряжение  $\underline{U}$  изменится по закону, совпадающему с законом изменения  $\underline{Z}$ . Годографом конца вектора  $\underline{U}$ , будет в этом случае прямая линия. Если же цепь подключена к источнику напряжения  $\underline{U} = const$ , то при изменении  $Z_2$  ток  $\underline{I}$  изменится по закону, совпадающему с законом изменения комплексной проводимости.

Годограф вектора  $\underline{I}$  - окружность которую строят следующим образом.

В масштабе  $m_u$  на комплексной плоскости откладываем вектор  $\underline{U}$  (на рисунке принят действительным числом).

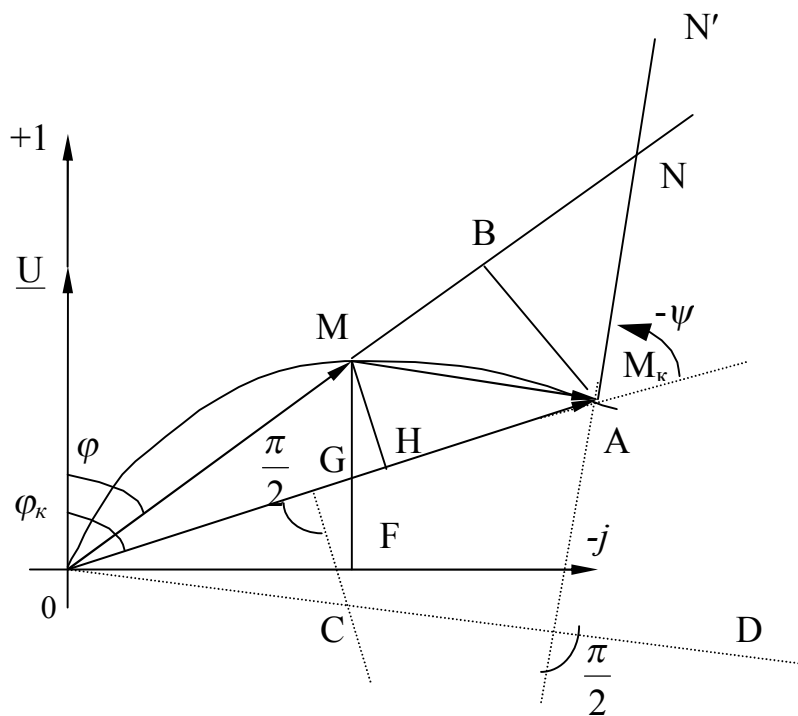
Вычисляем

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_k} = \frac{U}{Z_k} e^{-j\varphi_k}$$

и проводим  $OM_k$  - хорду окружности в масштабе  $m_I$ .

Выбираем  $m_z$  и откладываем

$$OA = \frac{Z_k}{m_z}.$$



Из точки  $A(M_k)$  под углом

$$-\psi = \varphi_k - \varphi_2$$

к  $OM_k$  (или ее продолжению) проводим линию переменного параметра  $AN'$ . Из точки  $O$  проводим  $OD$  перпендикулярно  $AN'$ . Из середины хорды  $OM_k$  восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с  $OD$  в точке  $C$  - центре окружности.



Проводим дугу окружности по ту сторону от хорды, куда направлена линия  $AN$

Для любого  $Z_2$  ток определится, если отложить по  $AN'$  отрезок  $AN = \frac{Z_2}{m_Z}$

и точку  $N$  соединить с точкой  $O$ .

Напряжение на постоянном сопротивлении

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I} = Z_k \underline{I} e^{j\varphi_k}$$

пропорционально току. Поэтому  $OM$  в другом масштабе изображает модуль  $U_k$  (но не фазу!). Масштаб  $\underline{U}_k$  определим при коротком замыкании переменного сопротивления ( $\underline{Z}_2 = 0$ ). Тогда  $OM$  становится  $OM_k$  и  $\underline{U}_k = \underline{U}$ . Следовательно,

$$m_{U_k} = \frac{U}{OM_k}$$

Отрезок  $MM_k$  в том же масштабе определяет модуль (но не фазу!) напряжения  $\underline{U}_2$ , так как

$$\underline{U}_k + \underline{U}_2 = \underline{U}.$$

Длина перпендикуляра  $MF$  определяет активную мощность цепи, т.к.

$$P = UI \cos \varphi = Um_I OM \cos \varphi = Um_I MF = m_P MF.$$

Отрезок  $OF$  в том же масштабе изображает реактивную мощность, т.к.

$$Q = UI \sin \varphi = Um_I OM \sin \varphi = Um_I OF = m_P OF.$$

Мощности  $P_2$ ,  $Q_2$  и  $S_2$  могут определяться отрезком  $MG$  или  $MH$ . В самом деле, опустив перпендикуляр на  $ON'$ , имеем площадь треугольника  $OMM_k$ :

$$\begin{aligned} S_{\Delta OMM_k} &= \frac{1}{2} OM \cdot BM_k = \frac{1}{2} OM \cdot MM_k \sin \angle M_k MB = \\ &= \frac{1}{2} \frac{I}{m_I} \frac{U_2}{m_{U_2}} \sin \angle M_k MB = \frac{\sin \angle M_k MB}{2m_I m_{U_2}} S_2, \end{aligned}$$

т.е. площадь треугольника пропорциональна полной мощности, т.к.  $\sin \angle M_k MB = \text{const}$ . Но  $P_2 = S_2 \cos \varphi_2$ , а  $Q_2 = S_2 \sin \varphi_2$ . Поэтому при постоянстве  $\varphi_2$  эти же отрезки выражают также  $P_2$  и  $Q_2$ .

Масштабы определяются по частному режиму.

Этот же способ построения круговой диаграммы может быть применен и для разветвленных цепей, если выразить ток одной из ветвей с помощью теоремы об активном двухполюснике в виде:

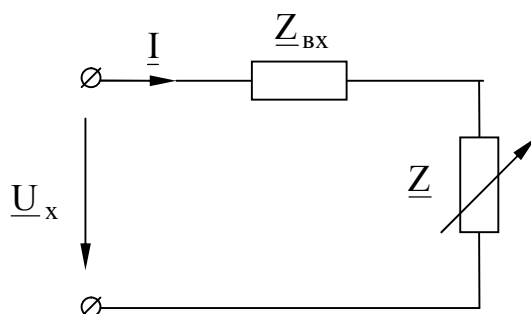
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_x}{\underline{Z}_{\text{вх}} + \underline{Z}},$$

т.е.

$$\underline{I} + \underline{I} \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} e^{j(\varphi - \varphi_{\text{вх}})} = \underline{I}_k,$$

где

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_x}{\underline{Z}_{\text{BX}}}$$



Подобным приемом задача построения диаграммы сводится к неразветвленной цепи, аналогично рассмотренной.

## ЛЕКЦИЯ №16.

### Трехфазный переменный ток.

#### Многофазные и трехфазные системы.

Многофазной называется система эдс одной частоты, сдвинутых по фазе на углы, в сумме составляющие  $2\pi$ . Если амплитуды эдс отдельных фаз равны друг другу, а сдвиг фаз между двумя любыми смежными эдс равен  $\frac{2\pi}{m}$  ( $m$  - число фаз системы), то многофазная система называется симметричной.

Наибольшее распространение получила общепринятая во всем мире трехфазная система. Генератор трехфазного тока отличается от однофазного тем, что в нем на статоре размещена не одна, а три обмотки так, чтобы наводимые в них эдс были бы смещены по фазе на  $120^\circ$ .

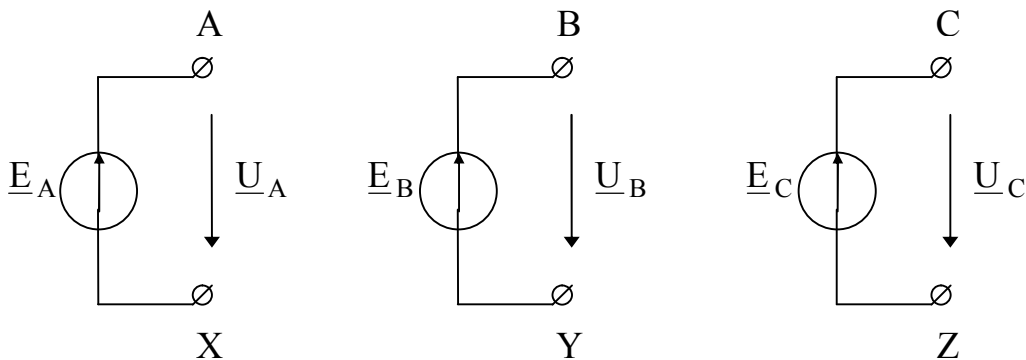
Если принять

$$e_A = E_m \sin \omega t,$$

то

$$e_B = E_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right),$$

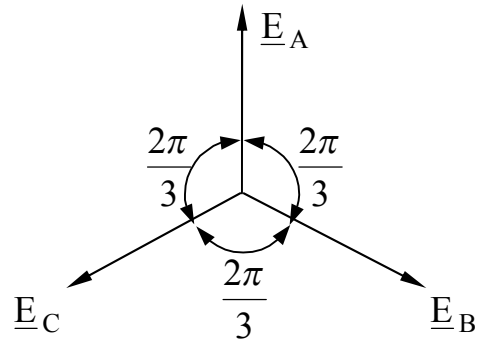
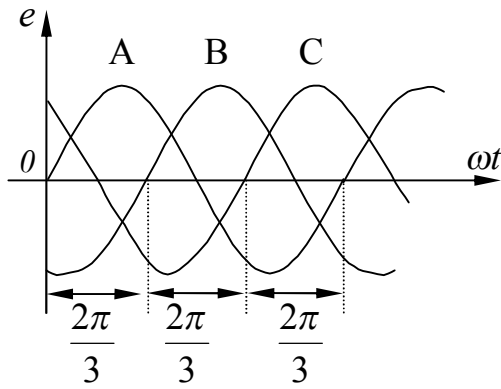
$$e_C = E_m \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) = E_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$



Каждую из обмоток можно рассматривать как независимый однофазный генератор. При этом за положительное направление эдс в обмотке генератора принимается направление от конца ( $X, Y, Z$ ) к началу ( $A, B, C$ ), а сами фазы сокращенно именуются  $A, B, C$ .

Система трех эдс может быть представлена на волновой и векторной диаграммах, а также записана в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \underline{E}_A &= E, \\ \underline{E}_B &= \underline{E}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{j\frac{4\pi}{3}} = E e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \\ \underline{E}_C &= \underline{E}_A e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E e^{j\frac{2\pi}{3}} = E e^{-j\frac{4\pi}{3}}. \end{aligned}$$



Если обозначить  $e^{j\frac{2\pi}{3}} = a$ ,  
 то  $\underline{E}_A = E$ ,  $\underline{E}_B = \underline{E}_A a^2 = E a^2$ ,  $\underline{E}_C = \underline{E} a$ ,  
 где  $a$  - фазный множитель трехфазной системы.

Можно легко убедиться, что

$$1 + a^2 + a = 0.$$

В самом деле

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a^2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

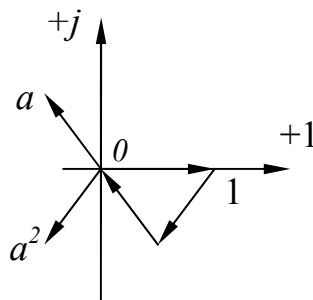
Тогда с учетом

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1$$

получим

$$a^3 + a^2 + a = 1 + a^2 + a = 0.$$

В этом же можно убедиться построением системы единичных векторов, соответствующих  $a$ ,  $a^2$  и  $a^3$ . Построение выполнено на рисунке.



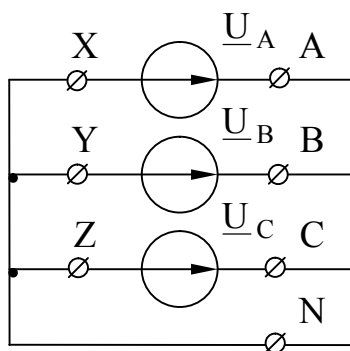
Если каждая обмотка генератора является самостоятельным источником энергии и замыкается на свой приемник энергии, то система называется несвязанной. В этом случае расчет каждой фазы выполняется независимо от остальных ранее изученными способами расчета цепей однофазного переменного тока.

На практике применяются связанные цепи. Как будет далее показано, при симметричной нагрузке расчет может быть сведен к независимому расчету одной фазы. Несимметричные цепи рассчитывают как цепи с несколькими источниками.

Все основные звенья трехфазных цепей были разработаны М.О. Доливо-Добровольским (1862 - 1919 г.г.). Они оказались более простыми, надежными и экономичными, что и предопределило их повсеместное распространение.

### Соединения генераторов трехфазного тока в «звезду» и в «треугольник».

При соединении звездой концы фазных обмоток соединяются в общую точку - нейтраль.  $A, B, C$  образуют фазные провода, а  $X, Y, Z$  - нейтральный провод. Напряжение между фазными проводами называют линейными, а между любым фазным проводом и нейтральным - фазным.



При симметричной системе любое линейное напряжение в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного. Например,

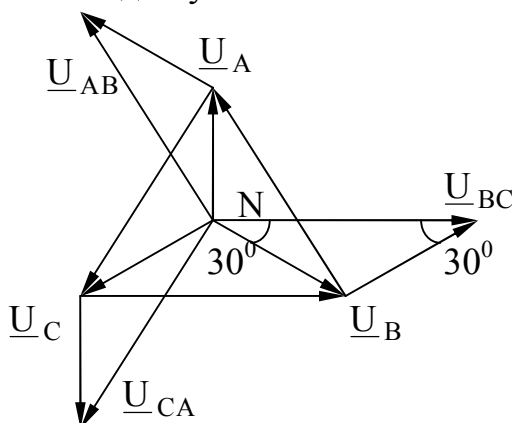
$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_A (a^2 - a) = \underline{U}_A \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -j\sqrt{3}\underline{U}_A.$$

Аналогично

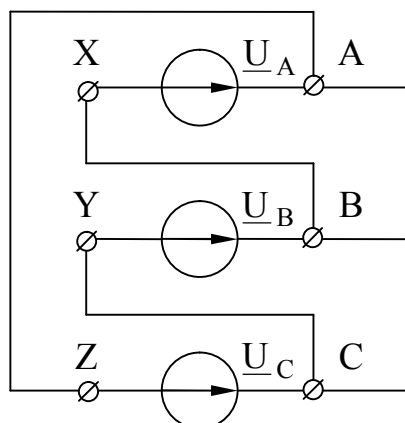
$$\underline{U}_{CA} = -j\sqrt{3}\underline{U}_B,$$

$$\underline{U}_{AB} = -j\sqrt{3}\underline{U}_C.$$

Указанные соотношения наглядно устанавливаются и из векторной диаграммы.



При соединении в треугольник последовательно соединяются начало последующей фазной обмотки с концом предыдущей.



Как следует из схемы при этом фазные и линейные напряжения равны:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A, \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B, \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C.$$

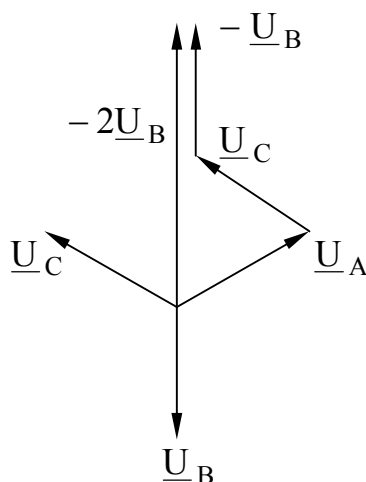
Хотя контур при этом замкнут, при отсутствии нагрузки тока в нем нет, так как

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = \underline{U}_A + a^2 \underline{U}_A + a \underline{U}_A = \underline{U}_A (1 + a + a^2) = 0.$$

Разумеется, неправильное соединение может быть опасным для генератора. Например, при неправильном включении фазы  $B$  в контуре генератора действует:

$$\underline{U}_A - \underline{U}_B + \underline{U}_C = \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C - 2\underline{U}_B = -2\underline{U}_B.$$

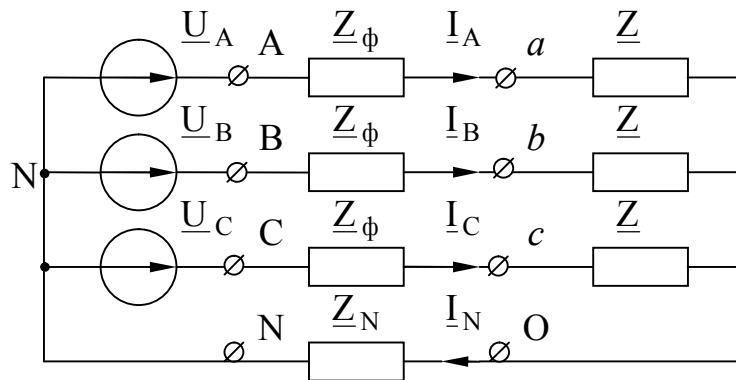
В этом можно убедиться также с помощью векторной диаграммы.



Симметричная трехфазная цепь.

Потребители энергии могут также соединяться звездой или треугольником. При этом если сопротивления всех трех приемников одинаковы, то нагрузку называют симметричной или равномерной.

### Звезда - звезда.



На основании метода узловых потенциалов напряжения  $O$  и  $N$  :

$$\underline{U}_{ON} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_\phi + \underline{Z}} = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C,$$

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Так как нагрузка симметрична, то

$$\underline{U}_{ON} = \frac{\underline{Y}_A (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C)}{3\underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0.$$

Тогда  $\underline{I}_N = 0$  и нейтральный провод не нужен. Поэтому трехфазные электродвигатели, обеспечивающие симметричную нагрузку фаз, подключаются тремя проводами.

Токи в фазных проводах:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_{ON}}{\underline{Z}_\phi + \underline{Z}} = \underline{U}_A \underline{Y}_A,$$

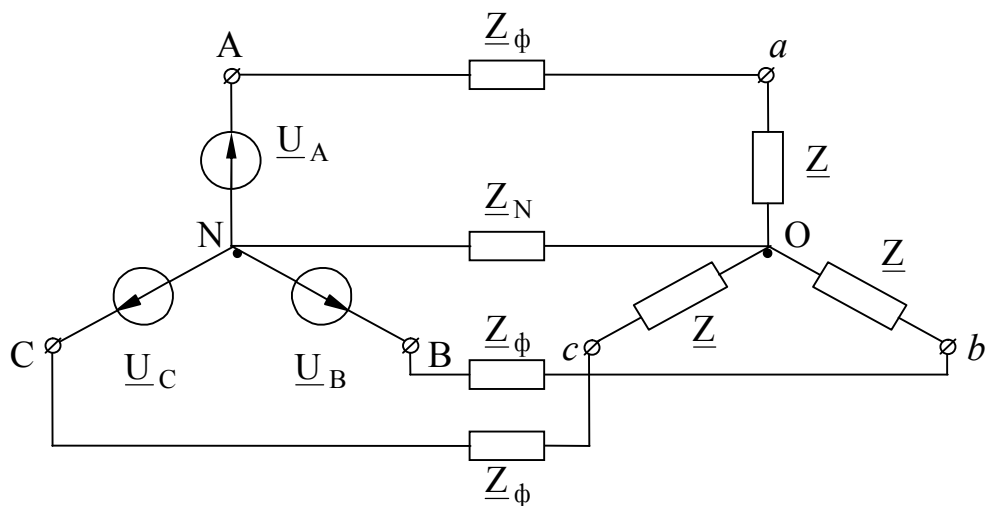
$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{ON}}{\underline{Z}_\phi + \underline{Z}} = \underline{U}_B \underline{Y}_A = a^2 \underline{I}_A,$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_{ON}}{\underline{Z}_\phi + \underline{Z}} = \underline{U}_C \underline{Y}_A = a \underline{I}_A$$

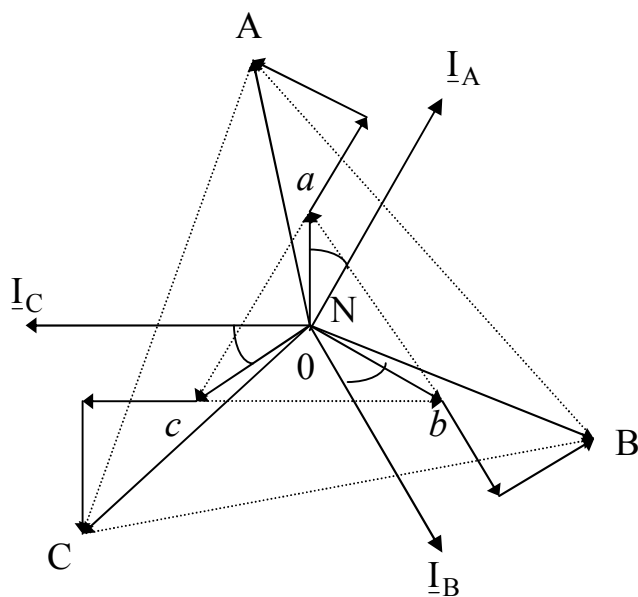
одинаковые по величине и последовательно смещены по фазе на  $120^\circ$ , то есть

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

Цепь часто изображают на схемах иным способом, что представлено на рисунке.



На следующем рисунке изображена топографическая диаграмма рассматриваемого случая, на которой выделены треугольники падений напряжений в фазных проводах. Пунктиром обозначены линейные напряжения.



Звезда - треугольник.

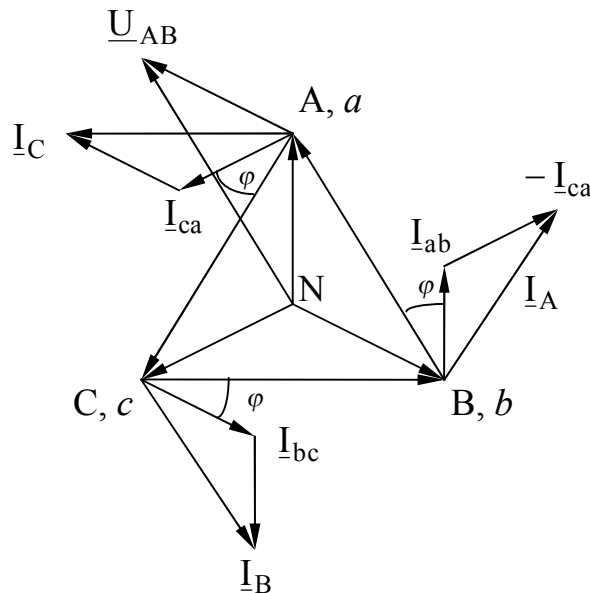
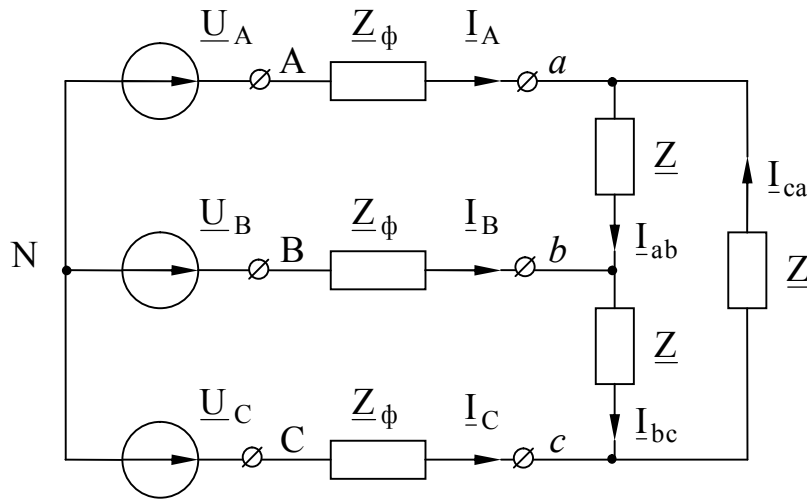
Если  $\underline{Z}_\phi = 0$ , то

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}},$$



$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}}.$$



Ввиду симметрии токи одинаковы по модулю, смещены один относительно другого на  $120^\circ$  и отстают (или опережают) от своих напряжений на одинаковые углы  $\varphi$ .

Токи в фазных проводах находятся по 1-му закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

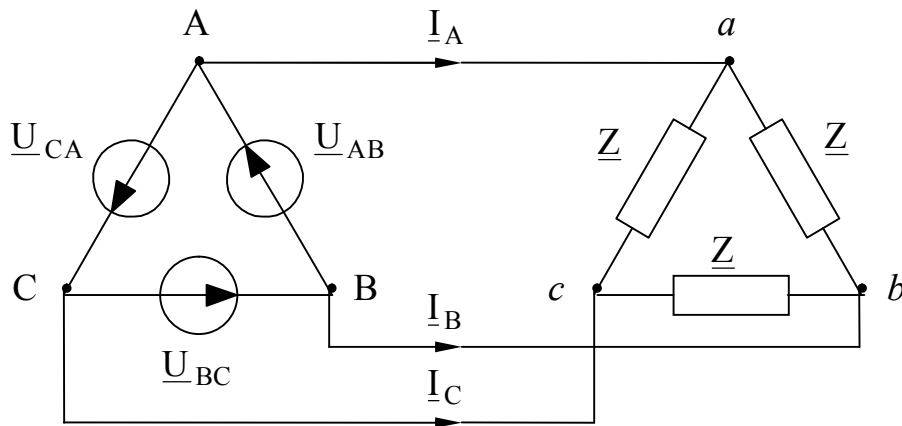
По модулю линейные токи (токи в фазных проводах) в  $\sqrt{3}$  раз больше токов в сопротивлениях сторон (фазах) треугольника.

Если  $\underline{Z}_\phi \neq 0$ , то следует предварительно преобразовать треугольник сопротивлений в звезду

$$\underline{Z}_Y = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3}$$

и привести расчет к ранее рассмотренному случаю.

Треугольник - треугольник.



В этом случае каждая обмотка генератора включена непосредственно на соответствующее сопротивление приемника (при  $\underline{Z}_\phi = 0$ ). Тогда

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}}.$$

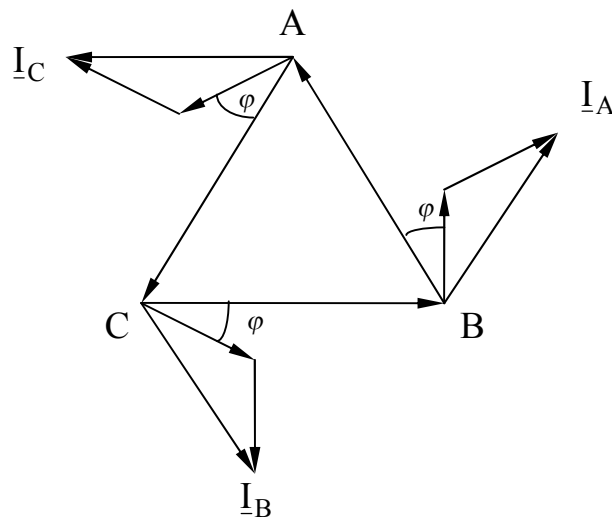
и при симметричных напряжениях система фазных токов приемника симметрична.

По 1-му закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$



Из уравнений и векторной диаграммы следует, что система линейных токов также симметрична; по модулю линейные токи в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных.

В расчетной практике обычно удобнее (особенно при наличии в линии сопротивлений) предварительно преобразовать треугольник в эквивалентную звезду.

## ЛЕКЦИЯ №17.

### Несимметричная трехфазная цепь.

При расчете таких цепей применяются общие методы расчета разветвленных цепей с несколькими эдс. Необходимо учитывать, что такой расчет применим при отсутствии вращающихся машин, так как эквивалентное сопротивление последних зависит от степени несимметрии приложенного напряжения.

Звезда - звезда.

Пользуясь изображенной ранее для этого случая схемой и приняв

$$\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c,$$

получим  $\underline{U}_{ON} \neq 0$ , то есть между нулевыми точками появляется напряжение-смещение нейтрали. Тогда токи

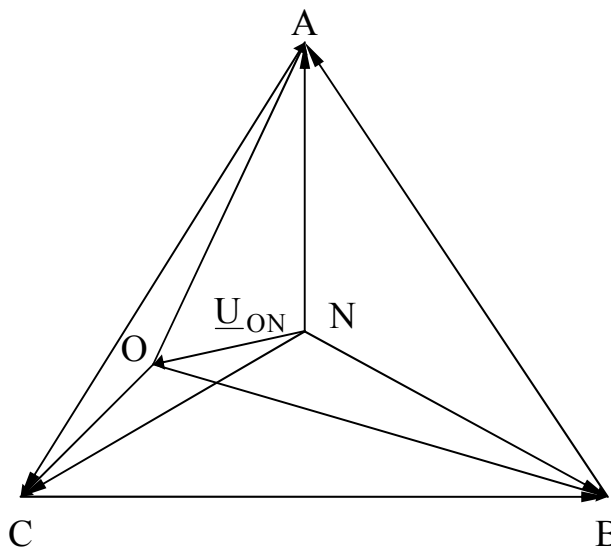
$$\underline{I}_A = (\underline{U}_A - \underline{U}_{ON}) \underline{Y}_A,$$

$$\underline{I}_B = (\underline{U}_B - \underline{U}_{ON}) \underline{Y}_B,$$

$$\underline{I}_C = (\underline{U}_C - \underline{U}_{ON}) \underline{Y}_C,$$

$$\underline{I}_N = \underline{U}_{ON} \underline{Y}_N.$$

Если нулевой провод отсутствует, то  $\underline{I}_N = 0$ .



Топографическая диаграмма наглядно характеризует возникающий при этом режим работы приемника и генератора.

Другие способы соединения.

Когда нагрузка соединена в треугольник и линейные напряжения известны, ток в каждой ветви находится сразу по закону Ома, а линейные токи - по I-му закону Кирхгофа. Если же между генератором и приемником включены

сопротивления линии, то целесообразно преобразовать треугольник в звезду, что приводит цепь к только что рассмотренной схеме.

Мощность цепей трехфазного тока.

Мгновенная мощность приемника при соединении звездой:

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Средняя за период или активная мощность:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C,$$

т.е. равна сумме мощностей фаз.

При симметричной нагрузке

$$p_A = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi),$$

$$p_B = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \frac{U_m I_m}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right),$$

$$p_C = U_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \frac{U_m I_m}{2} \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right).$$

Их сумма

$$p_A + p_B + p_C = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Таким образом при симметричной нагрузке фаз

$$p = P = 3P_\phi.$$

Система, обладающая таким свойством, называется уравновешенной.

Установленные соотношения можно получить и при соединении приемников треугольником. В общем случае симметричной нагрузки

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi,$$

или, учитывая, что при любом способе соединения приемников энергии

$$U_\phi I_\phi = \frac{U_L I_L}{\sqrt{3}},$$

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} U I \cos \varphi,$$

где индекс «*L*» (линейные величины) обычно опускается.

По аналогии реактивная мощность

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C$$

или при симметричной нагрузке

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3} U I \sin \varphi.$$

Полная мощность при симметричной нагрузке

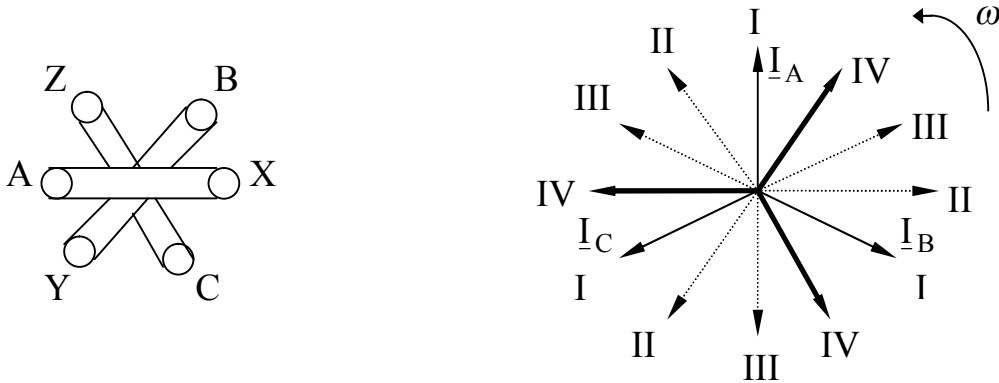
$$S = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3} \cdot U I,$$

а  $\frac{P}{S} = \cos \varphi, \quad \frac{Q}{S} = \sin \varphi, \quad \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi.$

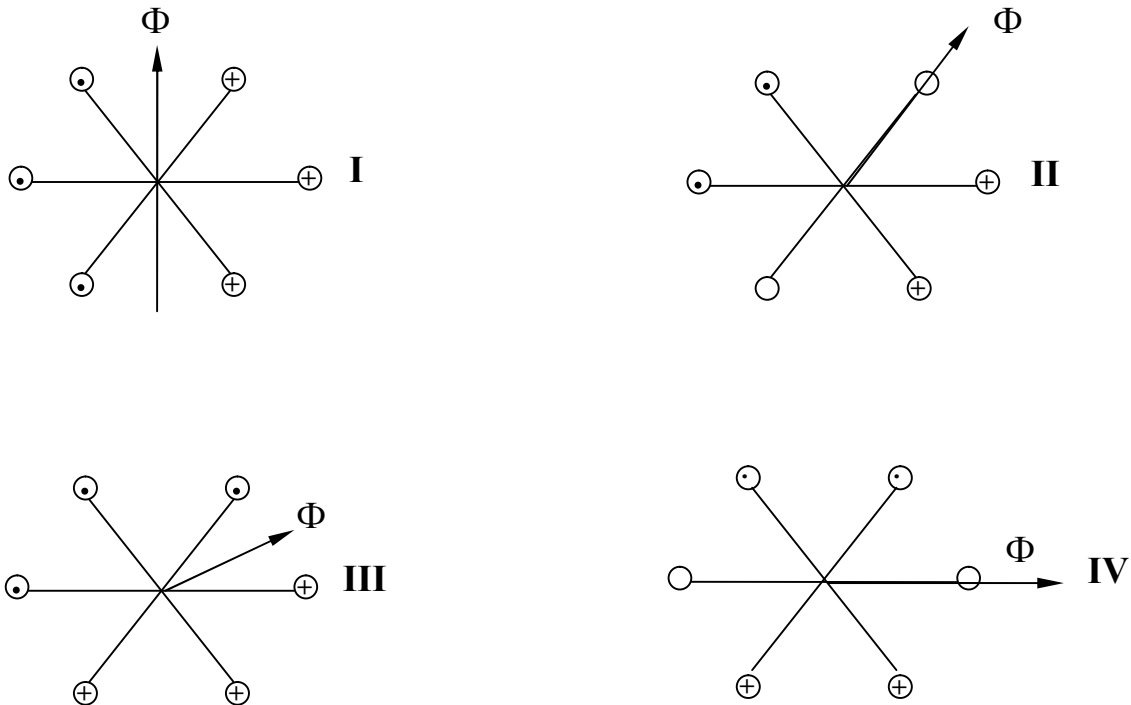
## Вращающееся магнитное поле при трехфазном токе.

Возможность получения вращающегося магнитного поля была установлена в 1884 г. Феррарисом. На этой основе в 1889 г. М.О. Доливо-Добровольским был сконструирован асинхронный трехфазный двигатель.

Для пояснения принципа возникновения вращающегося поля рассмотрим систему 3-х катушек, смещенных на  $120^\circ$  относительно друг друга, и питаемых токами, сдвинутыми по фазе на  $120^\circ$ .



Пусть в начальный момент отсчета времени токи в катушках характеризуются положением I рисунка и диаграммы. При этом для положительных токов принято направление от конца к началу. Сложив потоки катушек, можно определить направление результирующего потока.

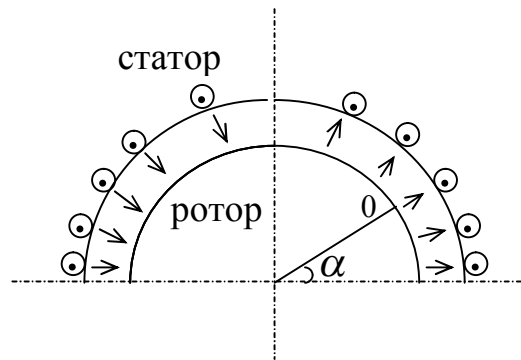


По истечении некоторого времени мгновенные значения токов в катушках могут быть получены по диаграмме (положение II). Дальнейшее рассмотрение токов на диаграмме и рисунков III, IV показывает, что магнитный поток вращается по часовой стрелке. Направление вращения зависит от последова-

тельности фаз токов в катушках. Если поменять местами зажимы подключения любых двух токов, то направление вращения потока изменится на обратное.

Более детальное рассмотрение показывает, что для получения вращающегося магнитного потока необходимо иметь не менее двух катушек, смещенных на какой-либо геометрический угол, и питаемых токами, не совпадающими по фазе.

Для определения величины результирующего потока рассмотрим электрическую машину, на статоре которой размещена обмотка.



Если питать ее постоянным током, то в зазоре имеет место магнитная индукция

$$B_0 = B_m \cos \alpha .$$

При питании этой же катушки переменным током поле становится пульсирующим:

$$B = B_0 \cos \omega t = B_m \cos \omega t \cos \alpha = \frac{1}{2} B_m \cos(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2} B_m \cos(\omega t + \alpha) .$$

Если же на статоре разместить три такие обмотки, смещенные на  $120^\circ$  и питаемые токами со сдвигом по фазе в  $120^\circ$ , то они создадут в точке  $\theta$  индукцию:

$$\begin{aligned} B_A &= B_0 \cos \omega t = B_m \cos \omega t \cos \alpha , \\ B_B &= B_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) , \\ B_C &= B_m \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) . \end{aligned}$$

Результирующая магнитная индукция:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} B_m \left[ \cos(\omega t - \alpha) + \cos(\omega t + \alpha) + \right. \\ &\left. + \cos\left(\omega t - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\omega t + \alpha) + \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\omega t + \alpha) \right] . \end{aligned}$$

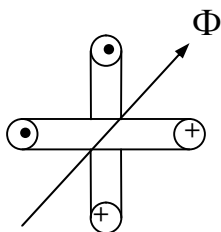
Или окончательно

$$B = \frac{3}{2} B_m \cos(\omega t + \alpha) .$$

Если предположить, что точка  $O$  перемещается так, что  $\omega t + \alpha$  оставалось бы постоянным, т.е. в сторону уменьшения  $\alpha$ , то в этой точке магнитная индукция будет постоянной. Таким образом, формула выражает магнитную индукцию потока, который не изменяя своей величины, вращается по часовой стрелке.

Вращающееся магнитное поле при двухфазном токе.

Двухфазным называют совокупность двух токов, сдвинутых на  $\frac{\pi}{2}$  по фазе.



Если токи

$$i_1 = I_m \sin \omega t ,$$

$$i_2 = I_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) ,$$

то в катушках создаются магнитные потоки:

$$\Phi_1 = \Phi_m \sin \omega t ,$$

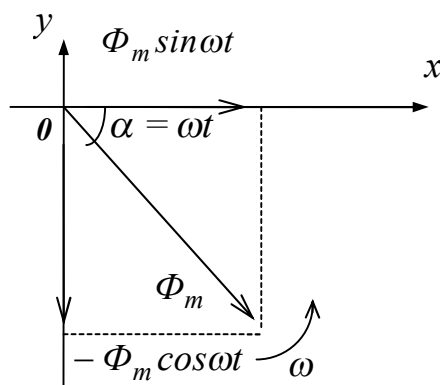
$$\Phi_2 = \Phi_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\Phi_m \cos \omega t .$$

Результирующий магнитный поток системы катушек с геометрическим сдвигом на  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\Phi = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2} = \Phi_m ,$$

т.е. результирующий магнитный поток не зависит от времени и численно равен максимальному потоку одной катушки.

Для определения положения потока рассмотрим магнитное состояние для некоторого момента времени, изображенное на рисунке.





Очевидно:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\Phi_m \cos \omega t}{\Phi_m \sin \omega t} = -\operatorname{ctg} \omega t .$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

и

$$\alpha = \omega t - \frac{\pi}{2} .$$

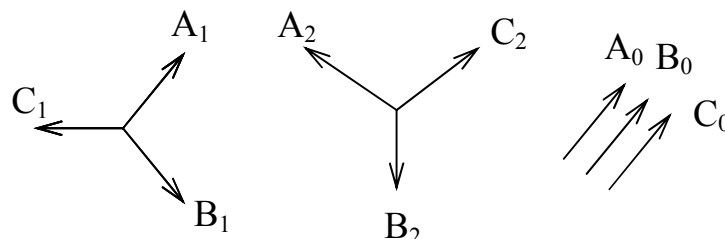
Следовательно, угол  $\alpha$  изменяется пропорционально времени, а магнитный поток вращается с неизменной скоростью против часовой стрелки.

Понятие о методе симметричных составляющих.

В основе метода лежит представление любой несимметричной системы трех векторов тремя симметричными системами векторов прямой, обратной и нулевой последовательности фаз. Для каждой из симметричных систем можно, приняв за основу вектор  $A$ , выразить через него остальные:

$$B_1 = a^2 A_1; B_2 = a A_2; B_0 = A_0;$$

$$C_1 = a A_1; C_2 = a^2 A_2; C_0 = A_0 .$$



В дальнейшем необходимо учитывать, что

$$1 + a + a^2 = 0 ,$$

$$a = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad a^3 = 1 ; \quad a^4 = a^3 a = a \text{ и т. д.}$$

**Теорема.** Любую несимметричную систему векторов  $A, B, C$ , можно разложить на симметричные системы прямой, обратной и нулевой последовательности.

**Доказательство:**

Допустим, что разложение возможно. Тогда

$$A = A_1 + A_2 + A_0 ,$$

$$B = B_1 + B_2 + B_0 ,$$

$$C = C_1 + C_2 + C_0 ,$$

или

$$\begin{cases} A = A_1 + A_2 + A_0, & (1) \\ B = a^2 A_1 + a A_2 + A_0, & (2) \\ C = a A_1 + a^2 A_2 + A_0. & (3) \end{cases}$$

Полученная система уравнений однозначно определяет  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_0$  при заданных  $A, B, C$ , а следовательно, разложение возможно.

Для нахождения симметричных составляющих сложим (1), (2), (3) и учтем, что

$$1 + a + a^2 = 0.$$

Тогда

$$A_0 = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

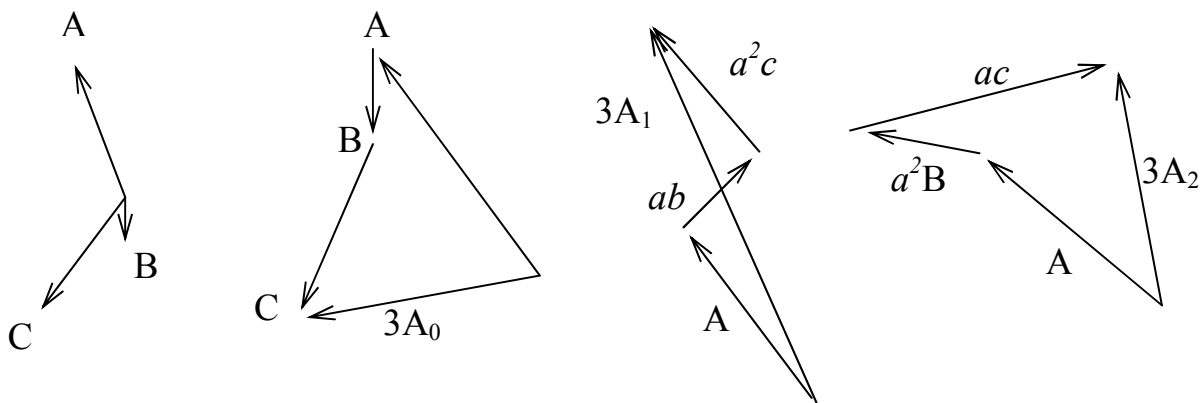
Умножая (2) на  $a$ , а (3) на  $a^2$  и складывая, определим, что

$$A_1 = \frac{1}{3}(A + aB + a^2C).$$

Наконец, умножая (2) на  $a^2$ , а (3) на  $a$ , получим :

$$A_2 = \frac{1}{3}(A + a^2B + aC).$$

Предписываемые полученными равенствами действия могут быть выполнены аналитически в комплексной форме, а также графически, как представлено для некоторой системы векторов  $A, B, C$ , на рисунке.



При построении умножению на  $a$  на рисунке соответствует поворот вектора на  $120^\circ$ , а на  $a^2$  - поворот на  $240^\circ$  против часовой стрелки.

Наличие несимметрии снижает степень использования электроустановок. Обратная последовательность создает поле, вращающееся в противоположном основному направлении, что снижает вращающий момент электродвигателей. Поэтому принято оценивать отступление системы напряжения от симметрий с помощью степени несимметрии:

$$\varepsilon = \frac{U_2}{U_1} 100\%,$$

Здесь  $U_2$  и  $U_1$  - линейные напряжения обратной и прямой последовательности. По стандарту степень несимметрии не должна превышать 5%.

При расчете с помощью метода симметричных составляющих после разложения несимметричной системы напряжений на симметричные составляющие для каждой из симметричных систем рассчитывается заданная цепь, а затем на основе принципа наложения результаты расчета рассматриваются совместно. Необходимо также учитывать, что сопротивление трехфазного приемника энергии для токов различных последовательностей в общем случае различно, что связано как с наличием в числе приемников вращающихся машин так и с другими явлениями.

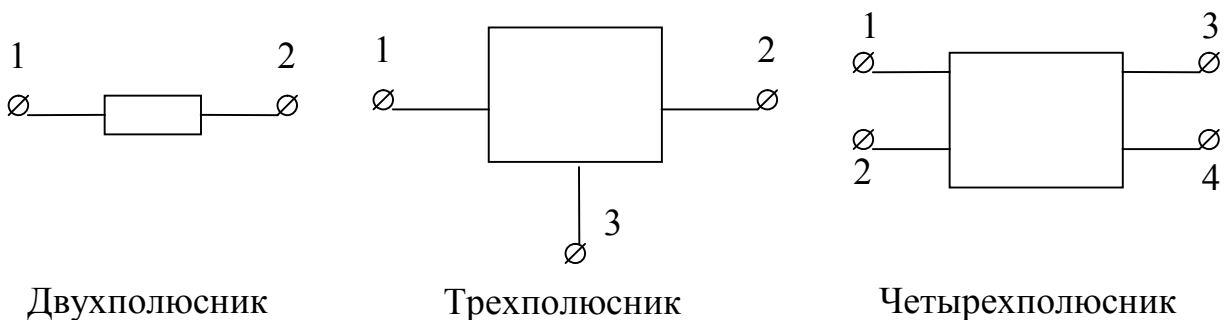
## ЛЕКЦИЯ №18

### Четырехполюсники и многополюсники.

#### Основные определения.

Задача анализа режимов работы электрических цепей часто сводится к установлению связей между токами и напряжениями различных ее участков или ветвей. При этом режимы работы остальных участков остаются неизвестными, хотя все их параметры учитываются при решении задачи. В этих случаях рассматриваемую часть цепи можно характеризовать обобщенными параметрами по отношению к выделенным зажимам.

Часть цепи, характеризуемую обобщенными параметрами, необходимыми и достаточными для составления уравнений связи между токами и напряжениями на ее зажимах, называют многополюсником. Число полюсов равно числу зажимов на границах данной части цепи. Многополюсники условно изображаются в виде прямоугольников с соответствующим числом полюсов-зажимов.



При исследовании режимов в электрических цепях чаще всего используют двухполюсники, трехполюсники и четырехполюсники.

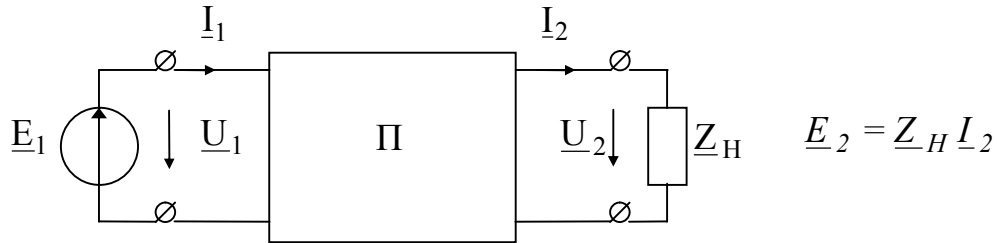
Многополюсники, не содержащие в своих ветвях источников энергии, называют пассивным (линии передачи электрической энергии, трансформаторы, мостовые измерительные схемы и т.п.).

Многополюсники, содержащие в своих ветвях источники энергии, называют активными (электронные лампы, полупроводниковые приборы и т.п.).

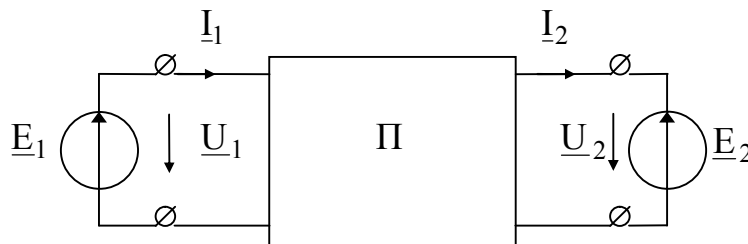
Для четырехполюсников различают также симметричные и несимметричные. К двум полюсам четырехполюсника подключаются источники энергии, а к двум - приемники. Если можно поменять местами источник и приемник энергии и при этом не изменятся ни напряжение, ни ток в приемнике, четырехполюсник называют симметричным.

Уравнения пассивного четырехполюсника и связь между коэффициентами.

В пассивном четырехполюснике на основании теоремы о компенсации заменим приемник энергии на источник эдс:



Для полученной схемы



используя принцип наложения запишем:

$$\begin{cases} I_1 = E_1 Y_{11} - E_2 Y_{12} \\ I_2 = E_1 Y_{21} - E_2 Y_{22} \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} I_1 = U_1 Y_{11} - U_2 Y_{12} \\ I_2 = U_1 Y_{21} - U_2 Y_{22} \end{cases}.$$

Выразим первичные  $U_1$  и  $I_1$  через вторичные  $U_2$  и  $I_2$ :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{Y_{22}}{Y_{21}} U_2 + \frac{1}{Y_{21}} I_2 \\ I_1 = \frac{Y_{11} Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{21}} U_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2 \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} U_1 = A U_2 + B I_2 \\ I_1 = C U_2 + D I_2 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} U_1 = A_{11} U_2 + A_{12} I_2 \\ I_1 = A_{21} U_2 + A_{22} I_2 \end{cases},$$

где коэффициенты  $A, B, C, D$ , составленные из проводимостей, имеют между собой следующую связь

$$A D - B C = 1$$

в чем легко можно убедиться подстановкой.

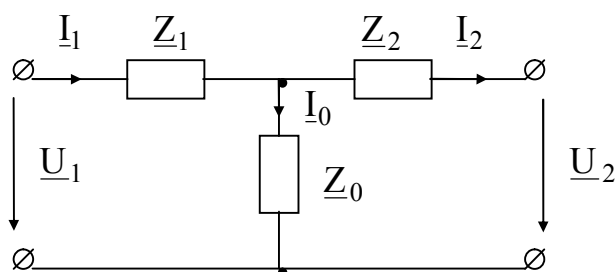
Полученные уравнения пассивного четырехполюсника называют уравнениями типа  $A$ .

### Определение постоянных коэффициентов пассивного четырехполюсника.

А. По Т - и П - образным схемам замещения.

Любой четырехполюсник характеризуется тремя независимыми коэффициентами. Поэтому его оказалось возможным представить в виде простых трехэлементных схем с однозначной зависимостью между коэффициентами  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  и сопротивлениями схемы.

Т - образная схема.



На основании законов Кирхгофа:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2}{\underline{Z}_0} + \underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_0} \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}\right) \underline{U}_2 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\right) \underline{I}_2.$$

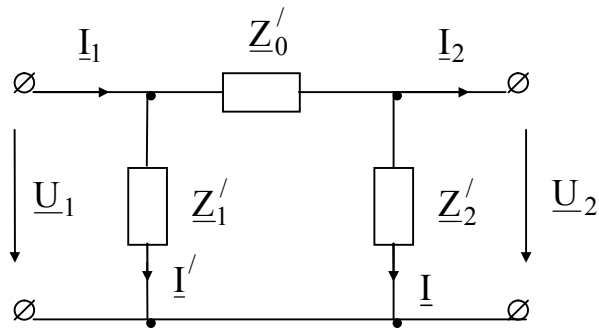
Таким образом,

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}, \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}, \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_0}, \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}.$$

Правильность их определения может быть проверена по уравнению

$$\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1.$$

П - образная схема.



На основании законов Кирхгофа :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + (\underline{I}_2 + \underline{I})\underline{Z}'_0 = \left(1 + \frac{\underline{Z}'_0}{\underline{Z}'_2}\right)\underline{U}_2 + \underline{Z}'_0\underline{I}_2,$$

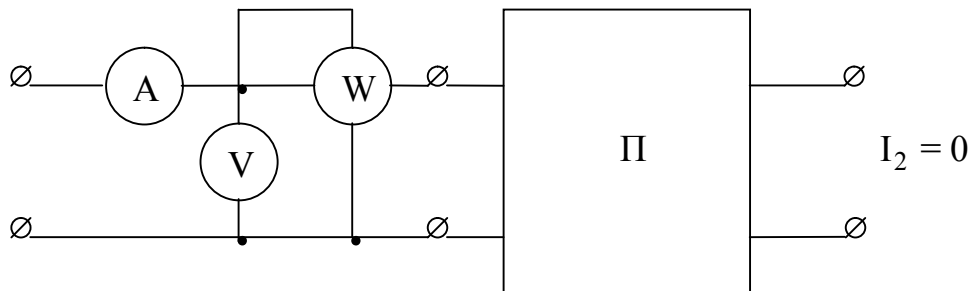
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I} + \underline{I}' = \left(\frac{1}{\underline{Z}'_1} + \frac{1}{\underline{Z}'_2} + \frac{\underline{Z}'_0}{\underline{Z}'_1\underline{Z}'_2}\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}'_0}{\underline{Z}'_1}\right)\underline{I}_2,$$

т.е.

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}'_0}{\underline{Z}'_2}, \quad \underline{B} = \underline{Z}'_0, \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}'_1} + \frac{1}{\underline{Z}'_2} + \frac{\underline{Z}'_0}{\underline{Z}'_1\underline{Z}'_2}, \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}'_0}{\underline{Z}'_1}.$$

Б. По опытам холостого хода и короткого замыкания.

Для производства опытов необходимы амперметр, вольтметр и ваттметр. На рисунке представлена схема опыта холостого хода на вторичных зажимах.



При этом опыте:

$$\underline{U}_{IX} = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2 = \underline{A} \underline{U}_2,$$

$$\underline{I}_{IX} = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2 = \underline{C} \underline{U}_2,$$

$$P_{IX} = U_{IX} I_{IX} \cos \varphi_{IX}.$$

При коротком замыкании вторичных зажимов ( $\underline{U}_2 = 0$ ):

$$\underline{U}_{IK} = \underline{B} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_{IK} = \underline{D} \underline{I}_2,$$

$$P_{IK} = U_{IK} I_{IK} \cos \varphi_{IK}.$$

По результатам этого опыта можно составить уравнения:

$$\underline{Z}_{IX} = \frac{\underline{U}_{IX}}{\underline{I}_{IX}} = Z_{IX} e^{j\varphi_{IX}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}},$$

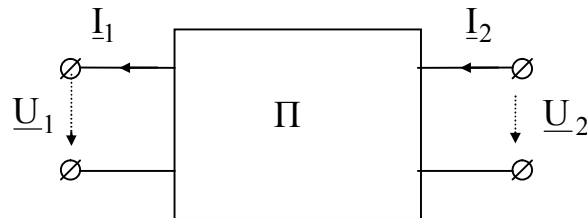
$$\underline{Z}_{IK} = \frac{\underline{U}_{IK}}{\underline{I}_{IK}} = Z_{IK} e^{j\varphi_{IK}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}},$$

где

$$\varphi_{IX} = \arccos \frac{P_{IX}}{U_{IX} I_{IX}},$$

$$\varphi_{IK} = \arccos \frac{P_{IK}}{U_{IK} I_{IK}}.$$

При изменении зажимов питания



уравнения четырехполюсника принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 - \underline{B} \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 - \underline{D} \underline{I}_2 \end{cases}.$$

Их решение относительно новых зажимов питания:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{D} \underline{U}_1 + \underline{B} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{C} \underline{U}_1 + \underline{A} \underline{I}_1 \end{cases}.$$

Из уравнений следует. Что у симметричных четырехполюсников  $\underline{A} = \underline{D}$ .

В этом случае достаточно двух проведенных опытов для определения коэффициентов на основе следующих уравнений:

$$\begin{cases} Z_{IX} e^{j\varphi_{IX}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \\ Z_{IK} e^{j\varphi_{IK}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}, \\ \underline{A} = \underline{D}, \\ \underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1. \end{cases}$$

Для несимметричных четырехполюсников необходим хотя бы один дополнительный опыт при обратном питании, что дает



$$\underline{Z}_{2X} = \frac{\underline{U}_{2X}}{\underline{I}_{2X}} = Z_{2X} e^{j\varphi_{2X}} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}},$$

или

$$\underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{U}_{2K}}{\underline{I}_{2K}} = Z_{2K} e^{j\varphi_{2K}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}.$$

Заметим в заключение, что если заданы по величине и фазе  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$  рабочего режима, то проводя опыты холостого хода и короткого замыкания при  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ , получим:

$$\underline{U}_{1XX} = \underline{A} \underline{U}_2, \quad \underline{U}_{1K3} = \underline{B} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_{1XX} = \underline{C} \underline{U}_2, \quad \underline{I}_{1K3} = \underline{D} \underline{I}_2.$$

Сложив попарно, получим:

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2 = \underline{U}_{1XX} + \underline{U}_{1K3},$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2 = \underline{I}_{1XX} + \underline{I}_{1K3},$$

т.е. рабочий режим четырехполюсника можно рассматривать как наложение режимов холостого хода и короткого замыкания.

## ЛЕКЦИЯ №19

Различные виды записи уравнений четырехполосников.

Режим работы четырехполосника полностью определен, если известны  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_1, \underline{I}_2$ . Две из этих четырех величин можно рассматривать как воздействующие. Тогда оставшиеся две являются откликом. Здесь возможны следующие варианты.

Варианты	1	2	3	4	5	6
Воздействия	$\underline{U}_1 \underline{U}_2$	$\underline{U}_2 \underline{I}_1$	$\underline{I}_1 \underline{I}_2$	$\underline{I}_2 \underline{U}_1$	$\underline{U}_1 \underline{I}_2$	$\underline{U}_1 \underline{I}_1$
Отклики	$\underline{I}_1 \underline{I}_2$	$\underline{U}_1 \underline{I}_2$	$\underline{U}_1 \underline{U}_2$	$\underline{U}_2 \underline{I}_1$	$\underline{I}_1 \underline{U}_2$	$\underline{U}_2 \underline{I}_2$

Ранее установлены уравнения типа *A*. На основе приведенной таблицы могут быть составлены другие виды уравнений:

$$\underline{U}_2 = \underline{D} \underline{U}_1 + \underline{B} \underline{I}_1 \quad - \quad \text{тип } B$$

$$\underline{I}_2 = \underline{C} \underline{U}_1 + \underline{A} \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \quad - \quad \text{тип } Z$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 \quad - \quad \text{тип } Y$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2 \quad - \quad \text{тип } H$$

$$\underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{G}_{11} \underline{U}_1 + \underline{G}_{12} \underline{I}_2 \quad - \quad \text{тип } G$$

$$\underline{U}_2 = \underline{G}_{21} \underline{U}_1 + \underline{G}_{22} \underline{I}_2$$

Если известны параметры в одной из шести систем, то можно перейти к другой. Необходимые расчетные формулы могут быть легко установлены и приводятся справочных пособиях.

## Характеристические параметры симметричного четырехполюсника.

Для наиболее часто встречающихся симметричных четырехполюсников можно подобрать сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_H$  так, чтобы оно было бы равно сопротивлению со стороны первичных зажимов, т.е.

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_H = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2},$$

или с учетом

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{Z}_H \underline{I}_2: \\ \frac{\underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2}{\underline{C} \underline{U}_2 + \underline{A} \underline{I}_2} &= \frac{\underline{A} \underline{Z}_H + \underline{B}}{\underline{C} \underline{Z}_H + \underline{A}} = \underline{Z}_H, \end{aligned}$$

т.е.

$$\underline{C} \underline{Z}_H^2 + \underline{A} \underline{Z}_H = \underline{A} \underline{Z}_H + \underline{B}.$$

В этом случае сопротивление нагрузки может быть определено по постоянным коэффициентам четырехполюсника:

$$\underline{Z}_H = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}.$$

Это новый вторичный параметр пассивного симметричного четырехполюсника, который называют характеристическим (иногда - повторным) сопротивлением. Оно является комплексным числом:

$$\underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}.$$

Режим, при котором  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$ , называют режимом согласованной нагрузки. При такой нагрузке определим отношение

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1 e^{j\psi_1}}{U_2 e^{j\psi_2}} = m e^{jB} = \underline{M}.$$

Электрический угол

$$B = \psi_1 - \psi_2 \quad (\text{бэ́та})$$

называют постоянной фазы.

Здесь следует заметить, что для характеристики передачи четырехполюсника со входа на выход часто пользуются другими отношениями, которые в отличие от приведенного определяется при ЛЮБОЙ нагрузке, а не только при согласованной. К ним относят

$$\underline{K}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad - \text{коэффициент передачи по напряжению,}$$

$$\underline{K}_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \quad - \text{коэффициент передачи по току,}$$

$\underline{Z} = \frac{U_2}{I_1}$  - передаточное сопротивление,

$\underline{Y} = \frac{I_2}{U_1}$  - передаточная проводимость.

Эти коэффициенты определяются при ЛЮБОЙ нагрузке и как отношение ВТОРИЧНОЙ величины к ПЕРВИЧНОЙ. Они также могут быть определены через параметры четырехполюсника, но с дополнительным учетом сопротивления нагрузки. Например:

$$\underline{K}_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{A U_2 + B I_2} = \frac{Z_H}{A Z_H + B},$$

$$\underline{K}_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{C U_2 + D I_2} = \frac{1}{C Z_H + D}.$$

Поэтому  $\underline{M}$  - постоянная величина, а  $\underline{K}_U$ ,  $\underline{K}_I$ ,  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$  зависят от нагрузки.

В зависимости от частоты  $U_1$  и  $U_2$  могут сильно отличаться. Поэтому их отношение оказалось удобнее оценивать в логарифмическом масштабе:

$$\ln m = \ln \frac{U_1}{U_2} = A, \text{ (альфа)}$$

где  $A$  - постоянная ослабления.

В таком случае

$$m = \frac{U_1}{U_2} = e^A.$$

Единице постоянной ослабления присвоено наименование НЕПЕР ( $Hn$ ). Ослаблением в  $1 Hn$  обладает четырехполюсник, у которого при СОГЛАСОВАННОЙ нагрузке напряжение на выходе в  $e=2,718$  раза меньше, чем на входе. Отношению  $\frac{U_1}{U_2} = 1$  соответствует затухание  $A=0$ .

Для мощностей

$$S_2 = \frac{U_2^2}{Z_H}, \quad S_1 = \frac{U_1^2}{Z_H},$$

так как при согласованной нагрузке

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_H.$$

Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = e^{2A},$$

а

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}, \text{ Hn.}$$

Наряду с непером пользуются другой логарифмической единицей - *Бел*. Введение этой единицы основано на применении десятичных логарифмов взамен натуральных.

Ослабление, выраженное в беллах, равно показателю степени, в которую нужно возвести число  $10$ , чтобы получить отношение мощностей:

$$A_B = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}.$$

Так как при согласованной нагрузке

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{I_1^2 Z_C}{I_2^2 Z_C} = \frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{U_1^2}{U_2^2},$$

то

$$A_B = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

Единица «Бел» мало удобна, так как слишком крупна. Поэтому обычно пользуются более мелкой единицей, равной  $0.1$  Б и называемой децибел:

$$A_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{S_1}{S_2},$$

$$A_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

Связь между единицами определим из

$$A_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg e^A = 20 A \lg e = 20 \cdot 0.4343 \cdot A = 8.686 A,$$

то есть

$$1 \text{ Нп} = 8,686 \text{ дБ},$$

$$1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}.$$

Заметим, что при согласованной нагрузке ток и напряжение передаются со входа на выход одинаково:

$$\underline{M} = e^A e^{jB} = e^{\underline{\Gamma}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2},$$

так как

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_H, \quad \text{а} \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{\text{ex}} = \underline{Z}_H.$$

Коэффициент  $\underline{\Gamma}$  (гамма) называют постоянной передачи:

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2}.$$

Постоянная передачи может быть определена по коэффициентам четырехполюсника:

$$\underline{\Gamma} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln \frac{\underline{C} \underline{U}_2 + \underline{A} \underline{I}_2}{\underline{I}_2} = \ln \left( \underline{C} \underline{Z}_H + \underline{A} \right) = \ln \left( \underline{C} \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} + \underline{A} \right) = \ln \left( \underline{A} + \sqrt{\underline{B} \underline{C}} \right).$$

## ЛЕКЦИЯ №20.

### Уравнения симметричного четырехполюсника с гиперболическими функциями.

Определенные в предыдущем параграфе  $\underline{Z}_C$  и  $\underline{\Gamma}$  называют вторичными параметрами четырехполюсника. Они полностью задают симметричный четырехполюсник.

В самом деле, решая совместно

$$\begin{cases} e^{\underline{\Gamma}} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B} \underline{C}} \\ \underline{A}^2 - \underline{B} \underline{C} = 1 \end{cases},$$

получим при

$$\begin{aligned} \underline{A}^2 - \underline{B} \underline{C} &= 1, \\ (\underline{A} - \sqrt{\underline{B} \underline{C}}) (\underline{A} + \sqrt{\underline{B} \underline{C}}) &= 1, \\ \underline{A} - \sqrt{\underline{B} \underline{C}} &= e^{-\underline{\Gamma}}, \end{aligned}$$

два уравнения:

$$\begin{cases} \underline{A} + \sqrt{\underline{B} \underline{C}} = e^{\underline{\Gamma}} \\ \underline{A} - \sqrt{\underline{B} \underline{C}} = e^{-\underline{\Gamma}} \end{cases}.$$

Тогда

$$\underline{A} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = \text{ch} \underline{\Gamma}.$$

Далее:

$$\sqrt{\underline{B} \underline{C}} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = \text{sh} \underline{\Gamma},$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{\underline{B} \underline{C}} \cdot \underline{Z}_C &= \underline{Z}_C \text{sh} \underline{\Gamma}, \\ \sqrt{\underline{B} \underline{C}} \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} &= \underline{Z}_C \text{sh} \underline{\Gamma} \quad \text{и} \quad \underline{B} = \underline{Z}_C \text{sh} \underline{\Gamma}, \end{aligned}$$

а

$$\frac{\sqrt{\underline{B} \underline{C}}}{\underline{Z}_C} = \frac{\text{sh} \underline{\Gamma}}{\underline{Z}_C} \quad \text{и} \quad \underline{C} = \frac{\text{sh} \underline{\Gamma}}{\underline{Z}_C}.$$

Уравнение четырехполюсника примет вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = ch\underline{\Gamma} \cdot \underline{U}_2 + \underline{Z}_C sh\underline{\Gamma} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \frac{sh\underline{\Gamma}}{\underline{Z}_C} \cdot \underline{U}_2 + ch\underline{\Gamma} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} .$$

Заметим, что  $\underline{Z}_C$  и  $\underline{\Gamma}$  легко определяются из опытов холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_X = \frac{\underline{U}_X}{\underline{I}_X} = \frac{\underline{Z}_C}{th\underline{\Gamma}},$$

$$\underline{Z}_K = \frac{\underline{U}_K}{\underline{I}_K} = \underline{Z}_C th\underline{\Gamma},$$

откуда

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_X \underline{Z}_K}, \quad a \quad th\underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_K}{\underline{Z}_X}}.$$

Через вторичные параметры может быть найдено и входное сопротивление:

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H ch\underline{\Gamma} + \underline{Z}_C sh\underline{\Gamma}}{\underline{Z}_H sh\underline{\Gamma} + \underline{Z}_C ch\underline{\Gamma}},$$

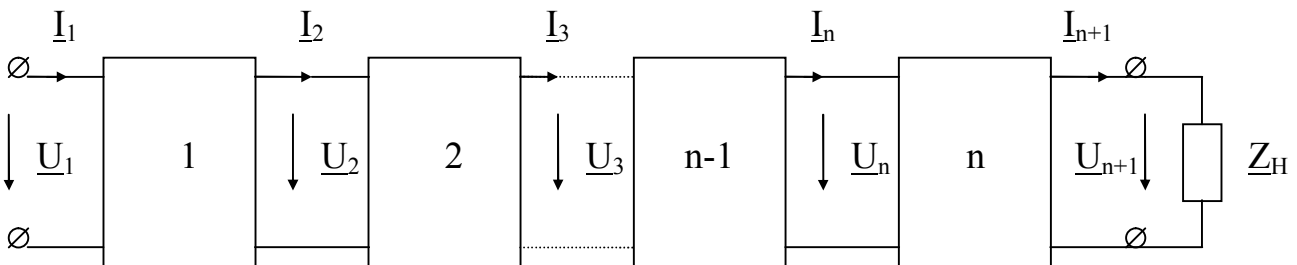
разделив на  $ch\underline{\Gamma}$ , получим:

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C tn\underline{\Gamma}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_H th\underline{\Gamma}}.$$

Способы соединения четырехполюсников.

а) Каскадное соединение.

Иногда каскадно соединяют несколько одинаковых четырехполюсников. При этом образуется цепная схема.



Если четырехполюсники симметричны, то и вся схема образует симметричный четырехполюсник:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{n+1} \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_y + \underline{I}_{n+1} \underline{Z}_y \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_y,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_{n+1} \frac{1}{\underline{Z}_y} \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_y + \underline{I}_{n+1} \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_y,$$

где  $\underline{\Gamma}_y$  и  $\underline{Z}_y$  - постоянная передачи и характеристическое сопротивление цепной схемы.

При  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$  и  $\underline{Z}_y = \underline{Z}_C$ :

$$\underline{\Gamma}_y = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{n+1}} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_{n+1}}.$$

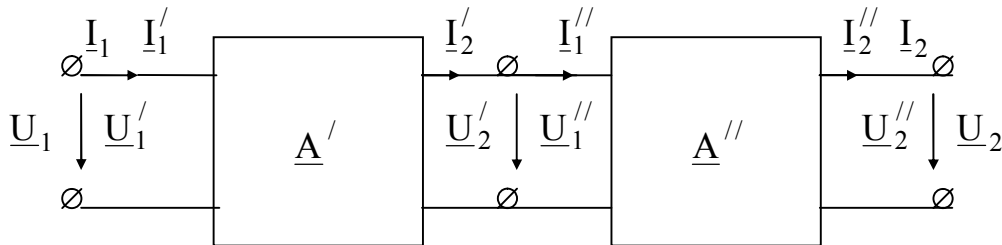
Но

$$\underline{\Gamma}_y = \ln \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} \dots \frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_{n+1}} \right) = n \underline{\Gamma},$$

тогда

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_{n+1} \operatorname{ch} n \underline{\Gamma} + \underline{I}_{n+1} \underline{Z}_C \operatorname{sh} n \underline{\Gamma} \\ \underline{I}_1 = \underline{U}_{n+1} \frac{\operatorname{sh} n \underline{\Gamma}}{\underline{Z}_C} + \underline{I}_{n+1} \operatorname{ch} n \underline{\Gamma} \end{cases}.$$

Значительно проще записываются уравнения различных схем соединения четырехполюсников в матричной форме. Рассмотрим каскадное соединение двух четырехполюсников.



Для каждого из них можно записать уравнения:

$$\begin{cases} \underline{U}'_1 = \underline{A}_1 \underline{U}'_2 + \underline{B}_1 \underline{I}'_2 \\ \underline{I}'_1 = \underline{C}_1 \underline{U}'_2 + \underline{D}_1 \underline{I}'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \underline{U}'_1 = \underline{A}_2 \underline{U}''_2 + \underline{B}_2 \underline{I}''_2 \\ \underline{I}'_1 = \underline{C}_2 \underline{U}''_2 + \underline{D}_2 \underline{I}''_2 \end{cases},$$

или сокращенно в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}' \\ \underline{C}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}'' \\ \underline{C}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} \underline{A}' \\ \underline{C}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{B}_1 \\ \underline{C}_1 & \underline{D}_1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \underline{A}'' \\ \underline{C}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_2 & \underline{B}_2 \\ \underline{C}_2 & \underline{D}_2 \end{bmatrix}.$$



Из рисунка ясно, что

$$\underline{U}'_2 = \underline{U}''_1 \quad \text{и} \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}''_1.$$

Тогда, заменив второй сомножитель первого уравнения на результат второго уравнения, получим:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}' \\ \underline{C}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix}.$$

Для эквивалентного четырехполюсника:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Сравнивая уравнения и учитывая схему соединения, получим:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}' \\ \underline{C}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}'' \\ \underline{C}'' \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{B}_1 \\ \underline{C}_1 & \underline{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_2 & \underline{B}_2 \\ \underline{C}_2 & \underline{D}_2 \end{bmatrix} \downarrow.$$

Отсюда по правилу умножения матриц (строка на столбец) получим:

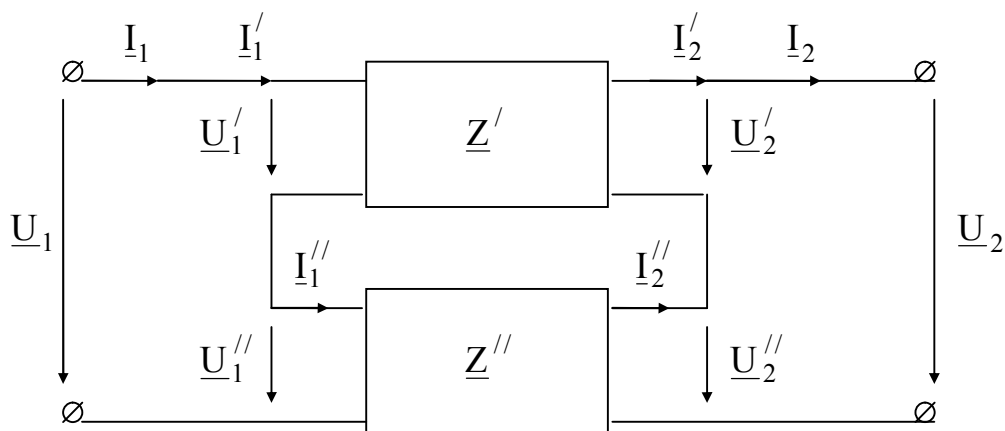
$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2 + \underline{B}_1 \underline{C}_2,$$

$$\underline{B} = \underline{A}_1 \underline{B}_2 + \underline{B}_1 \underline{D}_2,$$

$$\underline{C} = \underline{C}_1 \underline{A}_2 + \underline{D}_1 \underline{C}_2,$$

$$\underline{D} = \underline{C}_1 \underline{B}_2 + \underline{D}_1 \underline{D}_2.$$

б) Последовательное соединение.



Из схемы следует:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}'_2 + \underline{U}''_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = \underline{I}''_2.$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}'] \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}''] \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}''_2 \end{bmatrix}.$$

Для эквивалентного четырехполюсника

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

С учетом схемы и исходных уравнений, имеем:

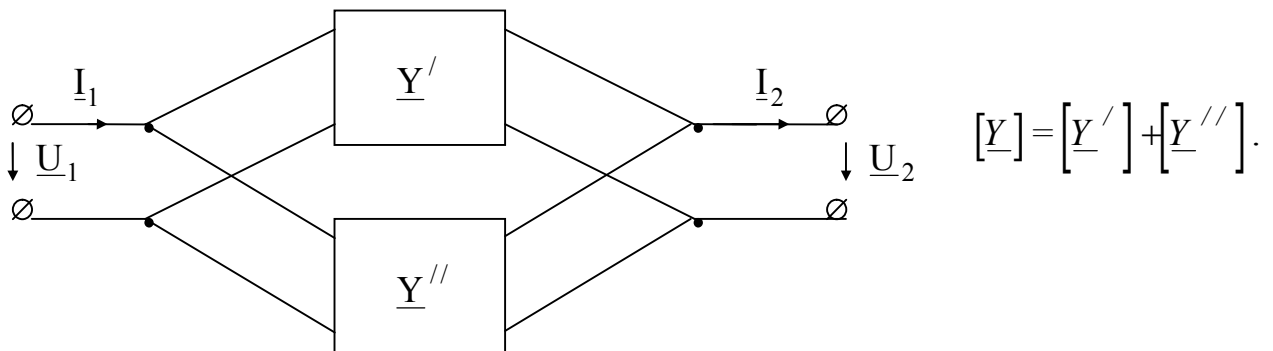
$$[\underline{Z}] = [\underline{Z}'] + [\underline{Z}''],$$

или в развернутой форме:

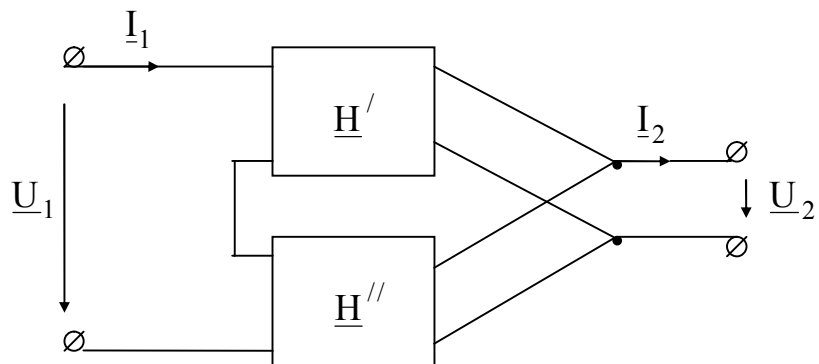
$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'_{11} + \underline{Z}''_{11} & \underline{Z}'_{12} + \underline{Z}''_{12} \\ \underline{Z}'_{21} + \underline{Z}''_{21} & \underline{Z}'_{22} + \underline{Z}''_{22} \end{bmatrix}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при различных соединениях удобнее применить разные формы записи уравнений.

Так при параллельном соединении:

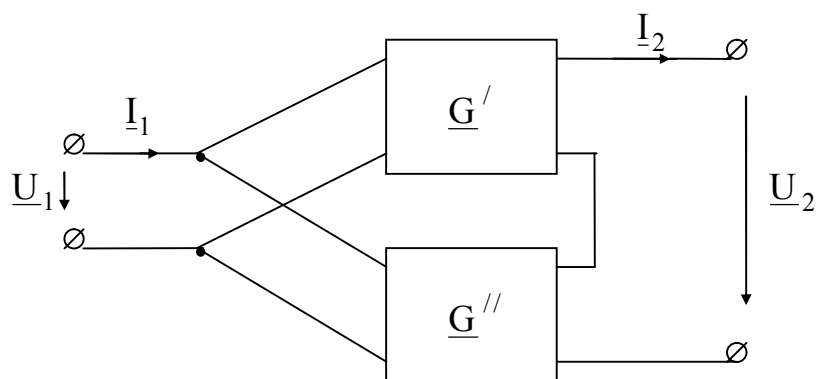


при последовательно - параллельном соединении:



$$[\underline{H}] = [\underline{H}'] + [\underline{H}''].$$

при параллельно - последовательном соединении:



$$[\underline{G}] = [\underline{G}'] + [\underline{G}''].$$

## ЛЕКЦИЯ №21

### Передаточные функции и обратные связи четырехполюсников.

Как отмечено выше четырехполюсник можно рассматривать как преобразователь входных величин (например,  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$ ) в выходные (например  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ ). Тогда его можно характеризовать передаточной функцией, равной отношению входной величины к выходной.

Передаточные функции, соответствующие отношению одноименных электрических величин - коэффициент передачи по напряжению

$$\underline{K}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$

и коэффициент передачи по току

$$\underline{K}_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$$

представляют собой безразмерные комплексные, зависящие от частоты величины. Применительно к усилительным устройствам они носят названия коэффициентов усиления по напряжению и току.

Отношения разноименных электрических величин - передаточное сопротивление и передаточная проводимость

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \quad \text{и} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}$$

имеют соответственно размерности сопротивления и проводимости, также являются комплексными величинами, зависящими от частоты.

В показательной форме записи передаточная функция может быть записана в виде

$$\underline{K}(j\omega) = \underline{K}(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $\underline{K}(\omega)$  - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),

$\varphi(\omega)$  - фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

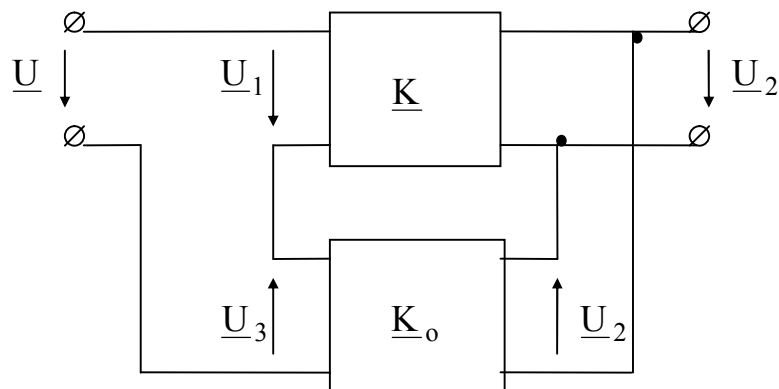
Эти характеристики имеют важное значение для работы устройств автоматики и радиотехники.

Передаточные функции могут быть выражены через любую систему коэффициентов четырехполюсника и сопротивление нагрузки. Например, по уравнениям типа  $A$ :

$$\underline{K}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H}{\underline{A}\underline{Z}_H + \underline{B}},$$
$$\underline{K}_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2} = \frac{1}{\underline{C}\underline{Z}_H + \underline{D}}.$$

В ряде электротехнических и автоматических устройств необходимо, чтобы передаточная функция зависела от режима цепи на выходе. Для этого в схему включают обратную связь - дополнительный четырехполюсник, питае-

мый выходной величиной основного четырехполюсника, например, напряжением  $\underline{U}_2$ , а выходная величина дополнительного четырехполюсника, например, напряжение  $\underline{U}_3$ , включается последовательно с источником первичного напряжения  $\underline{U}$ .



Пусть передаточная функция четырехполюсника обратной связи

$$\underline{K}_o = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}.$$

Тогда входное напряжение основного четырехполюсника

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{K}} = \underline{U} + \underline{U}_3 = \underline{U} + \underline{K}_o \underline{U}_2,$$

где  $\underline{K} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$  - передаточная функция основного четырехполюсника.

Отсюда передаточная функция всей системы

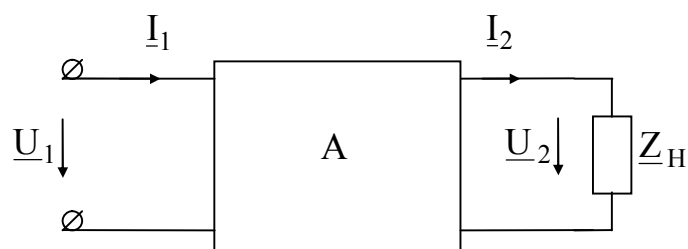
$$\underline{K}' = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} = \frac{\underline{K}}{1 - \underline{K}_o \underline{K}}.$$

Из полученного выражения следует, что передаточную функцию системы можно изменять, регулируя передаточную функцию  $\underline{K}_o$  устройства обратной связи.

Напряжение обратной связи может иметь ту же фазу, что и основное  $\underline{U}$ , увеличивая  $\underline{U}_1$  на входе и соответственно увеличивая коэффициент усиления всего устройства. В этом случае обратную связь называют положительной. Если же эти напряжения находятся в противофазе, то обратную связь называют отрицательной.

### Понятие об активных четырехполюсниках.

Так называют четырехполюсники, содержащие источники энергии (усилители, линия передач, в разных точках которой включены дополнительные источники энергии).



Заменим приемник энергии  $\underline{Z}_H$  источником напряжения

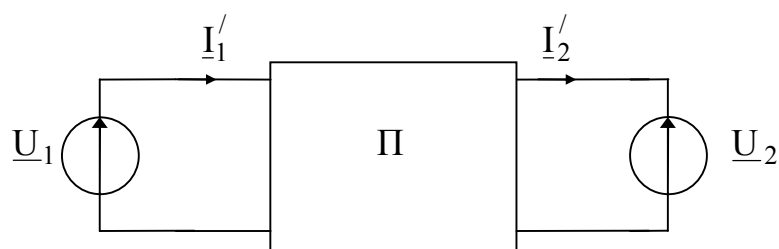
$$-\underline{U}_2 = -\underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

и применим метод наложения в два этапа. Сначала принимаются в расчет только внешние  $\underline{U}_1$  и  $-\underline{U}_2$ .

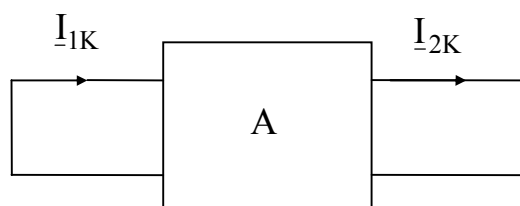
Тогда

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2',$$

$$\underline{I}_1' = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2'.$$



На втором этапе источники  $\underline{U}_1$  и  $-\underline{U}_2$  замыкаются на коротко. Тогда для активного четырехполюсника



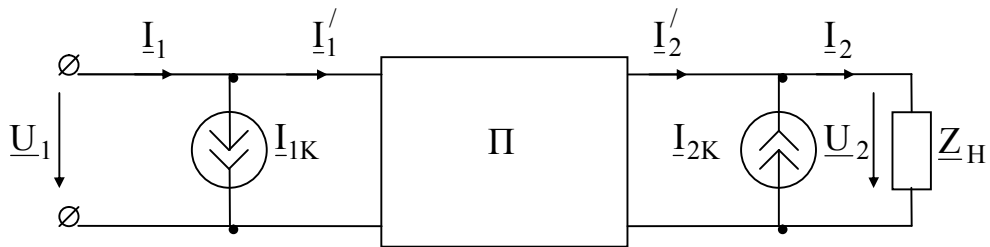
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_{1K},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_{2K}.$$

Подстановка в первые уравнения дает

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B} (\underline{I}_2 - \underline{I}_{2K}),$$

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_{1K} = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D} (\underline{I}_2 - \underline{I}_{2K}).$$



Таким образом, активный четырехполюсник эквивалентен пассивному, к выходным и входным характеристикам зажимам которого подключены ветви с источниками тока  $\underline{I}_{1K}$  и  $\underline{I}_{2K}$ , заменяющими все источники. Их величина определяется расчетом.

## ЛЕКЦИЯ №22.

### Несинусоидальные периодические токи.

Разложение несинусоидальной периодической функции в периодический ряд.

На практике кривые эдс, токов и напряжений отличаются от идеальной синусоиды, оставаясь периодическими. Это связано с несинусоидальностью магнитной индукции в зазорах генераторов, наличием ряда нелинейных элементов в цепях и т.п. Поэтому результаты расчетов, полученные при идеализации формы напряжений и токов, оказываются верными только приближенно. Допустимость идеализации определяется как назначением цепи, так и степенью несинусоидальности. Особенно недопустима идеализация в линиях передачи информации, что связано с искажением или полной потерей передаваемой информации.

Для анализа цепей при несинусоидальных токах применяется разложение несинусоидальной функции в тригонометрический ряд Фурье. Возможность такого разложения основывается на том, что всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая на конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть представлена гармоническим рядом:

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \end{aligned}$$

где  $A_0$  - постоянная составляющая,

$A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$  - основная синусоида или первая гармоника,

$A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$  - высшие гармоники.

Раскрыв синусы суммы и приняв

$$A_{km} \cos \psi_k = B_{km},$$

$$A_{km} \sin \psi_k = C_{km},$$

получим:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t,$$

где

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t),$$



$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin k \omega t \, d(\omega t),$$

$$C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos k \omega t \, d(\omega t).$$

При этом

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2},$$

$$\psi_k = \arctg \frac{C_{km}}{B_{km}}.$$

Ряд может быть представлен и в комплексной форме записи:

$$f(\omega t) = A_0 + \frac{1}{j\sqrt{2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega t} - \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_{-k}^* e^{-jk\omega t} \right),$$

где  $\underline{A}_k = \frac{A_{km}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_k}$ ,  $\underline{A}_{-k}^* = \frac{A_{km}}{\sqrt{2}} e^{-j\psi_k}$  - комплексные значения синусоидально изменяющихся функций (гармоник).

Иногда для более простой записи вводят условно отрицательную частоту:

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (B_{km} \sin(k\omega t) + C_{km} \cos(k\omega t)),$$

или в комплексной форме записи:

$$f(\omega t) = A_0 + \frac{1}{j\sqrt{2}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega t}.$$

Если периодическая функция задана не аналитически, а в виде графика, то можно заменить интегралы суммами. Для этого период делят на « $m$ » равных частей, каждая из которых

$$\Delta(\omega t) = \frac{2\pi}{m}.$$

Тогда

$$A_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sum_1^m f_n(\omega t) \Delta(\omega t) = \frac{1}{m} \sum_1^m f_n(\omega t),$$

$$B_{km} \approx \frac{1}{\pi} \sum_1^m f_n(\omega t) \sin_n k \omega t \cdot \Delta(\omega t) = \frac{2}{m} \sum_1^m f_n(\omega t) \sin_n k \omega t,$$

$$C_{km} \approx \frac{1}{\pi} \sum_1^m f_n(\omega t) \cos_n k \omega t \cdot \Delta(\omega t) = \frac{2}{m} \sum_1^m f_n(\omega t) \cos_n k \omega t,$$

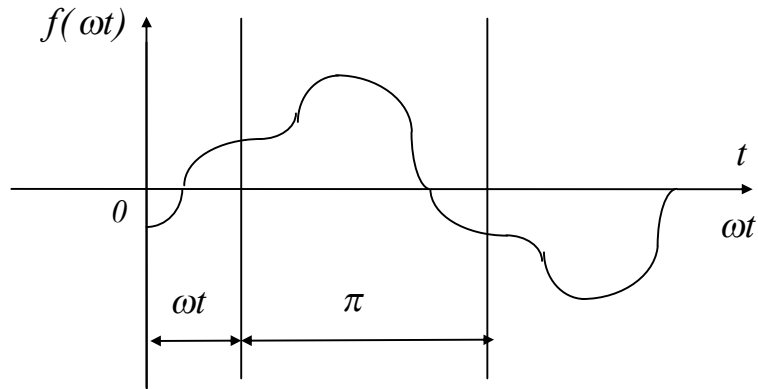
где  $f_n(\omega t)$  - значение функции при аргументе  $n \cdot \Delta(\omega t)$ ,  
 $\sin_n k \omega t$ ,  $\cos_n k \omega t$  - значения этих функций при  $n \cdot \Delta(\omega t)$ .

Разложение упрощается, если исследуемая кривая обладает симметрией.

При симметрии относительно оси абсцисс:

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi).$$

Обладающая такой симметрией кривая приведена на рисунке.



Подстановка в условие симметрии рядов  $f(\omega t)$  и  $f(\omega t + \pi)$  :

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots, \\ f(\omega t + \pi) &= A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \pi + \psi_1) + A_{2m} \sin[2(\omega t + \pi) + \psi_2] + \dots = \\ &= A_0 - A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) - \dots \end{aligned}$$

приводит к

$$2A_0 + 2A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots = 0.$$

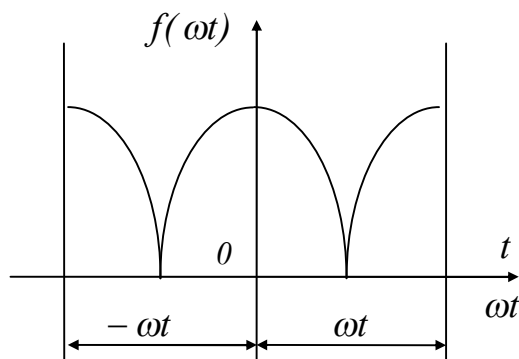
Следовательно, в разложении кривых, симметричных относительно оси абсцисс, содержатся только нечетные гармоники. Ряд принимает вид:

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots$$

При симметрии относительно оси ординат:

$$f(\omega t) = f(-\omega t).$$

Обладающая такой симметрией кривая приведена на рисунке.

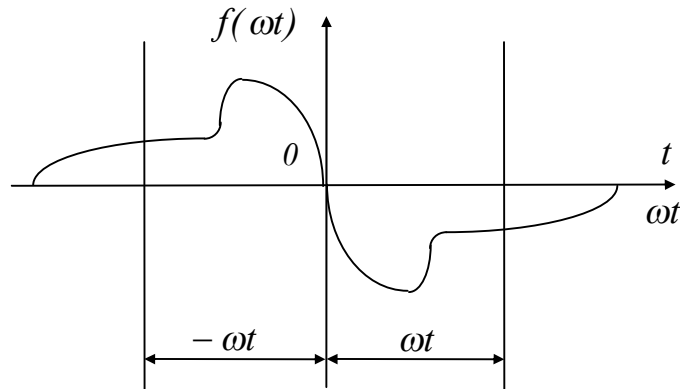


Подстановка в условие симметрии рядов показывает, что в этом случае ряд не содержит синусов, и разложение принимает следующий вид:

$$f(\omega t) = A_0 + C_{1m} \cos \omega t + C_{2m} \cos 2\omega t + \dots = A_0 + A_{1m} \cos \omega t + A_{2m} \cos 2\omega t + \dots$$

При симметрии относительно начала координат  $f(\omega t) = -f(\omega t)$ .

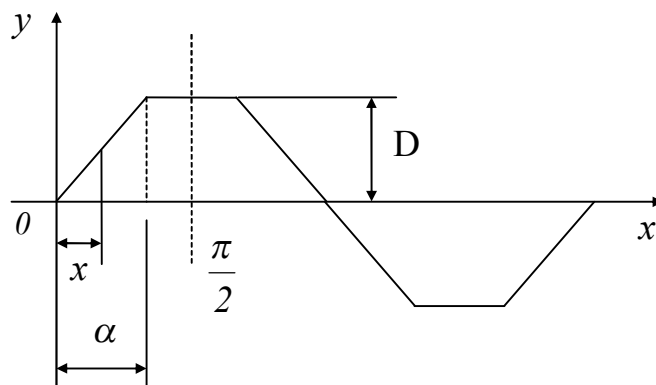
На рисунке изображена обладающая таким свойством кривая:



Аналогичным способом можно показать, что ряд в этом случае не содержит постоянной составляющей и косинусов:

$$f(\omega t) = B_{1m} \sin \omega t + B_{2m} \sin 2\omega t + \dots = A_{1m} \sin \omega t + A_{2m} \sin 2\omega t + \dots$$

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд трапецеидальной кривой.



Ввиду симметрии относительно оси абсцисс и начала координат в разложении не будет постоянной составляющей, косинусоид и четных гармоник. Кроме того, ввиду симметрии достаточно рассмотреть четверть периода.

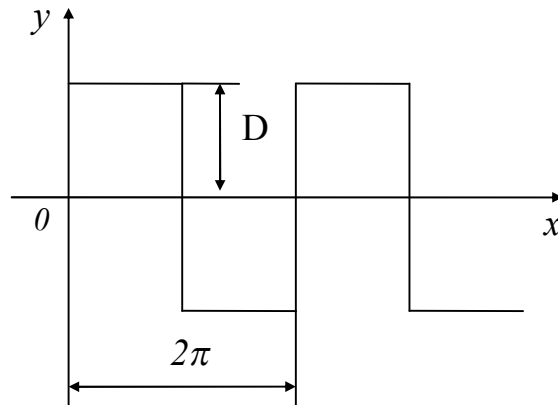
Амплитуды гармоник:

$$A_{km} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \sin(kx) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} D \frac{x}{\alpha} \sin(kx) dx + \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} D \sin(kx) dx = \frac{4D}{\alpha \pi k^2} \sin k\alpha$$

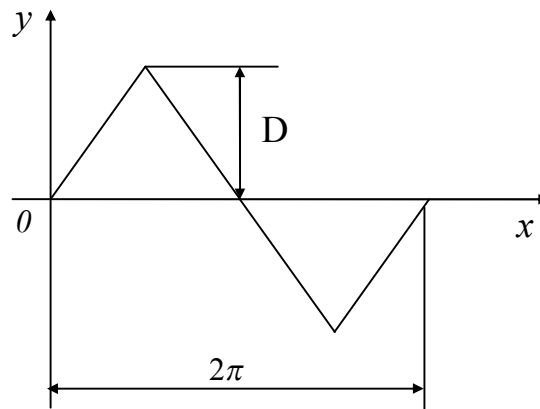
Разложение принимает вид:

$$f(x) = \frac{4D}{\alpha \pi} \sin \alpha \cdot \sin x + \frac{4D}{\alpha \pi 9} \sin 3\alpha \cdot \sin 3x + \dots + \frac{4D}{\alpha \pi k^2} \sin k\alpha \cdot \sin kx + \dots$$

Приведем также разложения в ряд прямоугольной и треугольной кривых:



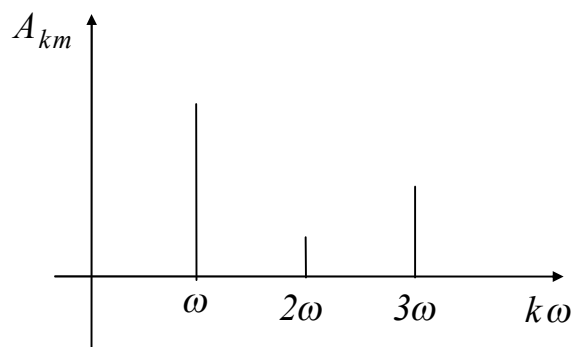
$$f(x) = \frac{4D}{\pi} \sin x + \frac{4D}{\pi 3} \sin 3x + \dots + \frac{4D}{\pi k} \sin kx + \dots$$



$$f(x) = \frac{8D}{\pi^2} \sin x - \frac{8D}{\pi^2 9} \sin 3x + \frac{8D}{\pi^2 25} \sin 5x - \dots + \frac{8D}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \sin kx + \dots$$

В учебных пособиях по ТОЭ приводится большое число различных кривых и их разложение в ряд Фурье.

Совокупность амплитуд  $A_{km}$  и фаз  $\psi_k$  называют спектром функции. Периодическая функция обладает дискретным частотным спектром.



Спектр можно характеризовать зависимостями амплитуд  $A_{km}$  и фаз  $\psi_k$  от частоты  $k\omega$ .

### Максимальные, средние и действующие значения несинусоидальных токов.

Под максимальным значением  $A_{max}$  понимают наибольшее значение функции за период.

Среднее значение определяется как среднее по модулю:

$$A_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(\omega t)| dt.$$

В случае, если за весь период функция ни разу не меняет знака, среднее по модулю значение равно постоянной составляющей.

Обычно в расчетах пользуются действующим значением эдс, токов, и напряжений, которые определяются по формуле:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(\omega t) dt}.$$

Разложив заданную функцию в ряд и подставив в выражение для действующего значения, получим:

$$A^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \right]^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt +$$

$$+ \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=0 \\ i=0 \\ i \neq k}}^{\infty} \int_0^T A_{im} A_{km} \sin(i\omega t + \psi_i) \cdot \sin(k\omega t + \psi_k) dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{km}^2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2.$$

Заметим, что возведение ряда в квадрат здесь возможно, так как ряд абсолютно сходится при любом значении  $\omega$ .

Окончательно

$$A = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}.$$

Для токов, эдс и напряжений:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots},$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots},$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}.$$

В электроэнергетике, где кривые преимущественно симметричны относительно оси абсцисс, для оценки несинусоидальности пользуются:

коэффициентом формы:

$$k_{\phi} = \frac{A}{A_{cp}} \quad (\text{для синусоиды } k_{\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11),$$

коэффициентом амплитуды:

$$k_a = \frac{A_{max}}{A} \quad (\text{для синусоиды } k_a = \sqrt{2} \approx 1,41),$$

коэффициентом искажения:

$$k_{II} = \frac{A_I}{A} \quad (\text{для синусоиды } k_{II} = 1).$$

По стандарту напряжение промышленной сети считается практически синусоидальным, если действующее значение всех высших гармоник не превышает 5% действующего значения напряжения основной частоты. Коэффициент искажения такой кривой с точностью до долей процента равен единице.

В электронике и радиотехнике для оценки искажений пользуются коэффициентом гармоник:

$$k_{\Gamma} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}}{A_I}.$$

При отсутствии постоянной составляющей:

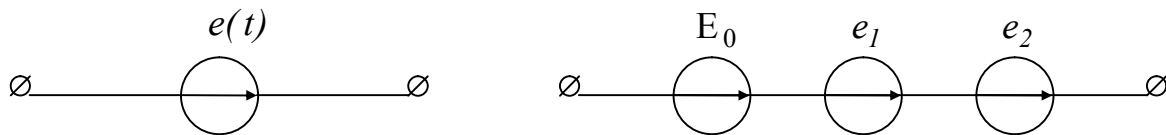
$$k_{\Gamma} = \frac{\sqrt{\sum_2^{\infty} A_k^2}}{k_{II} A} = \frac{1}{k_{II}} \sqrt{\frac{\left[ \sum_2^{\infty} A_k^2 \right] + A_I^2 - A_I^2}{\sum_1^{\infty} A_k^2}} = \frac{1}{k_{II}} \sqrt{1 - k_{II}^2}.$$

(для синусоиды  $k_{\Gamma} = 0$ ).

## ЛЕКЦИЯ №23.

Расчет цепей при несинусоидальных эдс и токах.

1. Заданная несинусоидальная эдс раскладывается на гармонические составляющие .



В нашем случае, например:

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2) .$$

2. В соответствии с принципом наложения производится расчет токов и напряжений на участках при действии каждой эдс в отдельности. При расчете следует учитывать, что реактивные сопротивления зависят от частоты:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L(l)}, \quad X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C(l)}}{k} .$$

Активное сопротивление также зависит от частоты. Однако, при небольших частотах и сравнительно малых сечениях проводов можно считать его совпадающим с сопротивлением постоянному току.

Если источник несинусоидальной эдс подключается непосредственно к емкости, то ток в ней:

$$i_k = \frac{E_{km}}{X_k} \sin\left(k\omega t + \psi_k + \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$X_k = \frac{1}{k\omega C} .$$

Поэтому даже при незначительной величине  $E_{km}$  ток в емкости от этой гармоники может быть значительным. Это приводит к большей несинусоидальности тока в емкости по сравнению с эдс.

Для индуктивности:

$$i_k = \frac{E_{km}}{X_k} \sin\left(k\omega t + \psi_k + \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$X_k = k\omega L$$

Отсюда следует, что в индуктивности несинусоидальность тока меньше, чем у напряжения.

Расчет цепи для каждой из гармоник в отдельности может производиться символическим методом и любыми другими, на нем основанными.

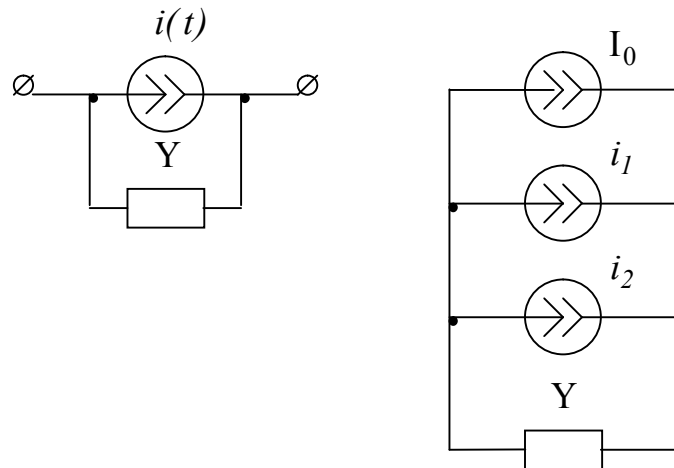
3. Результаты расчета рассматриваются совместно. При этом мгновенное значение любой величины определяется как сумма мгновенных значений составляющих гармоник. Например, для тока:

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2 - \varphi_2),$$

а его действующее значение

$$I = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

При задании не эдс, а токов принцип решения остается тем же.



Источник несинусоидального тока представляется в виде параллельного соединения ряда источников гармонического тока:

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

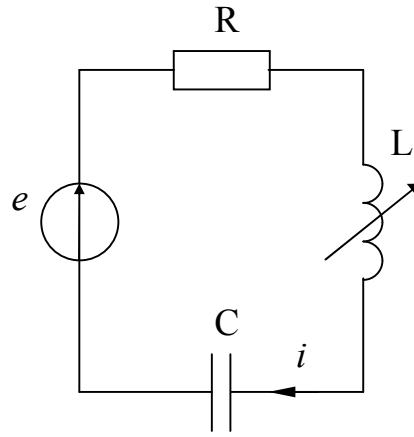
При вычерчивании кривых отдельных гармоник следует иметь в виду, что период гармоник обратно пропорционален ее номеру. Следовательно, если по оси абсцисс отложены электрические углы основной гармоник  $\omega t$ , то, соблюдая один и тот же масштаб, вместо углов  $\alpha_k$  надо откладывать углы  $\frac{\alpha_k}{k}$ .

Резонанс при несинусоидальных эдс и токах.

При подключении цепи к несинусоидальной эдс возможны резонансы на отдельных гармониках. В простейшей цепи  $R, L, C$  ток  $k$ -той гармоник

$$I_k = \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$





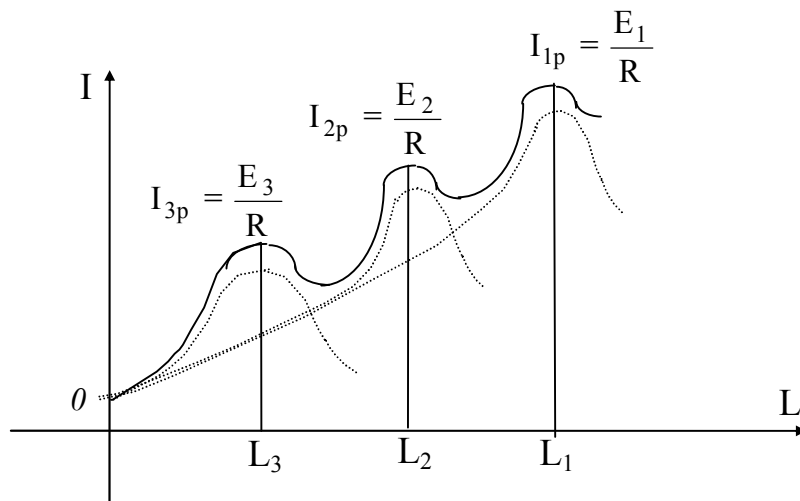
При изменении, например, индуктивности от  $0$  до  $\infty$  действующее значение тока каждой из гармоник будет изменяться по резонансным кривым от

$$I_{k0} = \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \frac{L}{k^2 \omega^2 C^2}}} \quad \text{при } L = 0$$

до

$$I_{k \text{ рез}} = \frac{E_k}{R} \quad \text{при } k\omega L = \frac{L}{k\omega C}$$

и далее до  $I_k = 0$  при  $L = \infty$ .

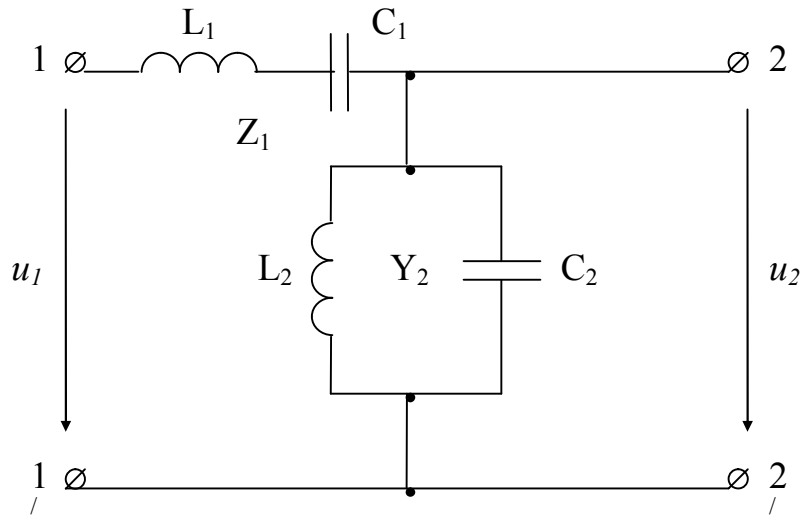


При трех гармониках кривая действующего значения тока

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$$

при достаточно малом « $R$ » имеет три четко выраженных максимума.

Резонансные явления могут быть использованы для выделения или подавления отдельных гармоник.



Например, если четырехполюсник содержит участки  $L_1 - C_1$  и  $L_2 - C_2$ , настроенные в резонанс для некоторой гармоники, то она проходит в нагрузку без ослабления, так как для нее сопротивление  $Z_1$  и проводимость  $Y_2$  равны нулю. Для других гармоник эти сопротивление и проводимость не равны нулю.

Мощность при несинусоидальных токах.

По определению активная мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt .$$

После разложения напряжения и тока в ряд и подстановки

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_0^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \right] \left[ \sum_0^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \right] dt ,$$

с учетом того, что среднее за период значение произведения синусоид различной частоты равно нулю и тригонометрические ряды абсолютно сходятся при любых частотах  $\omega$ , получим:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_0^{\infty} U_{km} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) dt ,$$

или после интегрирования:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k .$$

По аналогии с синусоидальным током вводится полная мощность:

$$S = UI = \sqrt{\sum_0^{\infty} U_k^2 \cdot \sum_0^{\infty} I_k^2} .$$

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности и приравнивают косинусу некоторого условного угла:

$$\frac{P}{S} = \cos\theta.$$

Если между синусоидами, имеющими действующие значения, равные соответственно действующим значениям несинусоидального тока и напряжения установить угол сдвига фаз так, чтобы определяемая ими мощность была бы равна мощности несинусоидального тока, то этот угол будет равен « $\theta$ », а синусоиды называют эквивалентными.

Формально можно ввести понятие реактивной мощности:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k.$$

При несинусоидальности токов и напряжений

$$S^2 - P^2 - Q^2 \neq 0$$

и равно квадрату так называемой мощности искажения:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

#### О показаниях приборов различных систем в цепи несинусоидального тока.

Измерение несинусоидальных токов и напряжений приборами различных систем может дать неодинаковые результаты. Приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем реагируют на действующие значения измеряемых величин. Магнитоэлектрические приборы измеряют постоянную составляющую, а в сочетании с выпрямителями - среднее по модулю значение. Амплитудные электронные вольтметры реагируют на максимальные значения. Так как обычно этими приборами пользуются для измерения действующих значений синусоидальных величин, то их шкалы градуируют на

$$U = 1,11U_{cp}$$

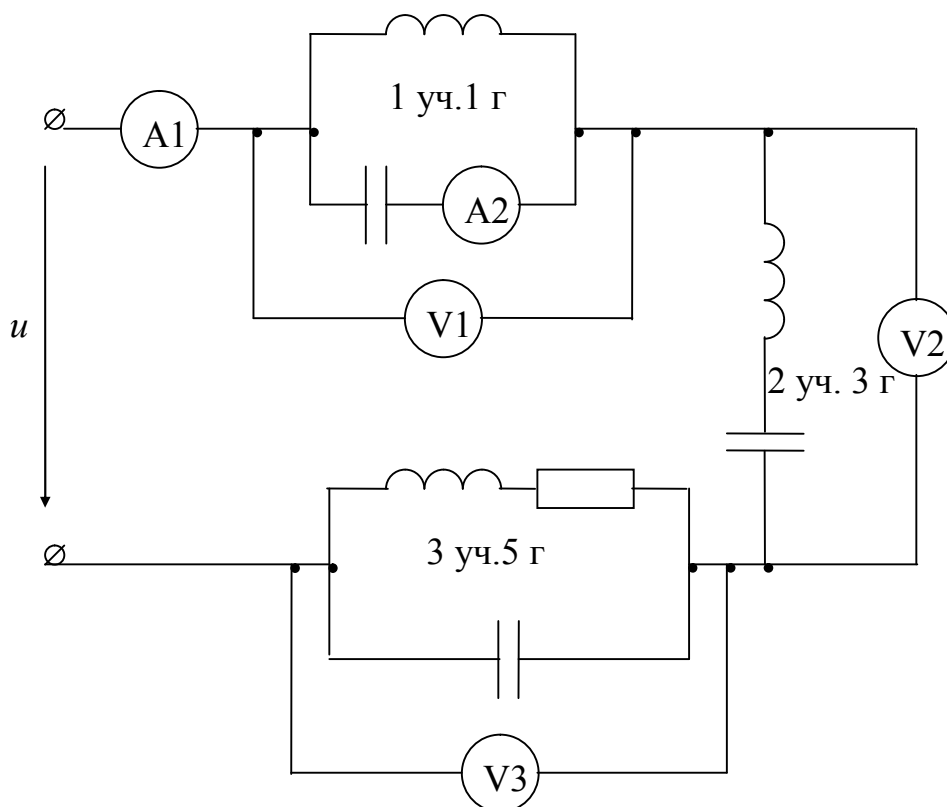
в приборе выпрямительной системы и на

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

в амплитудном электронном.

Отношения  $U$  к  $U_{cp}$  и  $U_{max}$  при несинусоидальных токах могут сильно отличаться от 1,11 и  $\sqrt{2}$  и, соответственно, приборы при измерении ими действующих значений могут дать значительную погрешность.

Для приведенной ниже электрической цепи оценим качественно работу включенных в нее приборов электромагнитной системы, если в составе питающего напряжения имеются постоянная составляющая, 1-я, 3-я и 5-я гармоники. При этом будем считать, что участок 1 настроен в резонанс для 1-й гармоники, участок 2- для 3-й, а участок 3- для 5-й.



Приборы при этом учтут:

$A_1$  - 3 и 5 гармоники,

$A_2$  - 1, 3 и 5 гармоники,

$V_1$  - 1, 3 и 5 гармоники,

$V_2$  - постоянную составляющую и 5 гармонику,

$V_3$  - 3 и 5 гармоники.

## ЛЕКЦИЯ №24.

Несинусоидальные кривые с периодической огибающей.

В электротехнических устройствах встречаются кривые с периодической огибающей, которые также можно разложить на гармонические составляющие. Наибольший интерес составляют кривые, наблюдающиеся при явлениях биений и модуляции.

В простейшем случае биения можно получить как результат сложения двух синусоид с равными амплитудами и близкими, но не равными частотами.

Пусть

$$\omega_1 > \omega_2$$

и с учетом

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$f(t) = A_m(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t),$$

или

$$f(t) = 2A_m \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Если принять, что  $f(t)$  является синусоидой с угловой частотой

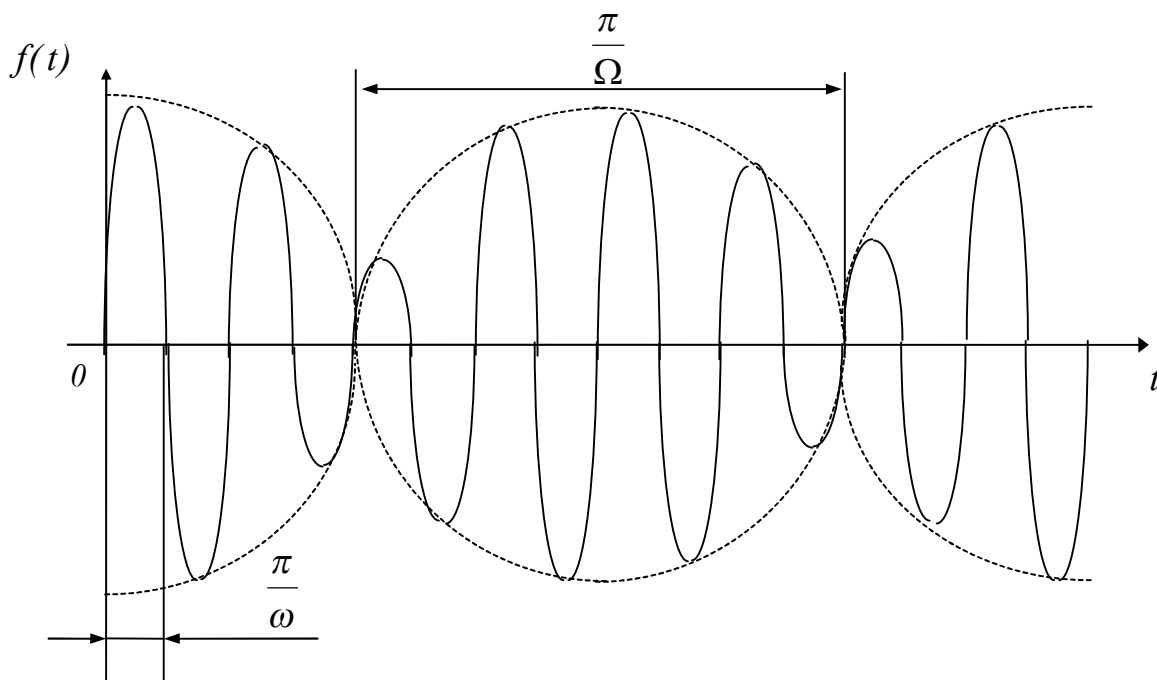
$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

то амплитуды ее изменяются по закону косинуса со значительно меньшей угловой частотой

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}.$$

Тогда

$$f(t) = 2A_m \cos\Omega t \cdot \sin\omega t.$$



Частота биений:

$$f_{\delta} = \frac{\Omega}{\pi}$$

это число максимумов огибающей кривой в единицу времени.

Период биений:

$$T_{\delta} = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Для передачи сигналов применяются генераторы, в которых  $A_m$ , или  $\omega$ , или  $\psi$  сравнительно медленно изменяются во времени по заданному закону. Такое изменение одной из величин называется модуляцией. При изменении  $A_m$  модуляцию называют амплитудной,  $\omega$  - частотной,  $\psi$  - фазовой.

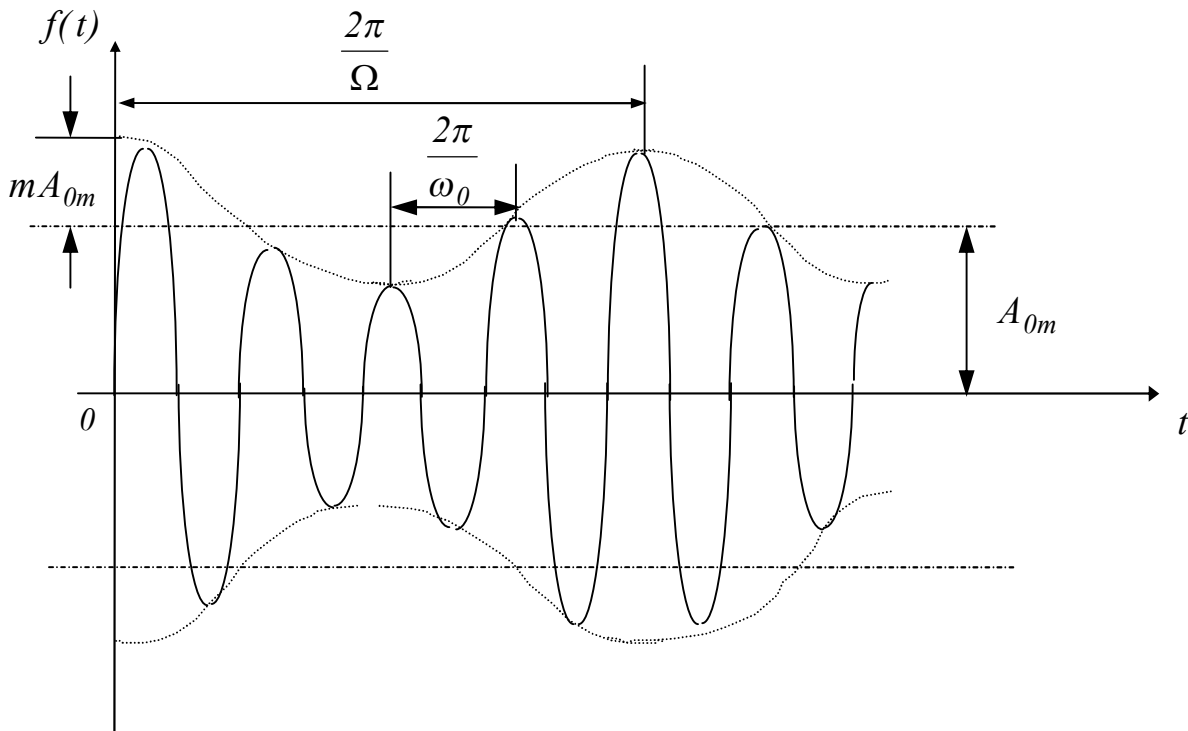
В простейшем случае функции, изменяющиеся с частотой  $\omega_0$  и с амплитудой, модулированной по косинусоиде:

$$(1 + m \cdot \cos\Omega t) A_{0m}$$

могут быть записаны в виде:

$$f(t) = A_m(t) \sin\omega_0 t = A_{0m}(1 + m \cdot \cos\Omega t) \sin\omega_0 t.$$

В уравнении частота  $\omega_0$  называется несущей частотой, частота  $\Omega$  - модулирующей частотой, а  $m$  - коэффициентом модуляции, который характеризует степень отличия максимальных и минимальных амплитуд от некоторого среднего значения  $A_{0m}$  (обычно  $m < 1$ ).



Амплитудная модуляция широко применяется в радиосвязи, где  $\omega_0$  - частота радиосвязи, а модулирующей частотой  $\Omega$  являются звуковые частоты радиопередачи.

Для расчета можно получить синусоидальные составляющие:

$$f(t) = A_{0m} \sin \omega_0 t + A_{2m} (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t),$$

так как

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta),$$

где

$$A_{2m} = \frac{mA_{0m}}{2},$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \Omega,$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \Omega.$$

Заметим, что частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  называют боковыми.

Передача сигналов может производиться и путем изменения параметров последовательности импульсов. Изменение во времени амплитуды импульсов называют амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ), изменение продолжительности импульсов  $\tau$  - широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), изменение частоты импульсов  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  - частотно-импульсной модуляцией (ЧИМ), а изменение фазы импульсов - фазо-импульсной модуляцией (ФИМ).

В простейшем случае АИМ при  $\tau \ll T_0$  (где  $T_0$  - период повторения импульсов), если амплитуды импульсов изменяются по закону

$$a_{max}(t) = A_{0m}(1 + m \cdot \cos \Omega t),$$

а разложение в ряд для периодически повторяющихся импульсов имеет вид (из таблиц):

$$f(\omega t) = a_{max} \left[ \alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sink} \alpha \pi \cdot \text{cos} k \omega t}{k} \right],$$

где

$$\alpha = \frac{\tau}{T},$$

или

$$f(\omega t) = \frac{a_{max}}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sink} \alpha \pi \cdot \text{cos} k \omega t}{k},$$

с учетом, что при  $\tau \ll T_0$

$$\text{sink} \alpha \pi \approx k \alpha \pi$$

получим

$$f(\omega t) \approx \frac{\tau \cdot a_{max}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{cos} k \omega t.$$

Спектр модулированных импульсов приближенно описывается уравнением:

$$f(\omega t) = \frac{\tau}{T} A_{0m} (1 + m \cdot \cos \Omega t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{cos} k \omega_0 t.$$

С учетом

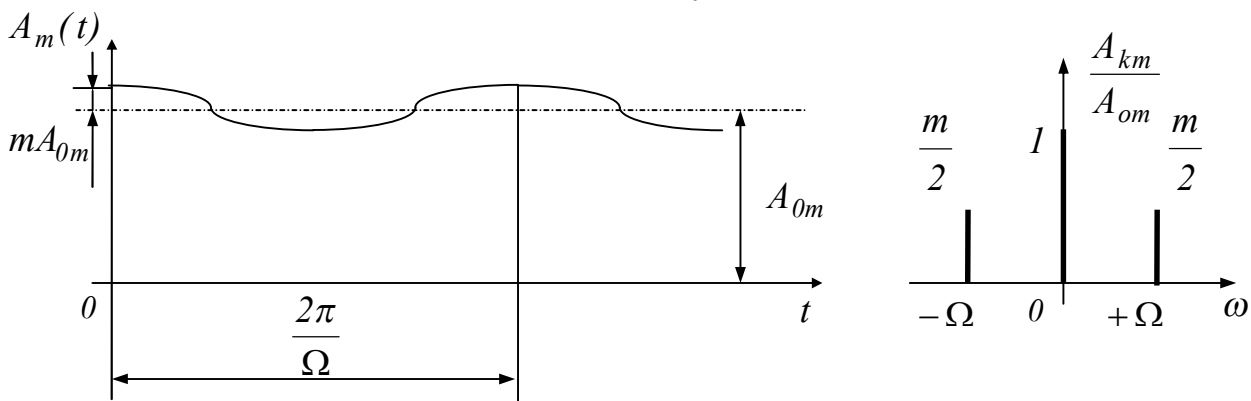
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

получим

$$f(\omega t) = A_{0m} \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \cos k\omega_0 t + \frac{m}{2} \cos(k\omega_0 - \Omega) t + \frac{m}{2} \cos(k\omega_0 + \Omega) t \right],$$

т.е. спектр модулированных импульсов представляет периодическую функцию, повторяющую с частотой  $\omega_0$  симметричный спектр модулирующей огибающей. Для того, чтобы спектр модулированных колебаний на каждом интервале частот  $(k - 0,5)\omega_0 < \omega < (k + 0,5)\omega_0$  без искажений воспроизводил спектр модулирующей огибающей, необходимо выполнить условие

$$2\Omega < \omega_0.$$



Высшие гармоники в трехфазных цепях.

В трехфазных цепях при

$$u_A = f(t)$$

в фазах  $B$  и  $C$  напряжения имеют ту же форму, отличаясь лишь фазовым сдвигом:

$$u_B = f\left(t - \frac{T}{3}\right),$$

$$u_C = f\left(t + \frac{T}{3}\right).$$

В этом случае для  $k$ -ой гармоники:

$$u_{Ak} = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

$$u_{Bk} = U_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_k - \frac{2k\pi}{3}\right),$$

$$u_{Ck} = U_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_k + \frac{2k\pi}{3}\right).$$

Рассмотрим гармоники порядка  $k=3n$  (где  $n=1, 2, 3, \dots$ ). Подстановка в уравнения напряжений фаз показывает, что кратные трем гармоники имеют в



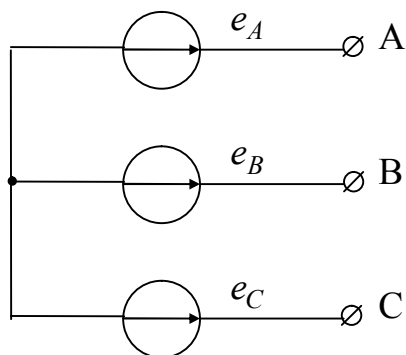
фазах  $A$ ,  $B$  и  $C$  одинаковую начальную фазу. Таким образом, кратные трем гармоники (3, 6, 9 и т. д.) образуют симметричную систему нулевой последовательности.

Аналогичной подстановкой можно показать, что гармоники порядка  $k=3n+1$  (1, 4, 7 и т. д.) образуют симметричную систему прямой последовательности, гармоники порядка  $k=3n-1$  (2, 5, 8 и т. д.) образуют симметричную систему обратной последовательности.

На практике в трехфазных системах обычно отсутствуют постоянная составляющая и все четные гармоники. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только нечетные гармоники.

При соединении генератора «звездой» в линейных напряжениях, равных разности соответствующих фазных, отсутствуют кратные трем гармоники, т.е.

$$U_{Л} = \sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}$$



Поэтому при несинусоидальности

$$\frac{U_{Л}}{U_{\Phi}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}}{\sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \dots}} < \sqrt{3}.$$

При наличии нулевого провода и симметричной нагрузке фазные токи всех гармоник, кроме кратных трем, дают в сумме нуль. В нулевом проводе наблюдается ток от кратных трем гармоник:

$$I_N = 3 \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}$$

При отсутствии нулевого провода токи тройной частоты протекать не могут. Между нулями генератора и приемника появляется напряжение:

$$U_{0N} = \sqrt{U_{0N3}^2 + U_{0N9}^2 + \dots},$$

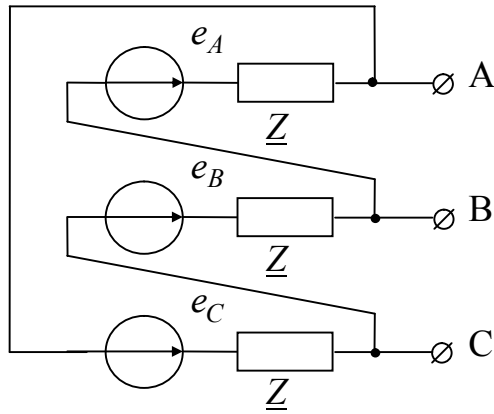
где

$$\underline{U}_{0N3} = \frac{(\underline{U}_{A3} + \underline{U}_{B3} + \underline{U}_{C3}) \underline{Y}_3}{3 \underline{Y}_3} = \underline{U}_{A3}$$

и т. д.

При соединении генератора «треугольником» по контуру генератора действует:

$$U = 3 \sqrt{E_3^2 + E_9^2 + \dots}$$



В контуре возникает ток при отсутствии внешней нагрузки. Между зажимами генератора кратные трем гармоники не проявляются, так как уравновешиваются падениями напряжения на внутренних сопротивлениях фаз генератора.

Поэтому

$$U_{\phi} = 3\sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}$$

Токи внешней цепи не имеют кратных трем гармоник.

Тогда:

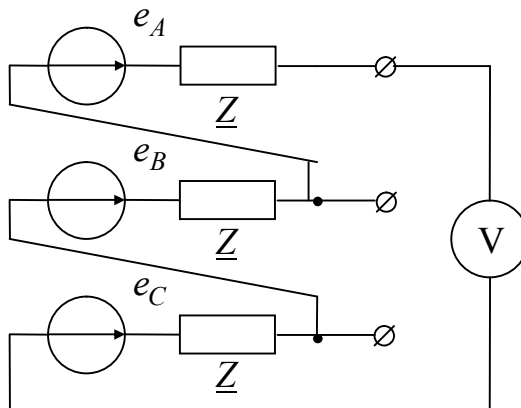
$$I_{\phi 2} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots},$$

$$I_{\text{Л}} = \sqrt{3}\sqrt{I_1^2 + I_5^2 + \dots}$$

и

$$\frac{I_{\text{Л}}}{I_{\phi 2}} < \sqrt{3}.$$

Заметим, что в так называемом «разомкнутом треугольнике» между разомкнутыми зажимами действует утроенное напряжение кратных трем гармоник. Так как 9, 15 и прочие более высокие гармоники имеют значительно меньшие амплитуды, чем третья, то напряжение на разомкнутых зажимах практически изменяется с тройной частотой. На этом принципе могут быть построены утроители частоты.



## ЛЕКЦИЯ №25.

### Понятие о частотных электрических фильтрах.

Симметричные пассивные четырехполюсники, составленные из индуктивностей и емкостей и предназначенные для пропуска или ослабления токов определенных частот, называют электрическими фильтрами. Если активное сопротивление принять равным нулю, то фильтр называют идеальным. Далее рассматриваются так называемые фильтры типа «к», для которых произведение продольного сопротивления на поперечное является постоянным числом, не зависящим от частоты.

Для фильтров различают:

полосу пропускания (зону прозрачности) - диапазон пропускаемых частот;

зону затухания - диапазон ослабляемых частот.

В зависимости от пропускаемого спектра частот существуют:

- 1) фильтры нижних частот (низкочастотные) - ФНЧ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2$  (рис. 1);
- 2) фильтры верхних частот (высокочастотные) - ФВЧ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2 = \infty$  (рис. 2);
- 3) полосовые (полосно-пропускающие) - ПФ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  (рис. 3);
- 4) заграждающие или режекторные (полосно-задерживающие) - ЗФ, пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $0$  до  $\omega_1$  и от  $\omega_2$  до  $\infty$  (рис. 4).

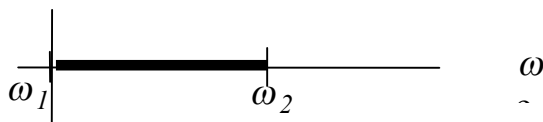


Рис. 1. ФНЧ.



Рис.3. ПФ.

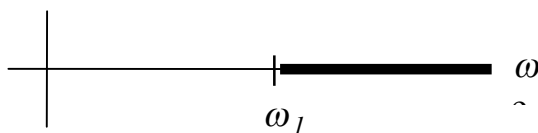


Рис. 2. ФВЧ.

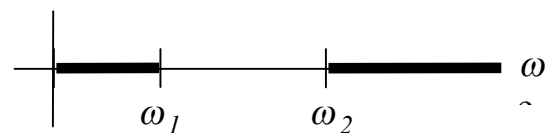
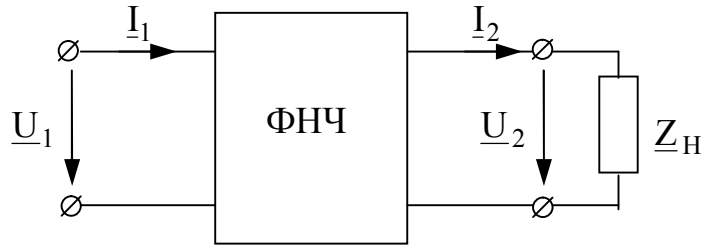


Рис.4. ЗФ.

Каждый фильтр должен удовлетворять определенным требованиям. Установим их на примере низкочастотного фильтра, пропускающего частоты в диапазоне от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega = \omega_2$ .



Комплексный коэффициент передачи напряжения:

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H}{(\underline{A} \underline{Z}_H + \underline{B})},$$

где  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{Z}_H$  - зависят от частоты.

В показательной форме записи

$$\underline{K}(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $K(\omega)$  - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), а  $\varphi(\omega)$  - фазо-частотная характеристика (ФЧХ). В полосе пропускания для идеального фильтра  $U_1 = U_2$ , т.е.  $K(\omega) = 1$ . При этом сигнал сложной формы не должен искажаться.

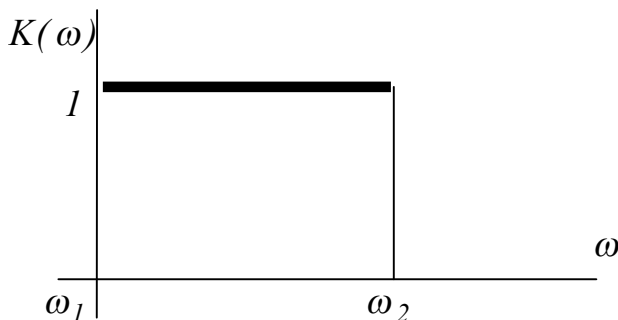
Если напряжение на входе

$$u_1 = \sum_{k=1}^n U_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) \quad \text{при } n\omega_1 \leq \omega_2,$$

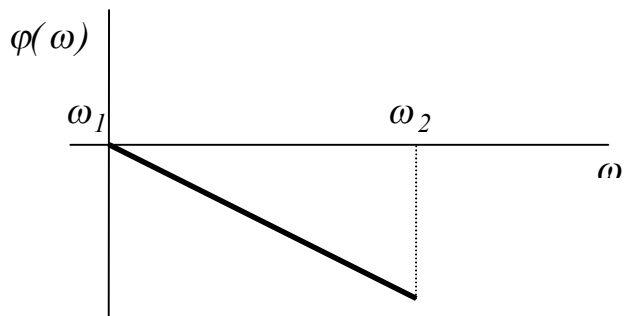
то сигнал не искажается при  $K(\omega) = 1$  и  $\varphi(\omega) = -\tau\omega$ , т.е. при линейной фазо-частотной характеристике. В самом деле, сдвиг фаз « $k$ »-ой гармоники равен  $-\tau k\omega_1$ , что эквивалентно сдвигу во времени

$$\frac{-\tau k\omega_1}{k\omega_1} = -\tau.$$

Иначе говоря, каждая гармоника, проходящая через фильтр, запаздывает на одно и то же время  $\tau$ , поэтому форма сигнала не меняется. Вне полосы пропускания  $K(\omega) = 0$  и форма ФЧХ может быть любой. АЧХ и ФЧХ низкочастотного фильтра представлены на рисунках.



АЧХ

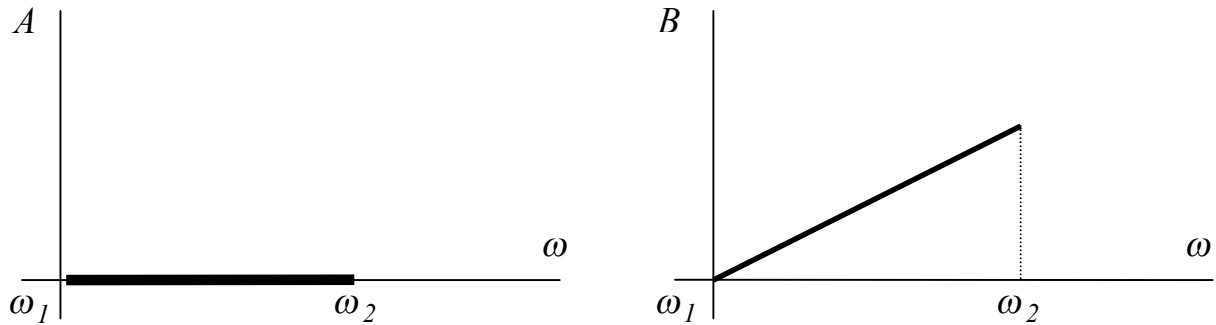


ФЧХ

При согласованной нагрузке комплексный коэффициент передачи напряжения:

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = e^{-\underline{\Gamma}} = e^{-A} e^{-jB}.$$

В полосе пропускания постоянная ослабления  $A = 0$ , а постоянная фазы  $B$  изменяется по линейному закону (см. рисунки).



Если в полосе пропускания АЧХ зависит от частоты, а ФЧХ не линейна, то возникают амплитудные и фазовые искажения.

Ранее установлено, что

$$\underline{A} = ch\underline{\Gamma} = ch(A + jB).$$

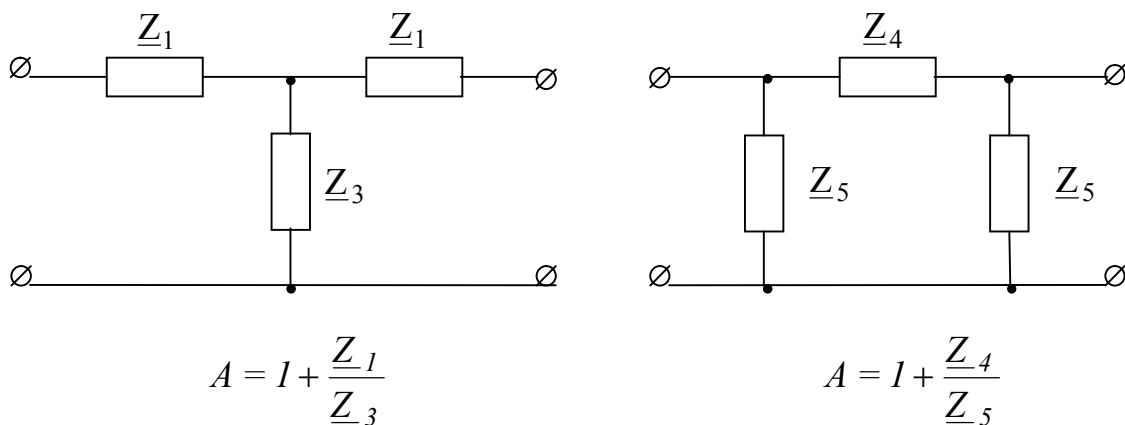
Но

$$ch(jB) = \cos B, \text{ а } sh(jB) = j \sin B.$$

Тогда

$$\underline{A} = ch(A + jB) = chA \cos B + jshA \sin B.$$

Можно показать, что  $A$  - действительное число. В самом деле для Т- и П-образных схем:



Но отношение двух мнимых чисел  $\frac{Z_1}{Z_3}$  и  $\frac{Z_4}{Z_5}$  - действительное число. Тогда и

$A$  - действительное число. Отсюда следуют два основных уравнения, применяемых при исследовании фильтров:

$$shA \cdot \sin B = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{ch}A \cdot \cos B = A. \quad (2)$$

В зоне прозрачности не должно быть затухания, т.е.

$$A = 0 \text{ и } e^{-A} = 1.$$

Тогда

$$\sin A = \operatorname{sh}0 = 0, \text{ а } \operatorname{ch}A = 1.$$

Условие (2) превращается в

$$\cos B = A. \quad (2')$$

Косинус изменяется от  $-1$  до  $+1$ . Поэтому границы зоны прозрачности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяются решением уравнения:

$$A(\omega) = \pm 1. \quad (3)$$

Характер изменения « $B$ » в этой зоне определяется уравнением:

$$B = \arccos A(\omega) \quad (2'').$$

Для зоны затухания  $A > 0$  и уравнение (1) удовлетворяется, если

$$\sin B = 0,$$

то есть

$$B = 0 \text{ или } B = \pm\pi.$$

Из (2) при  $B = 0$  получим

$$\operatorname{ch}A = A(\omega).$$

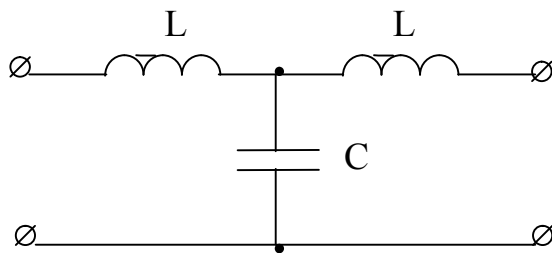
а при  $B = \pm\pi$ :

$$\operatorname{ch}A = -A(\omega).$$

Уравнения дают возможность рассчитать и построить  $A = f(\omega)$  в зоне затухания. В ней  $\underline{U}_2$  либо в фазе, либо в противофазе с  $\underline{U}_1$ .

Ниже приводятся примеры фильтров и их характеристики, рассчитанные по приведенной методике.

Фильтр нижних частот.



$$\underline{Z}_1 = j\omega L,$$

$$\underline{Z}_3 = -j \frac{1}{\omega C}.$$

Коэффициенты четырехполюсника:

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = 1 - \omega^2 LC,$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = j2\omega L - j\omega^3 L^2 C,$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_3} = j\omega C.$$

В зоне прозрачности

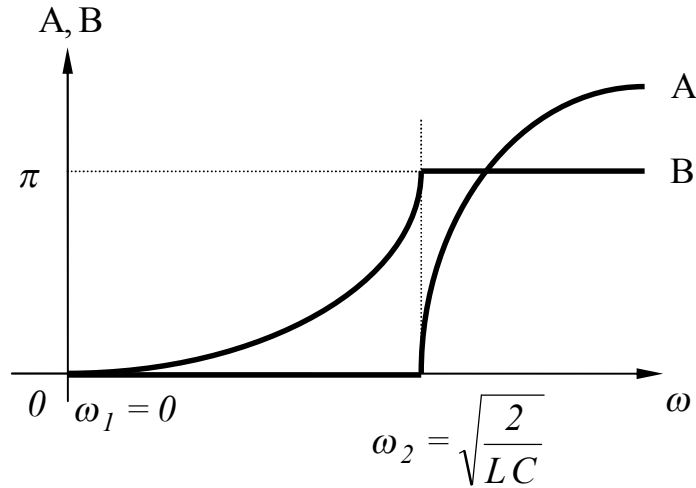
$$A = \cos B.$$

Границы зоны определяются решением уравнения

$$-1 \leq 1 - \omega^2 LC \leq +1,$$

то есть от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ .

В зоне затухания  $chA = A(\omega)$ . Коэффициент затухания «A» изменяется от 0 при  $\omega_2$  и далее постепенно нарастает.



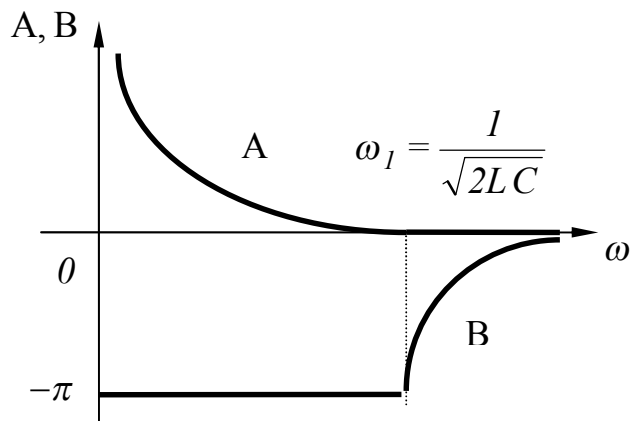
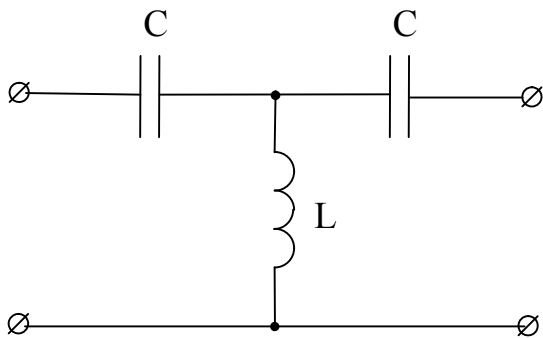
Повторное сопротивление

$$Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{L}{C} (2 - \omega^2 LC)}$$

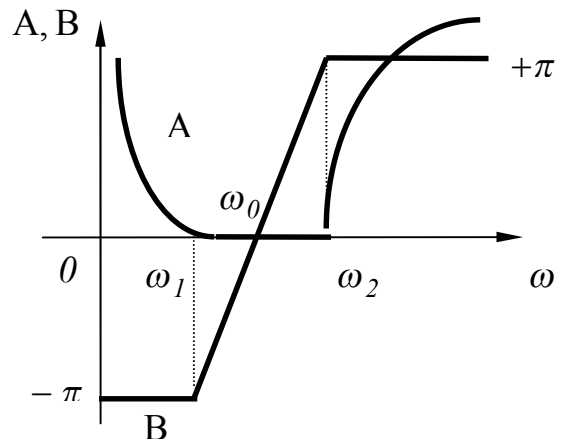
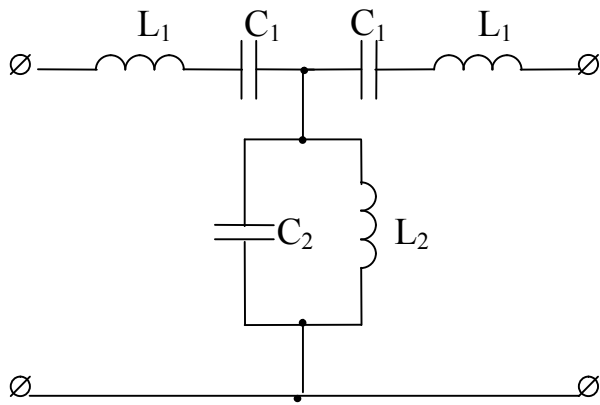
увеличивается с ростом частоты, что делает невозможным согласование нагрузки для всех частот. Характеристики ФНЧ приведены на рисунке.

Аналогичным образом исследуются другие типы фильтров, для которых ниже приводятся электрические схемы и характеристики.

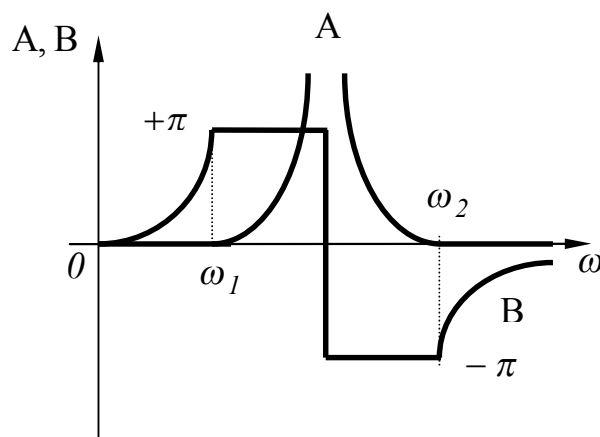
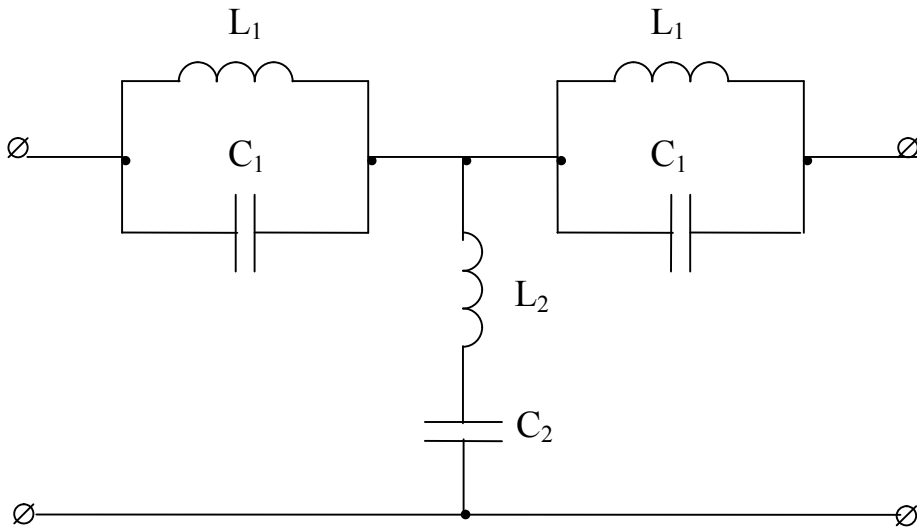
Фильтр верхних частот.



### Полосовой фильтр.



### Заграждающий фильтр.



Главным недостатком фильтров типа «*k*» является невозможность согласования с нагрузкой во всей полосе пропускаемых частот, в результате чего ухудшаются характеристики затухания и в полосе пропускания и в полосе задерживания. До некоторой степени этот недостаток устраняется применением многорезонансных фильтров или применением фильтров типа «*m*».