

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебная программа дисциплины

Учебное пособие

Конспект лекций

➤ **Практикум**

Методические указания по лабораторным работам

Методические указания по самостоятельной работе

**Банк тестовых заданий в системе UniTest**



УДК 621.3.01(07)  
ББК 31.2я73  
И18

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Теоретические основы электротехники» подготовлен в рамках инновационной образовательной программы «Создание инновационного центра подготовки специалистов мирового уровня в области автоматизированных электротехнических комплексов для цветной металлургии и машиностроения», реализованной в ФГОУ ВПО СФУ в 2007 г.

Рецензенты:

Красноярский краевой фонд науки;  
Экспертная комиссия СФУ по подготовке учебно-методических комплексов дисциплин

**Иванова, С. Г.**

И18 Теоретические основы электротехники. Версия 1.0 [Электронный ресурс] : практикум / С. Г. Иванова, В. В. Новиков. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск : ИПК СФУ, 2008. – (Теоретические основы электротехники : УМКД № 11-2007 / рук. творч. коллектива С. Г. Иванова). – 1 электрон. опт. диск (DVD). – Систем. требования : *Intel Pentium* (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц ; 512 Мб оперативной памяти ; 4 Мб свободного дискового пространства ; привод *DVD* ; операционная система *Microsoft Windows 2000 SP 4 / XP SP 2 / Vista* (32 бит) ; *Adobe Reader 7.0* (или аналогичный продукт для чтения файлов формата *pdf*).  
ISBN 978-5-7638-1037-0 (комплекса)  
ISBN 978-5-7638-1531-3 (практикума)  
Номер гос. регистрации в ФГУП НТЦ «Информрегистр» 0320802411 от 27.11.2008 г. (комплекса)

Настоящее издание является частью электронного учебно-методического комплекса по дисциплине «Теоретические основы электротехники», включающего учебную программу, учебное пособие, конспект лекций, методические указания по самостоятельной работе, методические указания по лабораторным работам, контрольно-измерительные материалы «Теоретические основы электротехники. Банк тестовых заданий», а также наглядное пособие «Теоретические основы электротехники. Презентационные материалы».

Приведены методы расчетов линейных электрических цепей при постоянных, синусоидальных и несинусоидальных воздействиях. Дан анализ процессов в однофазных и трехфазных цепях. Рассмотрены нелинейные электрические и магнитные цепи постоянного и переменного токов, переходные процессы, а также цепи с распределенными параметрами. Представлены задачи и пояснения к их решению, а также задачи для самоконтроля с ответами.

Предназначен для студентов направлений подготовки бакалавров 140200.62 «Электроэнергетика» и 140600.62 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» укрупненной группы 140000 «Энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника».

© Сибирский федеральный университет, 2008

Рекомендовано к изданию  
Инновационно-методическим управлением СФУ

Редактор Л. И. Злобина

Разработка и оформление электронного образовательного ресурса: Центр технологий электронного обучения информационно-аналитического департамента СФУ; лаборатория по разработке мультимедийных электронных образовательных ресурсов при КрЦНИТ

Содержимое ресурса охраняется законом об авторском праве. Несанкционированное копирование и использование данного продукта запрещается. Встречающиеся названия программного обеспечения, изделий, устройств или систем могут являться зарегистрированными товарными знаками тех или иных фирм.

Подп. к использованию 30.09.2008

Объем 4 Мб

Красноярск: СФУ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

## Оглавление

<b>ГЛАВА 1 РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА ..</b>	<b>6</b>
Тема 1 Метод эквивалентных преобразований .....	6
Занятие 1 .....	6
Занятие 2 .....	16
Занятие 3 .....	24
Тема 2 Метод напряжения между двумя узлами.....	32
Занятие 1 .....	32
Тема 3 Метод эквивалентного генератора .....	41
Занятие 1 .....	41
<b>ГЛАВА 2 ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ</b>	
<b>СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА .....</b>	<b>53</b>
Тема 1 Расчет действующих значений токов и напряжений.....	53
Занятие 1 .....	53
Тема 2 Символический метод расчета .....	63
Занятие 1 .....	63
Занятие 2 .....	75
Тема 3 Анализ резонансных режимов .....	83
Занятие 1 .....	83
Занятие 2.....	89
Тема 4 Анализ цепей с взаимной индуктивностью .....	99
Занятия 1 и 2 .....	99
<b>ГЛАВА 3 РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ.....</b>	<b>114</b>
Тема 1 Расчет цепей с симметричной системой ЭДС.....	114
Занятие 1 Расчет трехфазной цепи при соединении фаз приемника треугольником.....	119
Занятие 2 Расчет трехфазной цепи при соединении звездой четырёхпроводной с нейтральным проводом.....	133



Занятие 3 Расчет трехфазной цепи при соединении звездой трехпроводной.....	150
Занятие 4 Аварийные режимы в трехфазных цепях.....	166
Тема 2 Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС .....	203
<b>ГЛАВА 4 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....</b>	<b>212</b>
Тема 1 Однофазные цепи несинусоидального тока .....	212
Тема 2 Высшие гармоники в трехфазных цепях .....	227
Занятие 1.....	227
<b>ГЛАВА 5 ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ .....</b>	<b>238</b>
Занятие 1 .....	238
__Занятие 2.....	253
<b>ГЛАВА 6 НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....</b>	<b>274</b>
Занятие 1.....	274
Занятие 2.....	282
Занятие 3.....	290
<b>ГЛАВА 7 МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....</b>	<b>294</b>
Занятие 1.....	294
Занятие 2.....	300
<b>ГЛАВА 8 НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА .....</b>	<b>308</b>
Занятие 1.....	308
<b>ГЛАВА 9 ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ .....</b>	<b>313</b>
Занятие 1.....	313

Занятие 2.....	319
Занятие 3.....	326
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	334
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</b> .....	335

# ГЛАВА 1

## РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Тема 1

#### Метод эквивалентных преобразований

Изучение этой темы очень важно, так как в ней подробно рассматриваются вопросы, необходимые для решения задач всех последующих разделов курса. Учебной программой предусмотрены три практических занятия по данной теме.

#### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться применять законы Ома и Кирхгофа для расчета цепей с одним источником ЭДС.
2. Научиться рассчитывать эквивалентное сопротивление цепи при последовательно-параллельном соединении приемников.
3. Научиться использовать формулу для определения тока в одной из двух пассивных параллельных ветвей, когда общий ток известен.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

В настоящее время под законом Ома понимают соотношения, связывающие напряжение и ток. В схемах замещения цепей постоянного тока имеется один вид приемников – резистор, обладающий сопротивлением  $R$ . По закону Ома напряжение на резисторе пропорционально току в нем. Коэффициент пропорциональности и назван сопротивлением:  $U_R = R I$ .

Первый закон Кирхгофа сформулирован для узла. Узел – это точка в схеме, где сходятся не менее трех ветвей. В настоящее время при использовании ЭВМ для ввода исходных данных узлами выделяют каждый элемент схемы замещения. Эти узлы называют ложными или устранимыми. В дальнейшем речь будет идти о неустраиваемых узлах.

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0.$$

Второй закон Кирхгофа относится к контуру. Алгебраическая сумма напряжений на приемниках в любом контуре равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре:

$$\sum_{k=1}^m R_k I_k = \sum_{i=1}^p E_i.$$

При непосредственном использовании законов Ома и Кирхгофа решение получается громоздким. Расчет схемы с одним источником энергии и несколькими приемниками существенно упрощается при применении метода эквивалентных преобразований. Все приемники заменяют одним с эквивалентным сопротивлением. При этом токи и напряжения в частях схемы, не затронутых преобразованием, должны оставаться неизменными. Находят токи в свернутой схеме. Затем постепенно возвращаются к исходной схеме с определением остальных токов.

Перейдем ко второй целевой задаче.

Преобразование схемы проводят постепенно, выявляя участки с последовательными и параллельными соединениями приемников. Предварительно нужно выявить узлы и ветви. Узел – точка в схеме, где сходятся не менее трех ветвей. Ветвь – участок с одним током между двумя узлами. Элементы, принадлежащие одной ветви, соединены между собой последовательно. В них один ток. Эквивалентное сопротивление последовательно соединенных резисторов равно сумме их сопротивлений:

$$R_3 = \sum_{i=1}^n R_i .$$

При параллельном соединении элементы схемы замещения находятся под одним напряжением и соединены между собой двумя выходными зажимами. Эквивалентная проводимость параллельно соединенных резисторов равна сумме их проводимостей:

$$\frac{1}{R_3} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} .$$

При параллельном соединении двух резисторов с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  эквивалентное сопротивление

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

При параллельном соединении  $n$  одинаковых резисторов сопротивлением  $R$  эквивалентное сопротивление  $R_3 = \frac{R}{n}$ .

Если способ соединения резисторов не совсем ясен, нужно перечертить схему, начиная с одного входного зажима и заканчивая другим, изображая узлы с одинаковыми потенциалами (соединенные ветвью с нулевым сопротивлением) как один узел.

К третьей целевой задаче занятия переходим после того, как схема превращена в одноконтурную с током  $I$ , который определяют по закону Ома:

$$I = \frac{E}{R_3}.$$

Возвращаемся к исходной схеме с определением остальных токов.

При этом удобно пользоваться формулой для определения тока в одной из двух параллельно соединенных пассивных ветвей. Ток в одной из двух параллельно соединенных пассивных ветвей пропорционален току в неразветвленной части схемы. В числителе коэффициента пропорциональности записываем сопротивление другой пассивной ветви, в знаменателе – сумму сопротивлений двух пассивных параллельных ветвей.

Рассмотрим алгоритм решения на примере конкретных задач.

### Задача 1

Напряжение между зажимами батареи измеряли три раза разными вольтметрами, отличающимися друг от друга величиной внутреннего сопротивления:  $R_{V_1} = 400 \text{ Ом}$ ,  $R_{V_2} = 2400 \text{ Ом}$ ,  $R_{V_3} = \infty$ . ЭДС батареи  $E = 75 \text{ В}$ ,  $R_{\text{вн}} = 100 \text{ Ом}$ .

Определить показания вольтметра.

#### Пояснение к решению

Если в условии задачи не приведена схема замещения цепи, то прежде всего ее надо составить (рис. 1.1).

Схема одноконтурная, в ней один ток, направление которого определяет направление ЭДС. Стрелка источника показывает направление увеличения потенциала. Направление тока рекомендуют указывать стрелкой на линии, обозначающей провод. Ток направлен в сторону уменьшения потенциала.

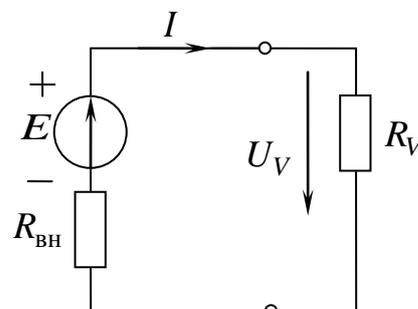


Рис. 1.1

Знаки плюс и минус на схеме говорят лишь о том, что потенциал точки, отмеченной знаком плюс, выше потенциала точки, отмеченной знаком минус.

Напряжение на вольтметре, равное напряжению на зажимах батареи, покажем стрелкой, параллельной резистору, учитывающему вольтметр. Напряжение направлено по току.

#### Решение

1. Напряжение вольтметра по закону Ома:  $U_V = R_V I$ .

2. Ток в цепи по закону Ома:  $I = \frac{E}{R_3}$ .

3. В резисторах один ток, следовательно, они соединены последовательно,  $R_3 = R_{вн} + R_V$ .

Сделаем расчет для трех различных вольтметров:

а)  $R_{V_1} = 400 \text{ Ом}; R_3 = 100 + 400 = 500 \text{ Ом}; I = \frac{75}{500} = 0,15 \text{ А}; U_V = 60 \text{ В}.$

б)  $R_{V_2} = 2400 \text{ Ом}; R_3 = 100 + 2400 = 2500 \text{ Ом}; I = \frac{75}{2500} = 0,03 \text{ А}; U_V = 72 \text{ В}.$

в)  $R_{V_3} = \infty; R_3 = 100 + \infty = \infty; I = \frac{75}{\infty} = 0; U_V = \infty \cdot 0 = \text{неопределенность}.$

Предложенный алгоритм не дает возможности определить показания третьего вольтметра. Обсудим результаты, полученные для двух первых вольтметров. ЭДС батареи  $E = 75 \text{ В}$ , однако первый вольтметр показал  $60 \text{ В}$ , второй –  $72 \text{ В}$ . Разница между ЭДС и показаниями вольтметра – падение напряжения на резисторе, учитывающем внутреннее сопротивление источника. Во втором случае оно меньше, следовательно, второй вольтметр лучше первого. Он отличается большим значением внутреннего сопротивления. Идеальным является вольтметр с  $R_{V_3} = \infty$ . Ток в цепи равен нулю, падение напряжения  $U_{вн} = R_{вн} I = 0$ ,  $U_{V_3} = E = 75 \text{ В}$ .

Уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид  $U_{вн} + U_V = E$ .

После подстановки значений напряжений по закону Ома получим

$$R_{вн} I + R_V I = E.$$

Для третьего вольтметра находим следующее значение:

$$100 \cdot 0 + \infty \cdot 0 = 75, \text{ т. е. } U_{V_3} = \infty \cdot 0 = 75 \text{ В}.$$

## Задача 2

Найти эквивалентное сопротивление цепи, схема замещения которой изображена на [рис. 1.2](#).

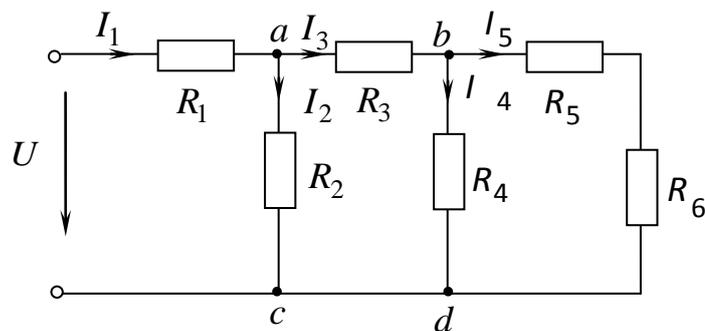


Рис. 1.2

В схеме три узла, потому что точки с и d можно рассматривать как одну. Узлы соединены между собой пятью ветвями.

*Решение*

В пятой ветви два резистора с сопротивлениями  $R_5$  и  $R_6$  соединены между собой последовательно. Их можно заменить одним резистором с эквивалентным сопротивлением  $R_{56} = R_5 + R_6$  (рис. 1.3). В этой схеме резисторы с сопротивлениями  $R_4$  и  $R_{56}$  соединены между собой параллельно. Заменяем их одним с эквивалентным сопротивлением

$$R_{bc} = \frac{R_4 R_{56}}{R_4 + R_{56}} \quad (\text{рис. 1.4}).$$

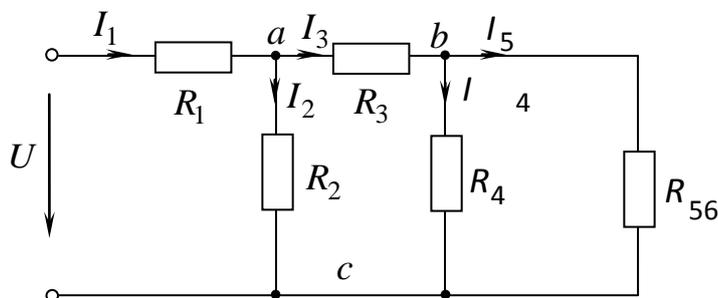


Рис. 1.3

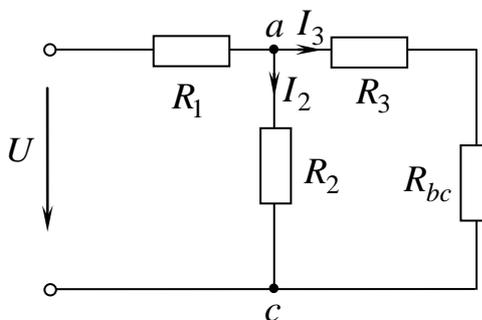


Рис. 1.4

Резисторы с сопротивлениями  $R_3$  и  $R_{bc}$  соединены между собой последовательно. Заменяем их одним резистором с эквивалентным сопротивлением, равным  $R_3 + R_{bc}$ . Дальнейшие преобразования повторяют предыдущие. Эквивалентное сопротивление схемы

$$R_э = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_{bc})}{R_2 + R_3 + R_{bc}}$$

Решите следующие задачи самостоятельно.

### Задача 3

Как изменится яркость первой и второй лампочек после подключения третьей лампочки (рис. 1.5).

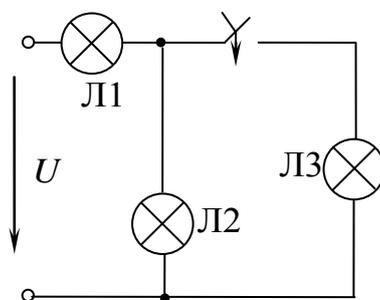


Рис. 1.5

Сопротивления всех лампочек одинаковы.

*Примечание.* Если вы получили ответ, в котором говорится, что яркость лампочки Л1 увеличилась, а лампочки Л2 – уменьшилась, переходите к решению следующей задачи. В противном случае (или для самоконтроля) прочтите [решение задачи 3](#).

### Решение

Яркость лампочек зависит от напряжения на них. По второму закону Кирхгофа напряжение на входе схемы  $U$  до и после замыкания ключа складывается из напряжений на первой и второй лампочках. Так как входное напряжение не изменялось, напряжения на лампочках Л1 и Л2 либо тоже не изменялись, либо изменялись противоположно. Если обозначим сопротивление одной лампочки  $R$ , то до замыкания ключа эквивалентное сопротивление последовательно соединенных Л1 и Л2  $R_э_1 = 2R$ . После замыкания ключа получилась схема со смешанным соединением: лампочки Л2 и Л3 соединены между собой параллельно, лампочка Л1 подключена к ним последовательно. Эквивалентное сопротивление

$$R_{3_2} = R + \frac{R}{2} = 1,5 R.$$

Эквивалентное сопротивление уменьшилось, поэтому общий ток увеличился, увеличилось напряжение на первой лампочке, следовательно, и ее яркость. Яркость второй лампочки соответственно уменьшится.

### Задача 4

Найти входное эквивалентное сопротивление схемы, изображенной на [рис. 1.6](#).

#### Пояснение к решению

Если перерисовать схему ([рис. 1.7](#)) в соответствии с данными рекомендациями, то способ соединения резисторов становится очевидным.

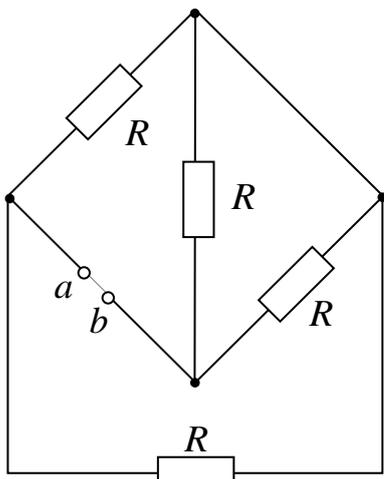


Рис. 1.6

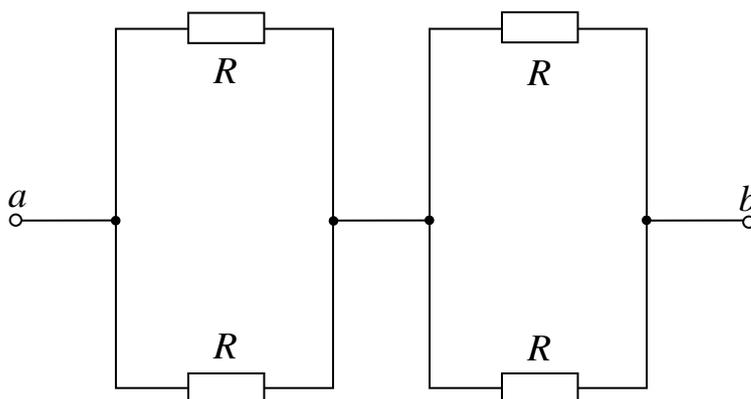


Рис. 1.7

Ответ:  $R_3 = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R.$

### Задача 5

Найти входное эквивалентное сопротивление схемы [рис. 1.8](#).

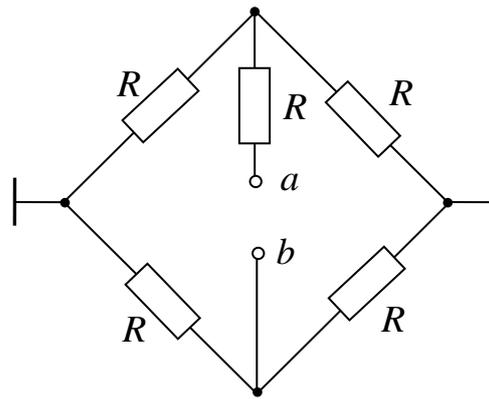


Рис. 1.8

*Пояснение к решению*

Знак  $\perp$  означает, что потенциал данной точки равен нулю.

Ответ:  $R_3 = 2R$ .

**Задача 6**

Вычислить токи в схеме [рис. 1.9](#), если  $U = 120$  В,  $R_1 = 18$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом.

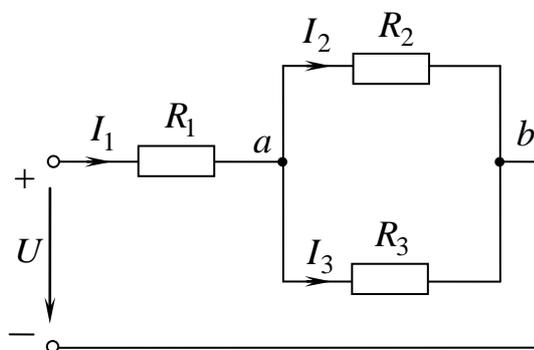


Рис. 1.9

*Пояснение к решению*

Выявить в схеме узлы (а и b), найти ветви, их соединяющие, указать направления токов. Цепь на входе не разорвана. Источник ЭДС на схеме часто не изображают, так как он находится на электростанции. Показывают напряжение на его зажимах. Ветвь с током  $I_1$  является активной, ветви с токами  $I_2$  и  $I_3$  – пассивные.

*Решение*

1. Эквивалентное сопротивление цепи

$$R_3 = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 18 + \frac{30 \cdot 20}{30 + 20} = 30 \text{ Ом.}$$

2. Ток в свернутой схеме  $I_1$  (так как источник ЭДС не подвергался преобразованиям) вычисляем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{U}{R_3} = \frac{120}{30} = 4 \text{ А.}$$

3. Вычислим ток в одной из двух пассивных параллельных ветвей:

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot I_1 = \frac{20}{30 + 20} \cdot 4 = 1,6 \text{ А.}$$

4. Ток  $I_3$  можно вычислить по аналогичной формуле либо с помощью первого закона Кирхгофа:

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot I_1 = \frac{30}{30 + 20} \cdot 4 = 2,4 \text{ А,}$$

либо  $I_3 = I_1 - I_2 = 4 - 1,6 = 2,4 \text{ А.}$

Следующие задачи решите для самоконтроля.

### Задача 7

Вычислить эквивалентное сопротивление схемы [рис. 1.10](#).

Ответ:  $R_3 = 1\frac{1}{3}R$ .

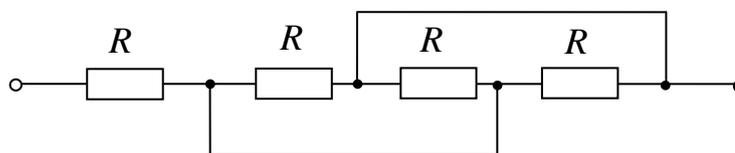


Рис. 1.10

### Задача 8

Вычислить эквивалентное сопротивление схемы [рис. 1.11](#).

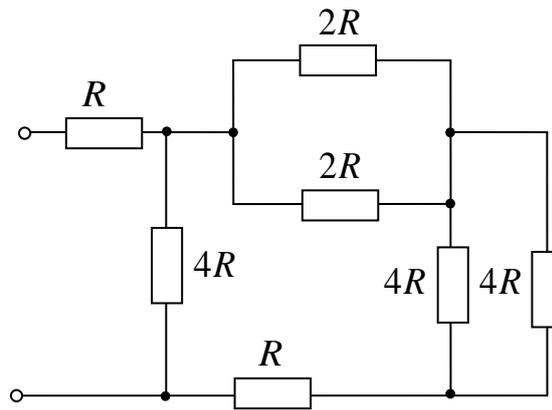


Рис. 1.11

Ответ:  $R_3 = 3R$ .

### Задача 9

Вычислить эквивалентное сопротивление схемы [рис. 1.12](#).

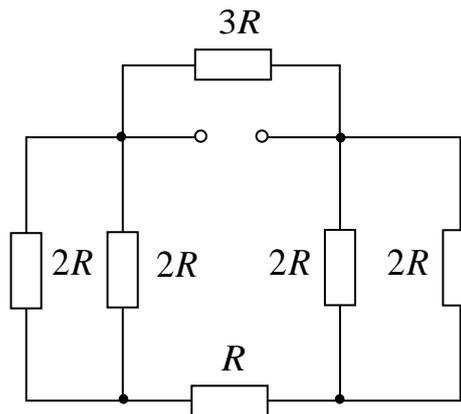


Рис. 1.12

Ответ:  $R_3 = 1,5R$ .

### Задача 10

Вычислить сопротивление  $R_2$  в схеме [рис. 1.13](#), если  $R_1 = 3$  Ом, амперметр А показывает ток 25 А, амперметр  $A_2$  – ток 5 А.

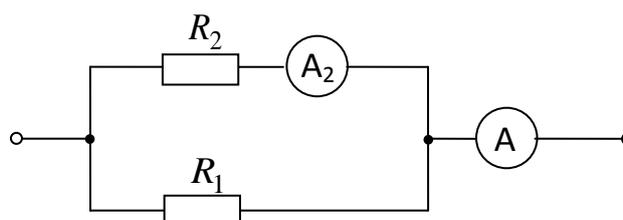


Рис. 1.13

Ответ:  $R_2 = 12 \text{ Ом}$ .

### Задача 11

Линия передачи электроэнергии расположена на двух опорах, сопротивление изоляции которых составляет 20 кОм. Напряжение на входе  $U = 480 \text{ В}$ . Человек, стоя на земле, взялся одной рукой за провод. Сопротивление человека равно 5 кОм. Погибнет ли человек, если «убойный» ток порядка 0,1 А?

#### Пояснение к решению

Прежде чем решать задачу, следует составить схему замещения исследуемой цепи.

Ответ: нет, так как ток через человека  $I_{\text{ч}} = 0,016 \text{ А}$ .

### Занятие 2

*Цели занятия:*

1. Научиться определять напряжение между любыми точками схемы.
2. Научиться проверять правильность расчета токов, составляя уравнение баланса мощностей.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

Активная ветвь, названная так из-за наличия источника ЭДС, изображена на [рис. 1.14](#).

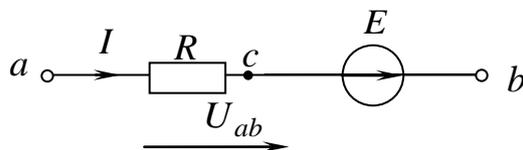


Рис. 1.14

Между концами ветви возникает напряжение  $U_{ab}$ . Индексация показывает направление ко второму индексу. Напряжение – это разность потенциалов между двумя точками, т. е.  $U_{ab} = V_a - V_b$ .

Определим потенциал точки а, исходя из потенциала  $V_b$ . Рассчитаем изменение потенциала промежуточной точки с ([рис. 1.14](#)) по сравнению с  $V_b$ . Между точками b и c расположен источник ЭДС, т. е. потенциал точки с отличается от потенциала точки b на величину E. Стрелка источника показывает направление увеличения потенциала. Следовательно, потенциал точки с ниже потенциала точки b. Между точками с и а находится резистор с сопротивлением R. Потенциал  $V_a$  отличается от потенциала  $V_c$  величиной напряжения на резисторе  $RI$ . Ток направлен от большего потенциала к

меньшему. Так как на пути от с к а перемещение происходит навстречу току, потенциал  $V_a$  выше потенциала  $V_c$ .

$$\text{Итак, } V_a = V_b - E + RI,$$

$$V_a - V_b = -E + RI,$$

$$\text{но } V_a - V_b = U_{ab}, \text{ т. е. } U_{ab} = -E + RI.$$

Можно определить напряжение между двумя любыми точками, рассчитав изменение потенциалов между ними. При этом нужно вести расчет в сторону увеличения потенциала, т. е. от второго индекса к первому.

Решим уравнение относительно тока:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} = G(U_{ab} + E),$$

где  $G = \frac{1}{R}$  – проводимость ветви. Это выражение называют законом Ома для активной ветви.

Последнее выражение можно составить, исходя из следующих рассуждений. Для появления тока в ветви (рис. 1.14) есть два условия: наличие разности потенциалов между концами ветви и действие источника ЭДС. Если направление ЭДС совпадает с направлением тока, она способствует его появлению и должна быть записана в уравнение со знаком плюс. В противном случае – со знаком минус. Напряжение  $U_{ab}$  и ток  $I$  направлены одинаково (от точки а к точке b), поэтому напряжение  $U_{ab}$  должно быть записано в уравнение со знаком плюс. Рассуждая таким образом, получаем для тока ветви прежнее выражение.

Перейдем к рассмотрению второй целевой задачи.

Баланс мощностей – интерпретация закона сохранения энергии в электротехнике. Мощность источников энергии равна мощности потребителей:  $P_{\Gamma} = R_{\text{H}}$ , причем

$$P_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n E_i I_i + \sum_{j=1}^m U_j J_j,$$

где  $\sum_{i=1}^n E_i I_i$  – мощность источников ЭДС;  $\sum_{j=1}^m U_j J_j$  – мощность источников тока;  $J_j$  – токи источников тока.

Эти суммы алгебраические. Источник может вырабатывать и потреблять электрическую энергию (заряд аккумулятора).

Если направления ЭДС и тока через источник ЭДС совпадают, мощность источника записывают в уравнение баланса мощностей с положительным знаком. Он работает в режиме генератора. При

противоположных направлениях ЭДС и тока мощность в уравнении баланса учитывают с отрицательным знаком (режим потребителя).

Определение знака мощности источника тока поясняет [рис. 1.15](#), на котором показана разметка зажимов источника тока, вырабатывающего (а) или потребляющего (б) электрическую энергию.

Ток  $I_0$  и напряжение  $U$  направлены в сторону уменьшения потенциала, что и позволяет разметить зажимы источника.

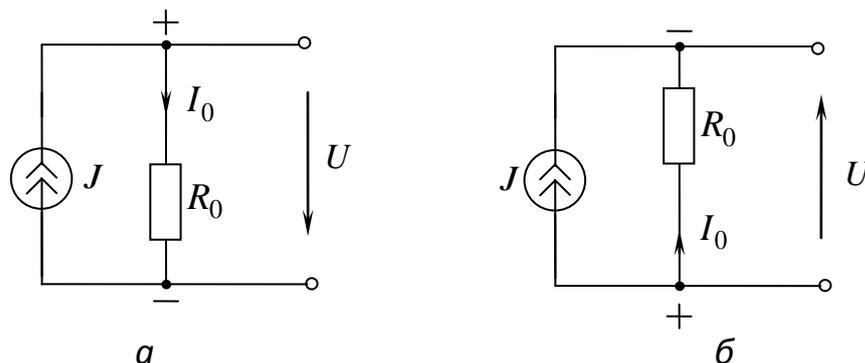


Рис. 1.15

Мощность потребителей (нагрузок)

$$P_{\text{н}} = \sum_{k=1}^1 U_k I_k = \sum_{k=1}^1 R_k I_k^2 .$$

Эта сумма арифметическая. Погрешность расчета не должна превышать (1–3) %.

### Задача 1

На [рис. 1.16](#) показана часть схемы замещения электрической цепи. Вычислить напряжение  $U_{ab}$ , если  $I_1 = 3\text{А}$ ,  $I_2 = 2,4\text{ А}$ ,  $E_1 = 70\text{В}$ ,  $R_1 = 8\text{Ом}$ ,  $R_2 = 5\text{Ом}$ ,  $E_2 = 20\text{ В}$ .

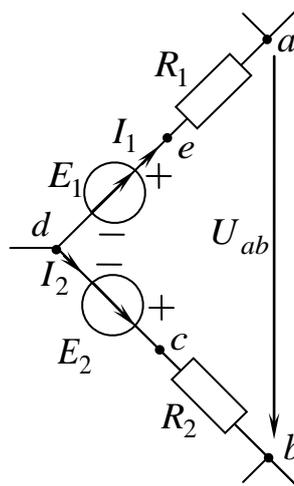


Рис. 1.16

*Пояснение к решению*

Нужно расставить на схеме промежуточные точки за каждым элементом. Расчет изменения потенциалов ведем от точки  $b$  к точке  $a$ , т. е. в сторону увеличения потенциала. Разметим зажимы у источников ЭДС.

*Решение*

Потенциал точки  $c$  изменился по сравнению с потенциалом  $V_b$  на величину напряжения  $R_2 I_2$ . Так как на пути от  $b$  к  $c$  перемещение происходит против тока, потенциал  $V_c$  выше потенциала  $V_b$ . Между точками  $c$  и  $d$  находится источник ЭДС  $E_2$ . Разметка зажимов источника показывает, что потенциал  $V_d$  меньше потенциала  $V_c$  на величину  $E_2$ . Потенциал точки  $e$   $V_e$  больше потенциала  $V_d$  на величину  $E_1$ . Потенциал  $V_a$  меньше потенциала  $V_e$  на величину напряжения  $R_1 I_1$ , так как ток  $I_1$  направлен от точки  $e$  к точке  $a$ .

Таким образом,  $U_{ab} = R_2 I_2 - E_2 + E_1 - R_1 I_1 = 5 \cdot 2,4 - 20 + 70 - 8 \cdot 3 = 38$  В.

**Задача 2**

Вычислить напряжение  $U_{ab}$  в схеме [рис. 1.17](#), если  $E = 45$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом,  $R_4 = 5$  Ом.

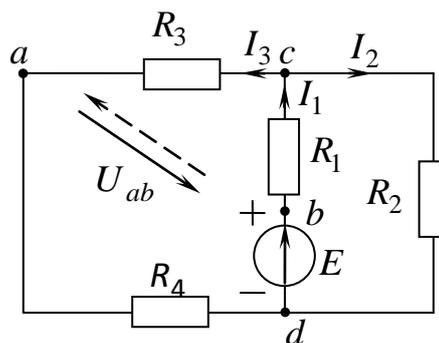


Рис. 1.17

*Пояснение к решению*

Сначала нужно разобраться в топологии схемы, т. е. найти узлы и ветви. В схеме два неустранимых узла: с и d. Между ними находятся три ветви. Число токов равно числу ветвей. В схеме с одним источником энергии при последовательно-параллельном соединении приемников направления токов являются очевидными. Если направления токов указаны неверно, то при их расчете методом эквивалентных преобразований напряжение  $U_{ab}$  будет вычислено неправильно. Сначала укажем направление тока в активной ветви  $I_1$ , которое определено направлением ЭДС источника. В узле с (рис. 1.17) ток  $I_1$  разветвляется на токи  $I_2$  и  $I_3$ .

*Решение*

1. Запишем выражение напряжения  $U_{ab}$  как разность потенциалов  $V_a$  и  $V_b$ :

$$U_{ab} = -R_1 I_1 - R_3 I_3,$$

либо так:

$$U_{ab} = -E + R_4 I_3.$$

2. Расчет нужных для вычисления напряжения  $U_{ab}$  токов проведем методом эквивалентных преобразований. В резисторах с сопротивлениями  $R_3$  и  $R_4$  один ток, значит, они соединены последовательно. Их можно заменить одним с эквивалентным сопротивлением  $R_{34} = R_3 + R_4$ .

Резистор с сопротивлением  $R_{34}$  и резистор с сопротивлением  $R_2$  подключены к точкам с и d, т. е. находятся под одним напряжением  $U_{cd}$ , следовательно, соединены параллельно. После их замены одним резистором с эквивалентным сопротивлением получаем одноконтурную схему с последовательным соединением элементов. Таким образом,

$$R_3 = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = 20 + \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = 30 \text{ Ом.}$$

3. Вычислим ток  $I_1$  в свёрнутой схеме (ток в источнике ЭДС остался неизменным):

$$I_1 = \frac{E}{R_3} = \frac{45}{30} = 1,5 \text{ А.}$$

4. Вычислим ток  $I_3$  по формуле для определения тока в одной из двух пассивных параллельных ветвей:

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_{34}} \cdot I_1 = \frac{30}{30 + 15} = 1 \text{ А.}$$

Напряжение  $U_{ab} = -20 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1 = -40 \text{ В}$ , либо  $U_{ab} = -45 + 5 \cdot 1 = -40 \text{ В}$ .

*Обратите внимание! Если ответ получился со знаком минус, это означает, что потенциал точки  $b$  выше потенциала точки  $a$ . Напряжение направлено противоположно указанному на [рис. 1.17](#). Действительные направления токов и напряжений рекомендуется указывать пунктирными стрелками параллельно выбранным первоначально.*

5. Для проверки правильности расчета токов составим уравнение баланса мощностей цепи:

$$E \cdot I_1 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_3^2.$$

Ток

$$I_2 = I_1 - I_3 = 0,5 \text{ А.}$$

$$P_r = 45 \cdot 1,5 = 67,5 \text{ Вт.}$$

$$P_n = 20 \cdot 1,5^2 + 30 \cdot 0,5^2 + 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1^2 = 67,5 \text{ Вт.}$$

$$67,5 \text{ Вт} = 67,5 \text{ Вт.}$$

$$P_r = P_n.$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 3

Вычислить напряжение  $U_{ab}$  в схеме [рис. 1.18](#), если  $E = 90 \text{ В}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 60 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 40 \text{ Ом}$ .

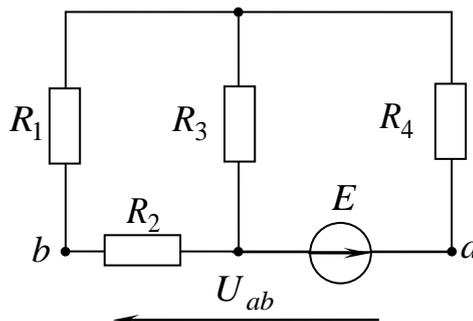


Рис. 1.18

Составить уравнение баланса мощностей.

Ответ:  $U_{ab} = 80 \text{ В}$ .

### Задача 4

Вычислить мощность источника тока на рис. 1.19, если  $J = 0,1 \text{ А}$ ,  $G_0 = 10^{-3} \text{ См}$ ,  $I = 90 \text{ мА}$ . Определить, в каком режиме работает источник тока: генератора или нагрузки.

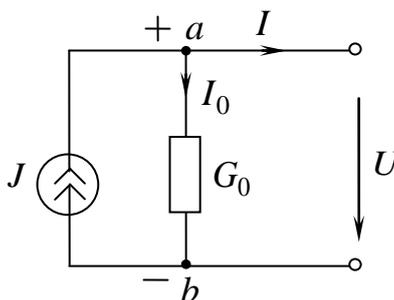


Рис. 1.19

### Решение

1. Произвольно направим ток  $I_0$  и вычислим его по первому закону Кирхгофа:

$$J - I_0 - I = 0.$$

Отсюда

$$I_0 = J - I = 0,1 - 0,09 = 0,01 \text{ А}.$$

Знак плюс означает, что направление тока  $I_0$  выбрано верно.

2. Вычислим напряжение на зажимах источника тока по закону Ома:

$$U = R_0 \cdot I_0 = \frac{I_0}{G_0} = \frac{0,01}{10^{-3}} = 10 \text{ В.}$$

3. Определим мощность источника тока по формуле  $P = U \cdot J = 10 \cdot 0,1 = 1$  Вт. Так как значение тока  $I_0$  получилось со знаком плюс, то потенциал  $V_a$  выше потенциала  $V_b$ , следовательно, источник тока вырабатывает электроэнергию.

Следующие задачи предлагаем для самоконтроля.

### Задача 5

Определить показания вольтметра в схеме [рис. 1.20](#), если  $R_V \rightarrow \infty$ ,  $I_1 = 1 \text{ А}$ ,  $I_3 = 2 \text{ А}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_2 = 5 \text{ В}$ .

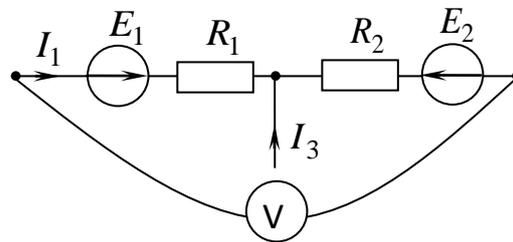


Рис. 1.20

Ответ:  $U_V = 3 \text{ В}$ .

### Задача 6

Вычислить напряжение  $U_{ab}$  в схеме [рис. 1.21](#), если  $E = 4 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ .

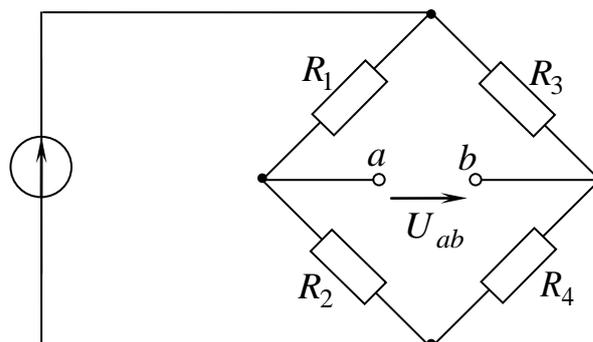


Рис. 1.21

### Пояснение к решению

При расчете токов, нужных для вычисления  $U_{ab}$ , нет необходимости искать эквивалентное сопротивление. Напряжение между двумя узлами

равно ЭДС, поэтому токи в пассивных ветвях могут быть найдены сразу по закону Ома.

Ответ:  $U_{ab} = 2 \text{ В}$ .

### Задача 7

В схеме [рис. 1.22](#) вольтметр показывает напряжение 1 В. Вычислить значение  $E$ , если  $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_V \rightarrow \infty$ .

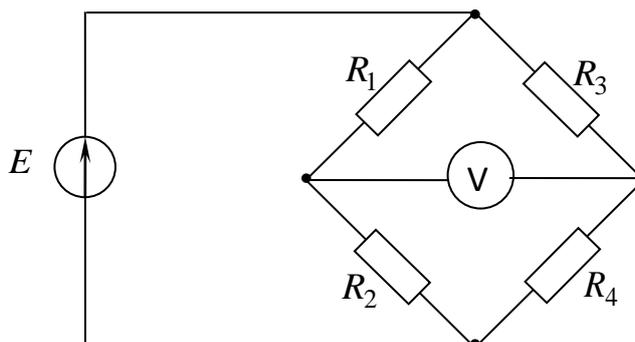


Рис. 1.22

Ответ:  $E = 5 \text{ В}$ .

### Задача 8

Вычислить напряжение  $U_{ab}$  в схеме [рис. 1.23](#), если  $E = 27 \text{ В}$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 18 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 12 \text{ Ом}$ . Проверить правильность расчета токов с помощью баланса мощностей.

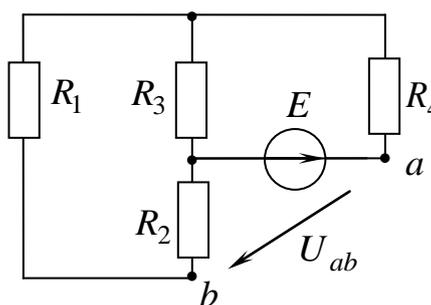


Рис. 1.23

Ответ:  $U_{ab} = 21 \text{ В}$ .

### Занятие 3

*Цели занятия:*

1. Научиться рассчитывать токи методом эквивалентных преобразований в схемах с одним источником тока.

2. Научиться рассчитывать токи методом эквивалентных преобразований в схемах, не содержащих последовательно-параллельных соединений резисторов.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

Расчет схем с источником тока проще, чем с источником ЭДС, так как общий ток известен. Свертывание схемы производят до получения трех ветвей: активной с известным током источника и двух пассивных, токи которых находят по рассмотренным нами формулам.

Перейдем к рассмотрению второй целевой задачи.

Если схема не содержит последовательно-параллельные соединения резисторов, необходимо соединение треугольником (рис. 1.24, а) заменить эквивалентным соединением звездой (рис. 1.24, б) или выполнить обратную замену.

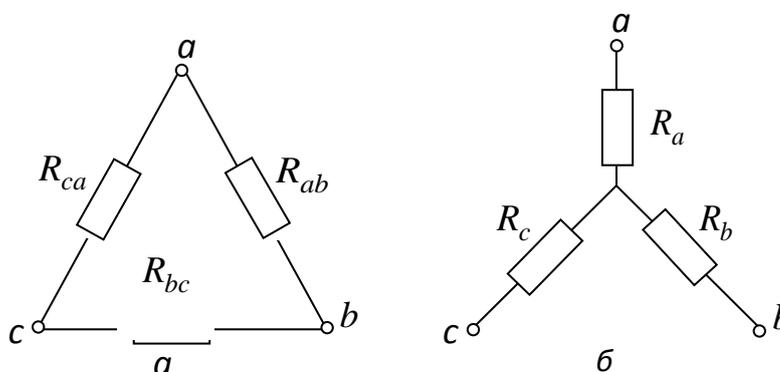


Рис. 1.24

Структура формул эквивалентных преобразований проста для запоминания:

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \quad R_b = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}},$$

$$R_c = \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c},$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a}, \quad R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b}.$$

После преобразования резисторы в схеме будут соединены последовательно-параллельно, их можно заменить одним с эквивалентным сопротивлением.

### Задача 1

Вычислить токи в цепи, схема замещения которой изображена на [рис. 1.25](#), если  $J = 120$  мА,  $R_1 = 10$  кОм,  $R_2 = 0,5$  кОм,  $R_3 = 12$  кОм,  $R_4 = 1,5$  кОм,  $R_5 = 6$  кОм.

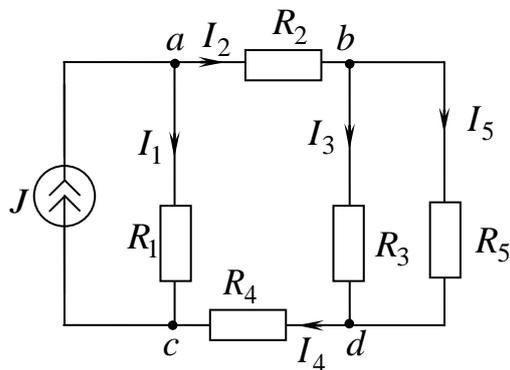


Рис. 1.25

*Пояснение к решению*

Сначала нужно разобраться в топологии схемы. Она содержит четыре узла (a, b, c, d) и шесть ветвей. Направления токов в них вполне определены. Ток в ветви с источником тока известен. Ток  $I_2 = I_3 + I_5 = I_4$ . Следовательно, нужно вычислить четыре неизвестных тока.

*Решение*

1. Для свертывания схемы выявляем последовательные и параллельные соединения резисторов. Ветвей, содержащих более одного резистора, в схеме нет, т. е. нет последовательных соединений. Резисторы с сопротивлениями  $R_3$  и  $R_5$  соединены параллельно, заменим их одним с эквивалентным сопротивлением:

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 10^6}{(12 + 6) \cdot 10^3} = 4 \text{ кОм.}$$

2. Получившаяся после этого преобразования схема изображена на [рис. 1.26](#). В ней три ветви.

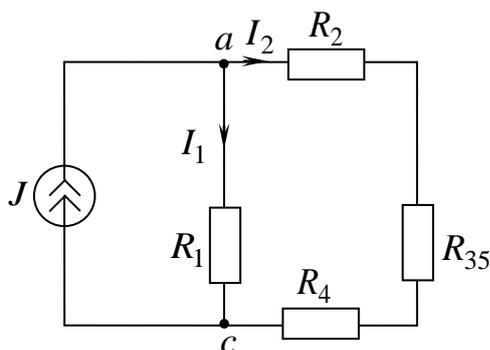


Рис. 1.26

Дальнейшее преобразование схемы не требуется. Наиболее рационально вычислить ток  $I_2$  по формуле для определения тока в пассивной параллельной ветви:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_{35} + R_4} \cdot J = 75 \text{ мА.}$$

3. По первому закону Кирхгофа вычислим ток  $I_1$ :

$$I_1 = J - I_2 = 45 \text{ мА.}$$

4. Возвращаемся к исходной схеме с определением оставшихся токов. Ток  $I_2$  является общим для токов  $I_3$  и  $I_5$ , поэтому

$$I_3 = \frac{R_5}{R_3 + R_5} \cdot I_2 = \frac{6}{6+12} \cdot \frac{10^3}{10^3} \cdot 75 \cdot 10^{-3} = 25 \text{ мА,}$$

$$I_5 = I_2 - I_3 = 50 \text{ мА.}$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 2

Вычислить напряжение  $U_{ab}$  в схеме [рис. 1.27](#), если  $J = 4 \text{ А}$ ,  $R_1 = R_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$ .

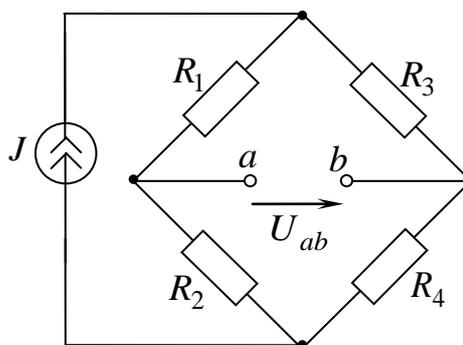


Рис. 1.27

Ответ:  $U_{ab} = 4 \text{ В}$ .

### Задача 3

Вычислить токи в цепи, схема замещения которой представлена на [рис. 1.28](#), если  $E = 30 \text{ В}$ ,  $R_1 = 180 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 120 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 80 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 120 \text{ Ом}$ .

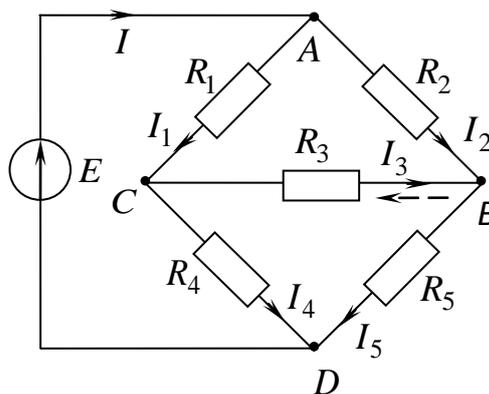


Рис. 1.28

*Пояснение к решению*

Найдем узлы, ветви, направим токи. В этой схеме нет резисторов, которые были бы соединены между собой последовательно или параллельно. Резисторы с сопротивлениями  $R_1, R_2$  и  $R_3$  соединены между собой треугольником. К нему присоединены резисторы с сопротивлениями  $R_4$  и  $R_5$ . Можно считать, что треугольником соединены резисторы с сопротивлениями  $R_4, R_3$  и  $R_5$ . К нему присоединены резисторы с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ . Нередко студенты делают ошибки, полагая, что в предлагаемой схеме два треугольника. Но схема содержит только пять резисторов. Можно считать соединенными звездой резисторы с сопротивлениями  $R_1, R_3$  и  $R_4$  либо с сопротивлениями  $R_2, R_3$  и  $R_5$ . Нужно выбрать один из вариантов соединения.

*Решение*

1. Заменяя соединенные треугольником резисторы с сопротивлениями  $R_1, R_2$  и  $R_3$  эквивалентным соединением звездой, получим схему, изображенную на [рис. 1.29](#).

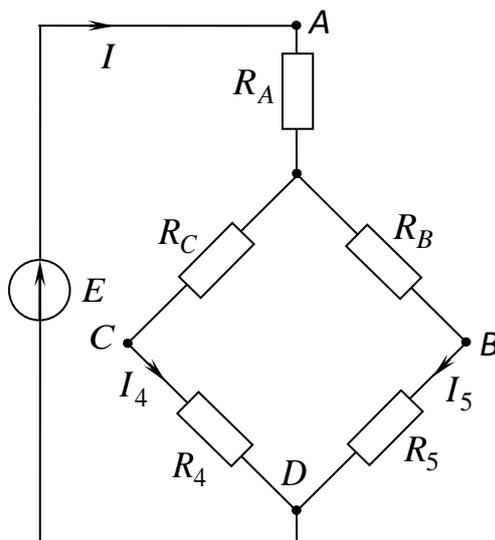


Рис. 1.29

В этой схеме два узла, соединенных между собой тремя ветвями. Так как источник ЭДС и резисторы с сопротивлениями  $R_4$  и  $R_5$  не подвергались преобразованиям, токи в них не изменились.

В схеме [рис. 1.29](#) резисторы соединены последовательно-параллельно, их можно заменить одним с эквивалентным сопротивлением:

$$R_3 = R_A + \frac{(R_C + R_4) \cdot (R_B + R_5)}{(R_C + R_4 + R_B + R_5)},$$

где

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{180 \cdot 60}{180 + 60 + 120} = 30 \text{ Ом},$$

$$R_B = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{60 \cdot 120}{360} = 20 \text{ Ом},$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{180 \cdot 120}{360} = 60 \text{ Ом}.$$

Тогда

$$R_3 = 30 + \frac{(60 + 80) \cdot (20 + 120)}{60 + 80 + 20 + 120} = 100 \text{ Ом}.$$

2. Вычислим ток в свернутой схеме по закону Ома:

$$I = \frac{E}{R_3} = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ А.}$$

3. Определим токи в пассивных параллельных ветвях:

$$I_4 = \frac{R_B + R_5}{R_B + R_5 + R_C + R_4} \cdot I = 0,15 \text{ А,}$$

$$I_5 = I - I_4 = 0,15 \text{ А.}$$

Так как сопротивления пассивных параллельных ветвей оказались одинаковыми,  $I_4 = I_5 = I/2$ , хотя сопротивления  $R_4$  и  $R_5$  не равны друг другу.

4. Возвращаемся к исходной схеме с определением оставшихся токов.

По закону Ома ток  $I_1 = \frac{U_{AC}}{R_1}$ . Найдем напряжение  $U_{AC}$  как изменение потенциала между точками А и С:

$$U_{AC} = -R_4 I_4 + E = -80 \cdot 0,15 + 30 = 18 \text{ В.}$$

Тогда

$$I_1 = \frac{18}{180} = 0,1 \text{ А.}$$

5. Токи  $I_2$  и  $I_3$  можно найти по первому закону Кирхгофа.

Для узла А

$$I - I_1 - I_2 = 0.$$

Отсюда

$$I_2 = I - I_1 = 0,2 \text{ А.}$$

Для узла С

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0.$$

Отсюда

$$I_3 = I_1 - I_4 = 0,1 - 0,15 = -0,05 \text{ А.}$$

Знак минус показывает, что направление тока  $I_3$  выбрано неправильно. Действительное направление тока  $I_3$  укажем пунктирной стрелкой.

Следующую задачу решите самостоятельно.

Задача 4

Вычислить токи в схеме, представленной на [рис. 1.30](#), если  $J = 5 \text{ А}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 5 \text{ Ом}$ .

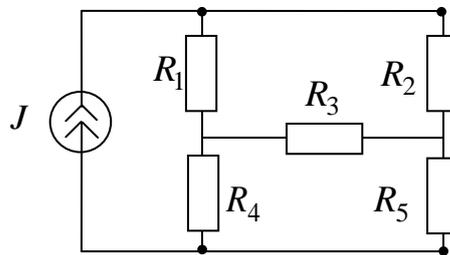


Рис. 1.30

Ответ:  $I_1 = 2,67 \text{ А}$ ,  $I_2 = 2,33 \text{ А}$ ,  $I_3 = 0,33 \text{ А}$ ,  $I_4 = 3 \text{ А}$ ,  $I_5 = 2 \text{ А}$ .

Для самоконтроля решите задачи [5](#) и [6](#).

Задача 5

Вычислить все токи в схеме, представленной на [рис. 1.31](#), если  $J = 2 \text{ А}$ ,  $R_5 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_6 = R_7 = 10 \text{ Ом}$ .

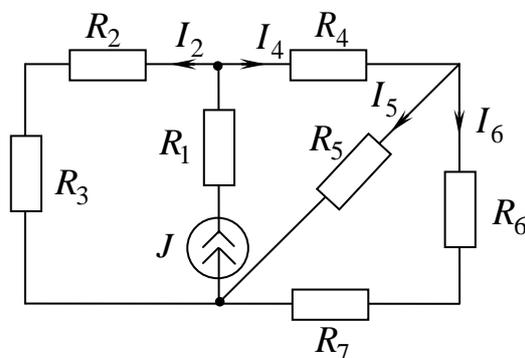


Рис. 1.31

Ответ:  $I_2 = 1 \text{ А}$ ,  $I_4 = 1 \text{ А}$ ,  $I_5 = 0,5 \text{ А}$ ,  $I_6 = 0,5 \text{ А}$ .

Задача 6

Рассчитать все токи в схеме, представленной на [рис.1.32](#), если  $E = 12 \text{ В}$ ,  $R = 3 \text{ Ом}$ .

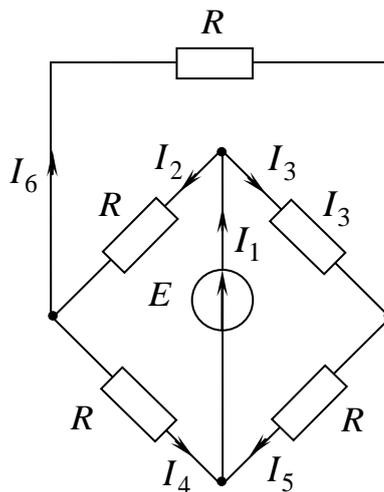


Рис. 1.32

Ответ:  $I_1 = 4 \text{ A}$ ,  $I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = 2 \text{ A}$ ,  $I_6 = 0 \text{ A}$ .

## Тема 2

### Метод напряжения между двумя узлами

Этот метод используют для расчета токов в электрических цепях с двумя узлами, которые часто встречаются на практике.

#### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться пользоваться формулой для определения напряжения в схеме с двумя узлами.

2. Научиться применять закон Ома для расчета режима отдельной ветви схемы.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

Формулу для определения напряжения между двумя узлами в общем виде можно записать следующим образом:

$$U_{ab} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i + \sum_{j=1}^m J_j}{\sum_{i=1}^l G_i},$$

где  $G_i$  – проводимости ветвей;  $n$  – число ветвей, содержащих источники ЭДС;  $m$  – число ветвей, содержащих источники тока;  $l$  – число ветвей с проводимостями, отличными от нуля.

Число слагаемых в числителе равно числу активных ветвей; с положительным знаком записывают  $E$  и  $J$ , направленные к первому в индексе напряжения узлу.

Сумма в знаменателе формулы – арифметическая.

Для решения второй целевой задачи нужно использовать материал, рассмотренный в первой целевой задаче практического занятия 2 темы 1.

### Задача 1

Вычислить все токи в схеме, представленной на [рис. 1.33](#), если  $E_1 = 100$  В,  $J_2 = 3$  А,  $E_3 = 20$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 40$  Ом,  $R_3 = 50$  Ом.

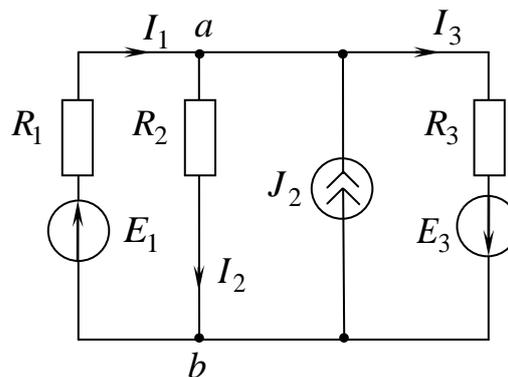


Рис. 1.33

### Решение

1. Выявим узлы, ветви, направим токи.
2. Вычислим напряжение  $U_{ab}$  по формуле

$$U_{ab} = \frac{G_1 E_1 + J_2 - G_3 E_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

где  $G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{20}$  См,  $G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{40}$  См,  $G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{50}$  См.

Подставив в формулу численные значения, получим  $U_{ab} = 80$  В.

3. По закону Ома для ветвей

$$I_1 = G_1(E_1 - U_{ab}) = 1 \text{ А};$$

$$I_2 = G_2 U_{ab} = 2 \text{ А};$$

$$I_3 = G_3(E_3 + U_{ab}) = 2 \text{ А}.$$

### Пояснение к решению

Студентам, затрудняющимся в написании закона Ома для ветви, можно посоветовать сначала записать напряжение между двумя узлами как изменение потенциалов в ветви с искомым током.

Например, для первой ветви

$$U_{ab} = E_1 - R_1 I_1 .$$

Отсюда 
$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = G_1 (E_1 - U_{ab}) .$$

Проверим правильность решения по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + J_2 - I_3 &= 0; \\ 1 - 2 + 3 - 2 &= 0; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

### Задача 2

Вычислить все токи в схеме, изображенной на [рис. 1.34](#), если  $E_1 = 40$  В,  $J_1 = 20$  А,  $J_3 = 10$  А,  $R_1 = R_2 = 5$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом.

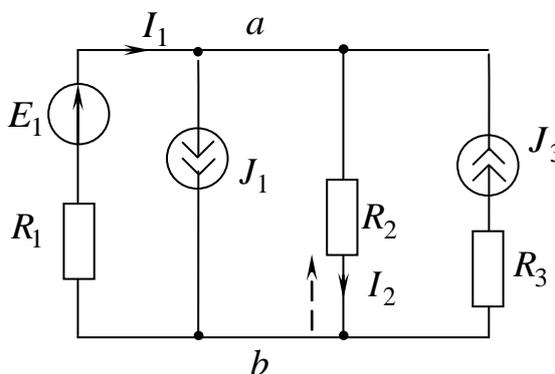


Рис. 1.34

### Решение

1. Вычислим напряжение между двумя узлами  $U_{ab}$ :

$$U_{ab} = \frac{G_1 E_1 - J_1 + J_3}{G_1 + G_2} = -5 \text{ В.}$$

Проводимость ветви – величина, обратная сопротивлению всей ветви. Сопротивление ветви с источником тока  $J_3$  равно сумме  $R_3 + \infty = \infty$ , поэтому проводимость этой ветви равна 0.

2. Вычислим токи ветвей по закону Ома:

$$I_1 = G_1(E_1 - U_{ab}) = 9 \text{ А};$$

$$I_2 = G_2 \cdot U_{ab} = -1 \text{ А}.$$

Проверим правильность решения по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 - J_1 - I_2 + J_3 = 0;$$

$$9 - 20 + 1 + 10 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 3

Вычислить токи в схеме [рис. 1.35](#), если  $J_1 = 1 \text{ А}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $E_2 = 16 \text{ В}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $E_3 = 4 \text{ В}$ ,  $R_3 = 2 \text{ Ом}$ .

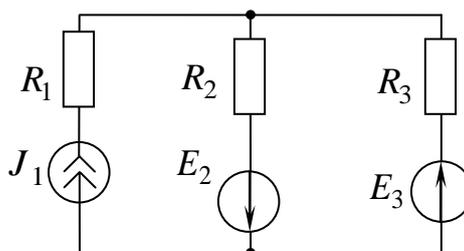


Рис. 1.35

Ответ:  $I_2 = 2,2 \text{ А}$ ,  $I_3 = 1,2 \text{ А}$ .

### Задача 4

Определить, какие из трех источников ЭДС в схеме [рис. 1.36](#) генерируют энергию, а какие потребляют, если  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_2 = 20 \text{ В}$ ,  $E_3 = 20 \text{ В}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ .

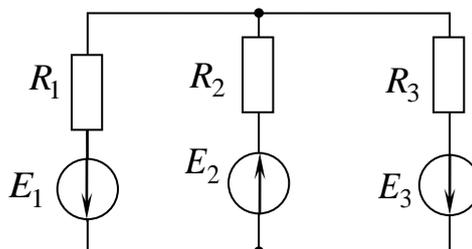


Рис. 1.36

Ответ: Все три источника ЭДС энергию вырабатывают.

Примечание. При затруднении с ответом следует обратиться ко второй целевой задаче практического занятия 2 темы 1.

Задачи [5–8](#) решите для самоконтроля.

### Задача 5

Определить показания вольтметра в схеме [рис. 1.37](#), если  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 20$  В,  $E_3 = 120$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 50$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом.

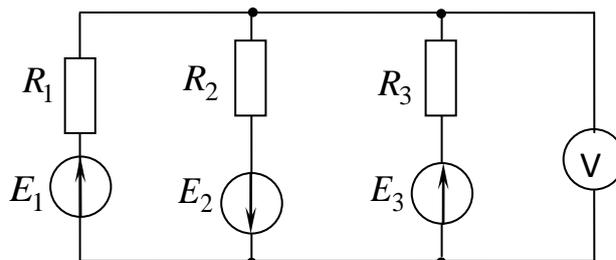


Рис. 1.37

Ответ:  $U_V = 80$  В.

### Задача 6

Вычислить значение ЭДС  $E_2$  в схеме [рис. 1.38](#), если  $R_1 = R_2 = R_3 = 1$  Ом,  $E_1 = 1$  В,  $I_3 = 1$  А.

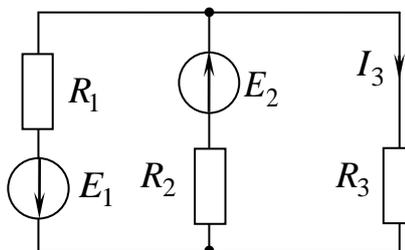


Рис. 1.38

Ответ:  $E_2 = 4$  В.

### Задача 7

Вычислить токи в схеме [рис. 1.39](#) методом напряжения между двумя узлами, если  $E = 27$  В,  $R_1 = 12$  Ом,  $R_2 = 18$  Ом,  $R_3 = 6$  Ом,  $R_4 = 3$  Ом.

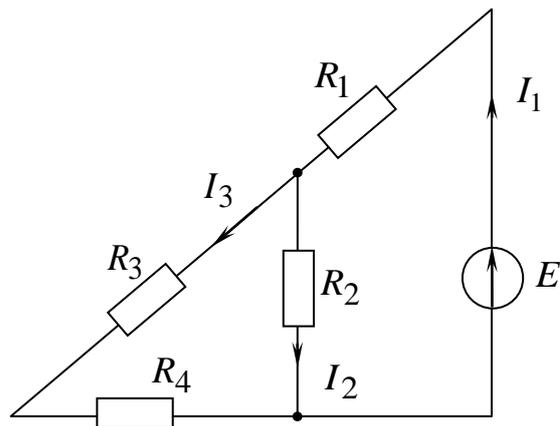


Рис. 1.39

*Пояснение к решению*

Предварительно нужно выявить узлы и ветви, направить токи. В ветви с током  $I_3$  два резистора, поэтому проводимость этой ветви  $G_3 = \frac{1}{R_3 + R_4}$ .

Ответ:  $I_1 = 1,5$  А,  $I_2 = 0,5$  А,  $I_3 = 1$  А.

**Задача 8**

Вычислить все токи в схеме [рис. 1.40](#), если  $E_1 = E_3 = 40$  В,  $J_2 = 10$  А,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$  Ом.

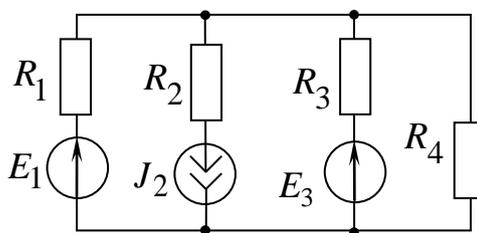


Рис. 1.40

Ответ:  $I_1 = 10$  А,  $I_3 = 10$  А,  $I_4 = 10$  А.

Метод напряжения между двумя узлами можно использовать для расчета токов в некоторых схемах с числом узлов больше двух. Рассмотрим конкретные примеры.

**Задача 9**

Рассчитать все токи в схеме ([рис. 1.41](#)), если  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 40$  В,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10$  Ом,  $R_5 = R_6 = 20$  Ом. Составить баланс мощностей.

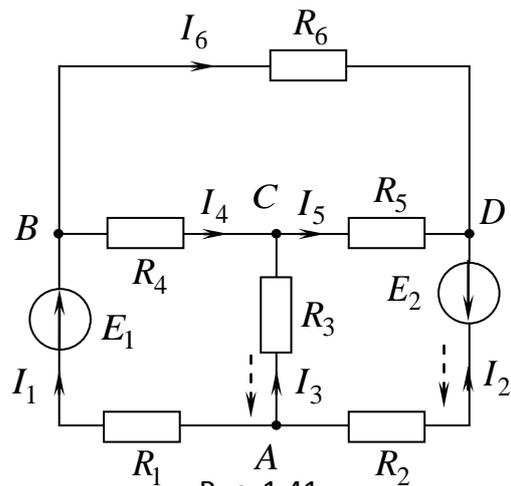


Рис. 1.41

Решение

1. Заменяем треугольник сопротивлений  $R_4 - R_5 - R_6$  эквивалентным соединением звездой. Получившаяся после преобразования схема представлена на [рис. 1.42](#).

2. Вычислим сопротивления эквивалентной звезды:

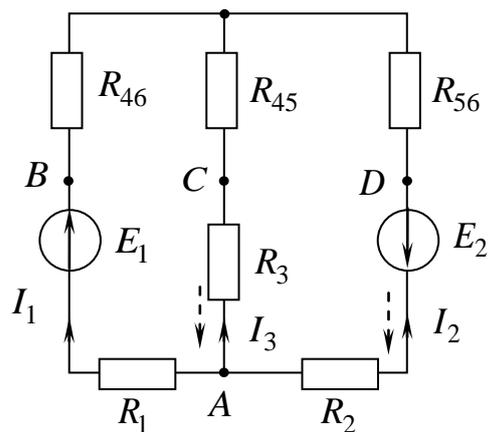


Рис. 1.42

$$R_{46} = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20 + 20} = 4 \text{ Ом};$$

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{10 \cdot 20}{50} = 4 \text{ Ом};$$

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{20 \cdot 20}{50} = 8 \text{ Ом}.$$

3. Вычислим токи методом напряжения между двумя узлами.

Напряжение

$$U_{FA} = \frac{\frac{E_1}{R_{46} + R_1} - \frac{E_2}{R_{56} + R_2}}{\frac{1}{R_{46} + R_1} + \frac{1}{R_{45} + R_3} + \frac{1}{R_{56} + R_2}} = \frac{\frac{100}{4 + 10} - \frac{40}{8 + 10}}{\frac{1}{4 + 10} + \frac{1}{4 + 10} + \frac{1}{8 + 10}} = 24,79 \text{ В.}$$

Запишем напряжение  $U_{FA}$  как разность потенциалов для каждой ветви:

$$\begin{aligned} U_{FA} &= -R_1 I_1 + E_1 - R_{46} I_1; \\ U_{FA} &= -R_3 I_3 - R_{45} I_3; \\ U_{FA} &= -R_2 I_2 - E_2 - R_{56} I_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E_1 - U_{FA}}{R_1 + R_{46}} = \frac{100 - 24,79}{10 + 4} = 5,37 \text{ А}; \\ I_2 &= \frac{-E_2 - U_{FA}}{R_2 + R_{56}} = \frac{-40 - 24,79}{10 + 8} = -3,6 \text{ А}; \\ I_3 &= -\frac{U_{FA}}{R_3 + R_{45}} = -\frac{24,79}{10 + 4} = -1,77 \text{ А}. \end{aligned}$$

Укажем на схеме пунктирными стрелками правильные направления токов.

4. Вернемся к исходной схеме с определением остальных токов. По закону Ома

$$I_4 = \frac{U_{BC}}{R_4}, \quad I_5 = \frac{U_{CD}}{R_5}, \quad I_6 = \frac{U_{BD}}{R_6}.$$

Нужные для вычисления токов напряжения найдем в схеме [рис. 1.41](#), рассчитав изменение потенциала от второго индекса к первому:

$$U_{BC} = -R_3 I_3 - R_1 I_1 + E_1 = -10 \cdot 1,77 - 10 \cdot 5,37 + 100 = 28,6 \text{ В};$$

$$U_{CD} = E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 40 - 10 \cdot 3,6 + 10 \cdot 1,77 = 21,7 \text{ В};$$

$$U_{BD} = E_2 - R_2 I_2 - R_1 I_1 + E_1 = 40 - 10 \cdot 3,6 - 10 \cdot 5,37 + 100 = 50,3 \text{ В.}$$

Тогда  $I_4 = \frac{28,6}{10} = 2,86$  А;  $I_5 = \frac{21,7}{20} = 1,09$  А;  $I_6 = \frac{50,3}{20} = 2,51$  А.

5. Составим уравнение баланса мощностей с учетом правильных направлений токов:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2.$$

После подстановки получим:

$$100 \cdot 5,37 + 40 \cdot 3,6 = 10 \cdot 5,37^2 + 10 \cdot 3,6^2 + 10 \cdot 1,77^2 + 10 \cdot 2,86^2 + 20 \cdot 1,09^2 + 20 \cdot 2,51^2;$$

$$681 \text{ Вт} = 680,9 \text{ Вт}.$$

Полученный результат подтверждает правильность решения.

### Задача 10

Вычислить токи в схеме (рис. 1.43), если  $E_1 = 125$  В,  $E_0 = 120$  В,  $R_1 = 40$  Ом,  $R_2 = 36$  Ом,  $R_3 = R_4 = 60$  Ом.

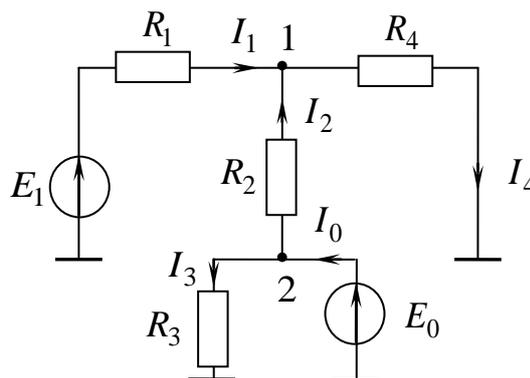


Рис. 1.43

#### Пояснение к решению

Целесообразно все заземленные точки объединить в одну с нулевым потенциалом. Очевидно, что потенциал узла 2 равен ЭДС  $E_0$ . Неизвестным является только потенциал узла 1.

#### Решение

1. Составим уравнение для узла 1:

$$(G_1 + G_2 + G_4)V_1 - G_2 E_0 = G_1 E_1.$$

Отсюда

$$V_1 = U_{10} = \frac{G_1 E_1 + G_2 E_0}{G_1 + G_2 + G_4} = \frac{0,025 \cdot 125 + 0,0277 \cdot 120}{0,025 + 0,0277 + 0,0166} = 92,78 \text{ В.}$$

2. Вычислим токи:

$$I_1 = G_1 (E_1 - V_1) = 0,025(125 - 92,78) = 0,8 \text{ А;}$$

$$I_2 = G_2 (V_2 - V_1) = 0,0277(120 - 92,78) = 0,756 \text{ А;}$$

$$I_3 = G_3 \cdot V_2 = 0,0166 \cdot 120 = 2 \text{ А;}$$

$$I_4 = G_4 V_1 = 0,0166 \cdot 92,78 = 1,55 \text{ А;}$$

$$I_0 = I_2 + I_3 = 0,756 + 2 = 2,756 \text{ А.}$$

### Тема 3

#### Метод эквивалентного генератора

Этот метод дает возможность вычислить ток в одной ветви схемы, а также при необходимости заменить часть схемы эквивалентной ей активной ветвью.

#### Занятие 1

*Цель занятия:* научиться заменять разветвленную цепь эквивалентной ей одноконтурной с подлежащим определению током.

Рассмотрим порядок решения целевой задачи.

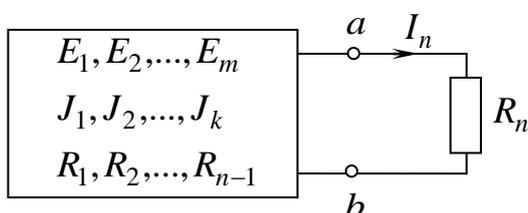


Рис. 1.44

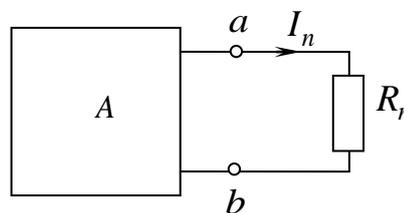


Рис. 1.45

Прежде всего схему разбиваем на две части: резистор с сопротивлением  $R_n$  (ток в котором  $I_n$  нужно вычислить) и всю остальную часть схемы, которая будет питать этот резистор ([рис. 1.44](#)).

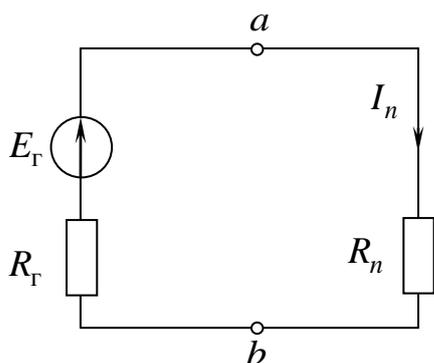


Рис. 1.46

Заключенная в прямоугольник часть схемы является активным двухполюсником (рис. 1.45).

Любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным ему генератором (рис. 1.46). ЭДС генератора равна напряжению между зажимами  $a$  и  $b$  активного двухполюсника в режиме холостого хода. Внутреннее сопротивление генератора равно эквивалентному сопротивлению пассивного двухполюсника относительно входных зажимов.

Пассивный двухполюсник получают из активного, закорачивая идеальные источники ЭДС и разрывая идеальные источники тока.

Таким образом, исходную схему произвольной конфигурации можно заменить одноконтурной схемой, а расчетный ток вычислить по следующей формуле:

$$I_n = \frac{E_g}{R_g + R_n} = \frac{U_{xx}}{R_g + R_n}.$$

### Задача 1

Вычислить ток  $I_5$  в схеме рис. 1.47, если  $E = 36$  В,  $R_1 = R_4 = 6$  Ом,  $R_2 = R_3 = 3$  Ом,  $R_5 = 2$  Ом.

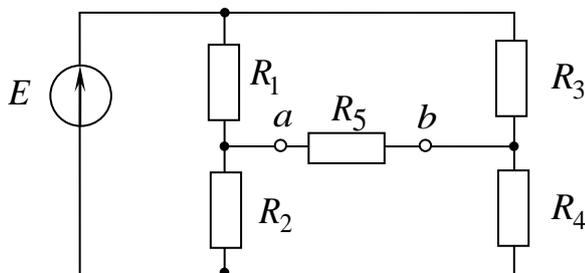


Рис. 1.47

### Решение

1. Делим схему на две части: резистор сопротивлением  $R_5$  и активный двухполюсник, который заменим эквивалентным ему генератором. Для этого нужно определить  $E_g = U_{xx}$  и  $R_g$ .

2. Чертим схему активного двухполюсника в режиме холостого хода относительно резистора сопротивлением  $R_5$  (рис. 1.48).

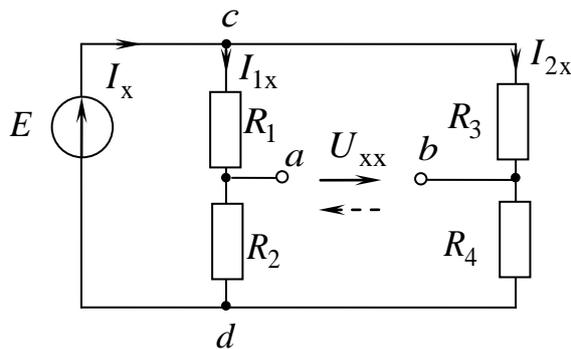


Рис. 1.48

3. Записываем выражение для напряжения  $U_{xx}$ , рассчитав изменение потенциалов между точками  $b$  и  $a$ :  $U_{xx} = R_3 I_{2x} - R_1 I_{1x}$ . Предварительно нужно выявить узлы ( $c$  и  $d$ ) и ветви, указать направления токов, начиная с активной ветви. Чтобы отличать токи в ветвях цепи в режиме холостого хода от токов в этих же ветвях в исходной схеме, им присваивают индекс «х».

4. Вычисляем токи  $I_{1x}$  и  $I_{2x}$  наиболее рациональным методом.

Напряжение  $U_{cd} = E$ , поэтому расчетные токи можно определить по закону Ома:

$$I_{1x} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{36}{9} = 4 \text{ А}, \quad I_{2x} = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{36}{9} = 4 \text{ А}.$$

Тогда

$$U_{xx} = E_{\Gamma} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = -12 \text{ В}.$$

Пунктирной стрелкой укажем действительное направление  $U_{xx}$ .

*Примечание.* Аналогичная задача по определению  $U_{ab}$  была рассмотрена в практическом занятии 2 темы 1.

4. Проводим расчет сопротивления  $R_{\Gamma}$  – эквивалентного сопротивления пассивного двухполюсника (рис. 1.49) относительно входных зажимов  $a$  и  $b$ . Пассивный двухполюсник получаем из активного, закорачивая источник ЭДС.

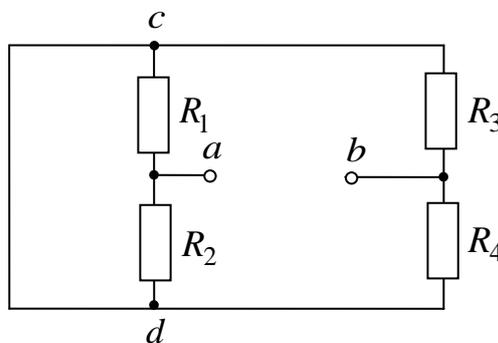


Рис. 1.49

На [рис. 1.50](#) пассивный двухполюсник перерисован в более наглядном виде ([см. занятие 1 темы 1](#)).

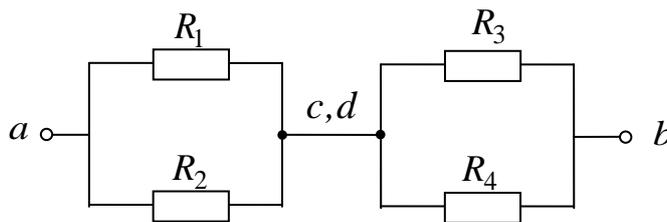


Рис. 1.50

В этой схеме

$$R_{\Gamma} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 4 \text{ Ом.}$$

6. Вычислим ток  $I_5$  по формуле

$$I_5 = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_5} = \frac{12}{4 + 2} = 2 \text{ А.}$$

### Задача 2

Вычислить ток  $I_2$  в схеме [рис. 1.51](#), если  $E = 144 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_5 = 24 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = R_4 = 12 \text{ Ом}$ .

Решение

1. Разделим схему на две части.
2. Изобразим схему активного двухполюсника ([рис. 1.52](#)).

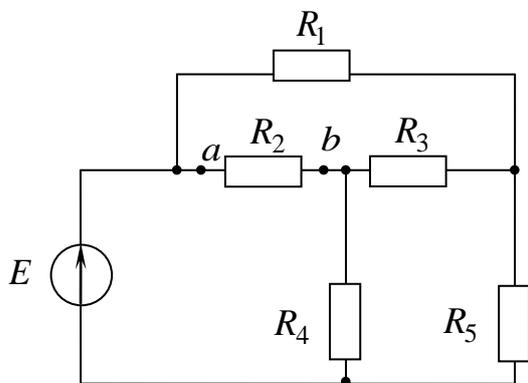


Рис. 1.51

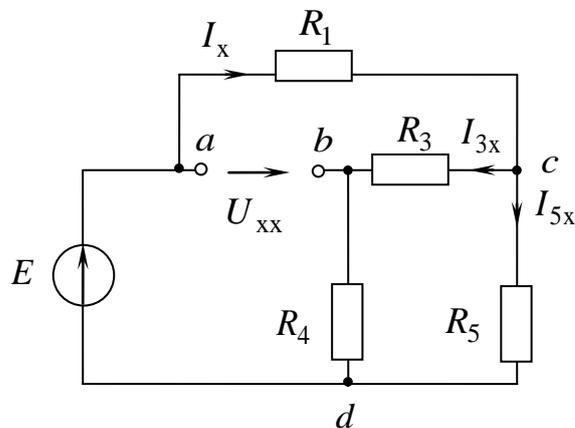


Рис. 1.52

3. Запишем выражение для напряжения  $U_{xx}$ , предварительно выявив узлы, ветви, направив токи:  $U_{xx} = -R_4 I_{3x} + E$ .

4. Определим ток  $I_{3x}$  методом эквивалентных преобразований. Эквивалентное сопротивление схемы

$$R_3 = R_1 + \frac{R_5(R_3 + R_4)}{R_5 + R_3 + R_4} = 36 \text{ Ом.}$$

Ток  $I_x$  в свернутой схеме определим по закону Ома:

$$I_x = \frac{E}{R_3} = \frac{144}{36} = 4 \text{ А.}$$

Тогда ток  $I_{3x} = \frac{R_5}{R_3 + R_4 + R_5} \cdot I_x = 2 \text{ А.}$

Напряжение  $U_{xx} = -12 \cdot 2 + 144 = 120 \text{ В.}$

Примечание. Подробное решение аналогичной задачи приведено в [занятии 2 темы 1](#).

5. Рассчитаем сопротивление  $R_r$ , равное эквивалентному сопротивлению пассивного двухполюсника ([рис. 1.53](#)) относительно входных зажимов  $a$  и  $b$ . Более наглядно последний изображен на [рис. 1.54](#).

Эквивалентное сопротивление

$$R_r = \frac{\left( \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_5} + R_3 \right) \cdot R_4}{\frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_5} + R_3 + R_4} = 8 \text{ Ом.}$$

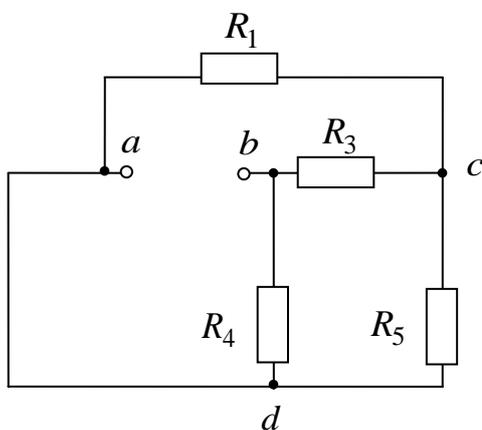


Рис. 1.53

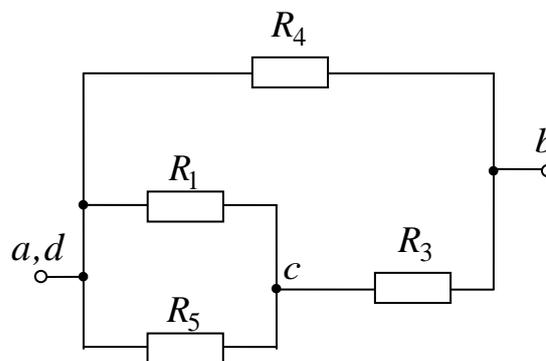


Рис. 1.54

6. Вычислим ток  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_2} = \frac{120}{8 + 4} = 10 \text{ А.}$$

### Задача 3

Вычислить ток  $I_6$  в схеме [рис. 1.55](#), если  $E = 40 \text{ В}$ ,  $J = 3 \text{ А}$ ,  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 2,8 \text{ Ом}$ .

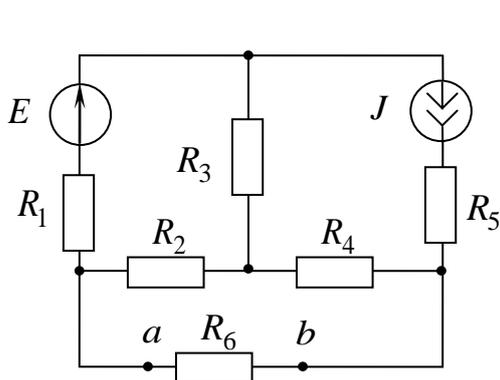


Рис. 1.55

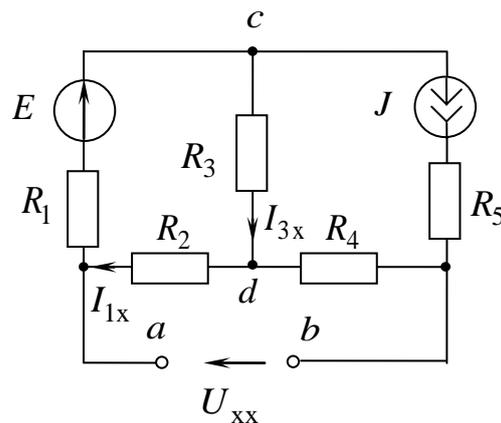


Рис. 1.56

Решение

1. Разделим схему на две части.
2. Изобразим схему активного двухполюсника ([рис. 1.56](#)).
3. Запишем выражение для напряжения  $U_{xx}$ :  $U_{xx} = R_2 I_{1x} + R_4 J$ .
4. Вычислим ток  $I_{1x}$  методом напряжения между двумя узлами:

$$U_{cd} = \frac{\frac{1}{R_1 + R_2} \cdot E - J}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}} = 5 \text{ В.}$$

$$I_{1x} = \frac{E - U_{cd}}{R_1 + R_2} = \frac{40 - 5}{10} = 3,5 \text{ А.}$$

*Примечание.* Подробное решение аналогичной задачи приведено в практическом [занятии 1 темы 2](#).

Тогда напряжение  $U_{xx} = 6 \cdot 3,5 + 2 \cdot 3 = 27 \text{ В}$ .

5. Рассчитаем сопротивление  $R_{\Gamma}$ . Схема пассивного двухполюсника приведена на [рис. 1.57](#).

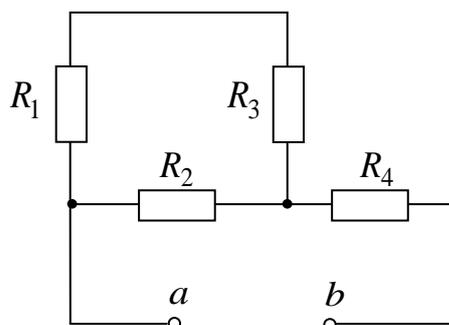


Рис. 1.57

$$R_{\Gamma} = R_4 + \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3} = 6,2 \text{ Ом.}$$

6. Вычислим ток  $I_6$ :

$$I_6 = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_6} = \frac{27}{6,2 + 2,8} = 3 \text{ А.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

#### Задача 4

Вычислить ток  $I_2$  в схеме [рис. 1.58](#), если  $E = 72 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_4 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = R_5 = 6 \text{ Ом}$ .

Ответ:  $I_2 = 6 \text{ А}$ .

#### Задача 5

Вычислить ток  $I_1$  в схеме [рис. 1.59](#), если  $J = 1 \text{ А}$ ,  $E_1 = 1 \text{ В}$ ,  $R_1 = 1,6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = R_6 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 4 \text{ Ом}$ .

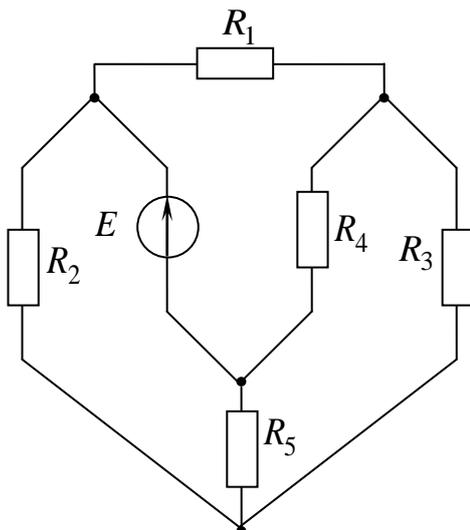


Рис. 1.58

Ответ:  $I_1 = 0,2$  А.

Следующие задачи даны для самопроверки.

### Задача 6

Вычислить ток  $I_2$  в схеме [рис. 1.60](#), если  $E_1 = 10$  В,  $E_3 = 4$  В,  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 1$  Ом,  $R_3 = 4$  Ом.

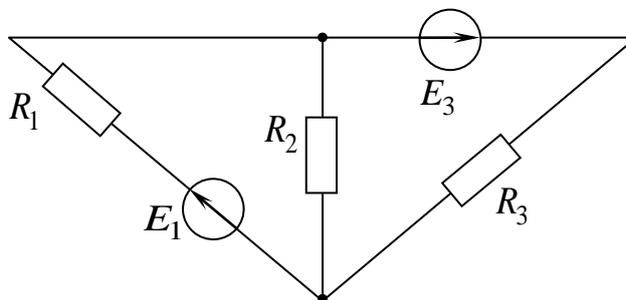


Рис. 1.60

Ответ:  $I_2 = 1$  А.

### Задача 7

Вычислить ток  $I_3$  в схеме [рис. 1.61](#), если  $E = 45$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 5,9$  Ом,  $R_4 = 5$  Ом,  $R_5 = 30$  Ом.

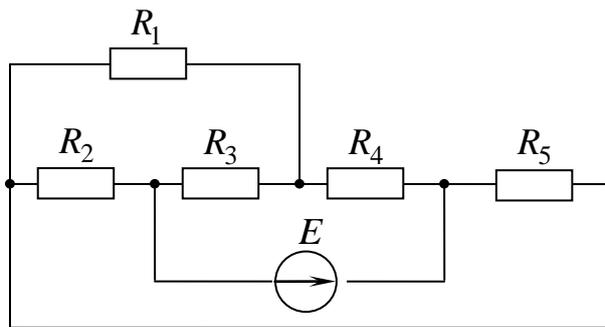


Рис. 1.61

Ответ:  $I_3 = 4$  А.

### Задача 8

В схеме [рис. 1.62](#) установить зависимость  $I_2 = f(R_2)$ , если  $E_1 = 36$  В,  $E_4 = 18$  В,  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 7,6$  Ом,  $R_3 = 7$  Ом,  $R_4 = R_5 = 10$  Ом.

#### Пояснение к решению

Зависимость  $I_2 = f(R_2)$  получаем при решении методом эквивалентного генератора, так как  $I_2 = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_2}$ . Значения  $E_{\Gamma}$  и  $R_{\Gamma}$  нужно вычислить, величину сопротивления  $R_2$  полагаем переменной.

#### Решение

1. Вычислим  $E_{\Gamma} = U_{xx}$  на входных зажимах активного двухполюсника ([рис. 1.63](#)):

$$U_{xx} = E_1 - R_1 I_{1x}.$$

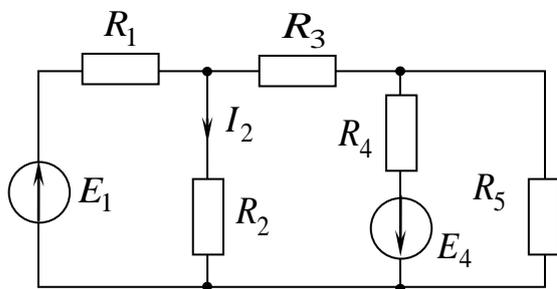


Рис. 1.62

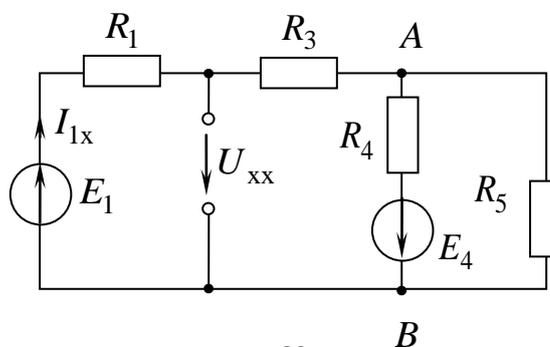


Рис. 1.63

2. Ток  $I_{1x}$  рационально определить методом напряжения между двумя узлами A и B:

$$U_{ABx} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_3} - \frac{E_4}{R_4}}{\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \frac{\frac{36}{3+7} - \frac{18}{10}}{\frac{1}{3+7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{3,6 - 1,8}{0,3} = 6 \text{ В.}$$

$$\text{Тогда ток } I_{1x} = \frac{1}{R_1 + R_3} (E_1 - U_{ABx}) = \frac{1}{10} (36 - 6) = 3 \text{ А.}$$

$$\text{Напряжение } U_{xx} = E_r = E_1 - R_1 I_{1x} = 36 - 3 \cdot 3 = 27 \text{ В.}$$

Вычислим  $R_r$  – эквивалентное сопротивление пассивного двухполюсника ([рис. 1.64](#)) относительно входных зажимов:

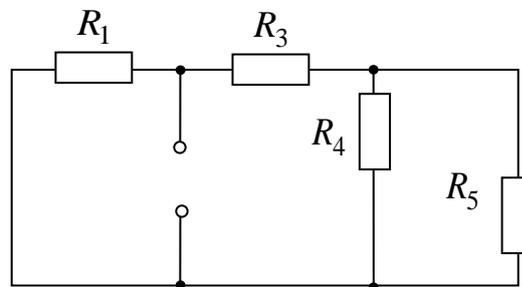


Рис. 1.64

$$R_r = \frac{R_1 \cdot (R_3 + R_{45})}{R_1 + R_3 + R_{45}} = \frac{3 \cdot (7 + 5)}{3 + 7 + 5} = 2,4 \text{ Ом,}$$

$$\text{где } R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = 5 \text{ Ом.}$$

3. Получим зависимость

$$I_2 = f(R_2) = \frac{E_r}{R_r + R_2} = \frac{27}{2,4 + R_2}.$$

Теорему об активном двухполюснике и эквивалентном ему генераторе можно использовать для преобразования сложных схем в одноконтурные, что позволяет существенно упростить решение многих задач. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

### Задача 9

Рассчитать все токи в схеме (рис. 1.65), если  $E_1 = 48$  В,  $E_2 = 24$  В,  $E_0 = 12$  В,  $E_3 = 12$  В,  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = R_0 = 6$  Ом,  $R_3 = R_4 = 2$  Ом.

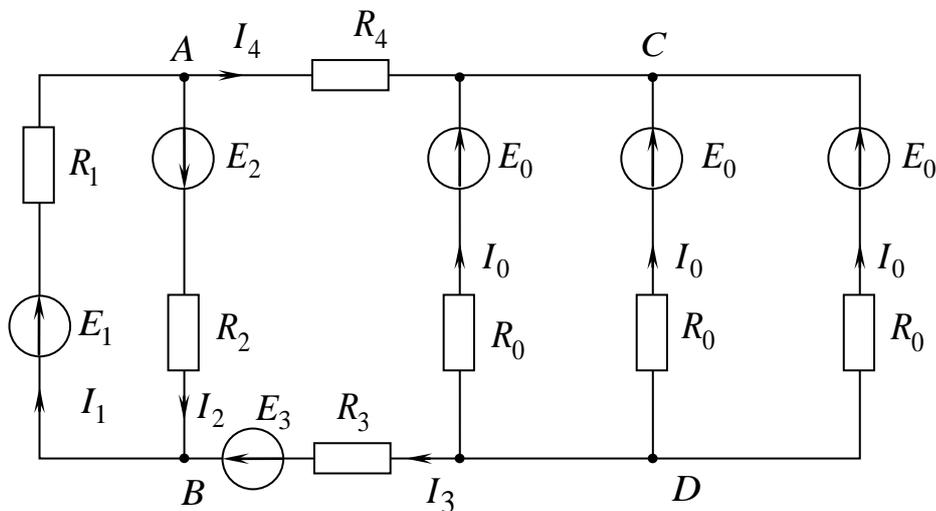


Рис. 1.65

1. Превратим схему (рис. 1.65) в одноконтурную с током  $I_3 = I_4$ , заменив активные двухполюсники с выходными зажимами  $AB$  и  $CD$  эквивалентными им генераторами.

2. Определим параметры эквивалентных генераторов.

Для участка  $AB$

$$E_{AB} = \frac{G_1 E_1 - G_2 E_2}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 48 - \frac{1}{6} \cdot 24}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 24 \text{ В,}$$

$$R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ Ом.}$$

Для участка  $CD$

$$E_{CD} = \frac{G_0 E_0 + G_0 E_0 + G_0 E_0}{G_0 + G_0 + G_0} = \frac{3G_0 E_0}{3G_0} = E_0 = 12 \text{ В,}$$

$$R_{CD} = \frac{R_0}{3} = 2 \text{ Ом.}$$

3. Вычислим ток одноконтурной эквивалентной схемы (рис. 1.66):

$$I_3 = I_4 = \frac{E_{AB} + E_3 - E_{CD}}{R_{AB} + R_4 + R_{CD} + R_3} = \frac{24 + 12 - 12}{2 + 2 + 2 + 2} = 3 \text{ А.}$$

Напряжение  $U_{AB} = E_{AB} - R_{AB} \cdot I_3 = 24 - 2 \cdot 3 = 18 \text{ В.}$

Напряжение  $U_{CD} = E_{CD} + R_{CD} \cdot I_3 = 12 + 2 \cdot 3 = 18 \text{ В.}$

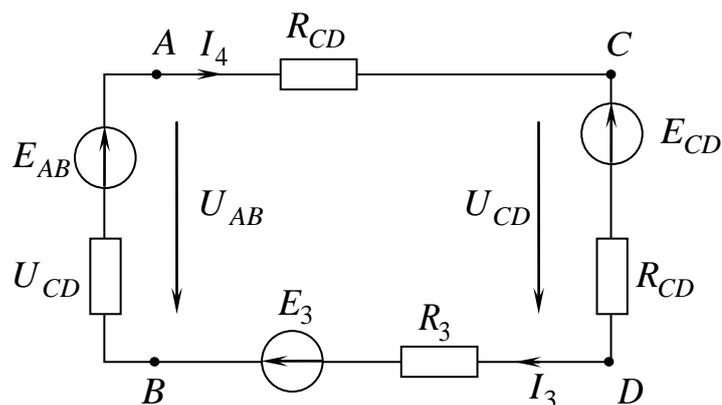


Рис. 1.66

4. Вычислим токи в тех частях схемы, которые были затронуты преобразованием, возвратившись к исходной схеме:

$$I_1 = G_1(E_1 - U_{AB}) = \frac{1}{3}(48 - 18) = 10 \text{ А,}$$

$$I_2 = G_2(E_2 + U_{AB}) = \frac{1}{6}(24 + 18) = 7 \text{ А,}$$

$$I_0 = G_0(E_0 - U_{CD}) = \frac{1}{6}(12 - 18) = -1 \text{ А.}$$

## ГЛАВА 2

# ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### Тема 1

#### Расчет действующих значений токов и напряжений

Изучение этой темы предоставляет возможность оперировать показаниями измерительных приборов электромагнитной и электродинамической систем, а также выполнять расчеты при последовательном или параллельном соединении приемников без использования комплексных чисел.

#### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться строить векторные диаграммы для цепей с последовательным и параллельным соединением приемников.
2. Научиться применять закон Ома для действующих значений.
3. Научиться вычислять потребляемую схемой мощность.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

Действующим значением тока  $I$  считают такой постоянный ток, который производит тот же тепловой эффект, что и реальный переменный ток. Действующие значения обозначают заглавными печатными буквами:  $I, U, E$ .

Законы Кирхгофа для действующих значений не выполняются. Оперировать действующими значениями позволяют прямоугольные треугольники, которые получаются при построении векторных диаграмм.

Схема замещения цепи с последовательным соединением приемников изображена на [рис. 2.1](#).

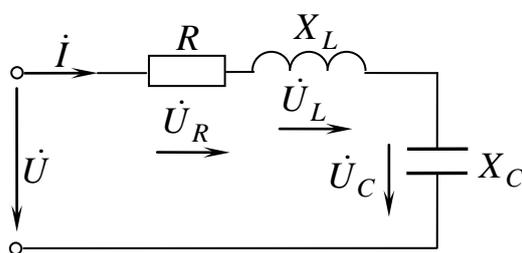


Рис. 2.1

Построим векторную диаграмму. Построение начнем с вектора величины, общей для данной цепи. При последовательном соединении элементов такой величиной является ток. Вид диаграммы зависит от характера цепи. Построение векторной диаграммы для цепи, имеющей активно-индуктивный характер, т. е.

$X_L > X_C$  и  $X > 0$ , показано на [рис. 2.2](#).

Входное напряжение складывается из напряжений на трех идеальных элементах при учете сдвига фаз. Напряжение на резисторе совпадает с током по фазе. Напряжение на индуктивном элементе опережает ток на  $90^\circ$ , на емкостном – отстает на  $90^\circ$ .

Полученный при построении векторной диаграммы треугольник  $OAB$  изображен на [рис. 2.3](#).

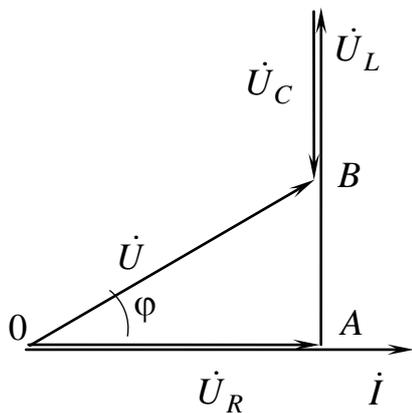


Рис. 2.2

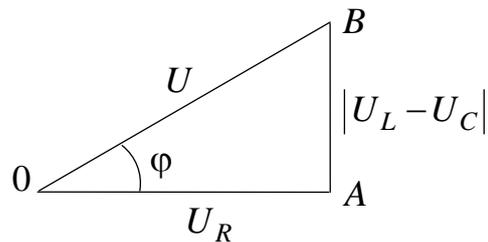


Рис. 2.3

Угол  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  – угол сдвига фаз тока и полного напряжения.

Треугольник  $OAB$  дает возможность оперировать действующими значениями:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{|U_L - U_C|}{U_R},$$

$$U_R = U \cdot \cos \varphi, |U_L - U_C| = U \cdot \sin \varphi.$$

Схема замещения цепи с параллельным соединением приемников изображена на [рис. 2.4](#).

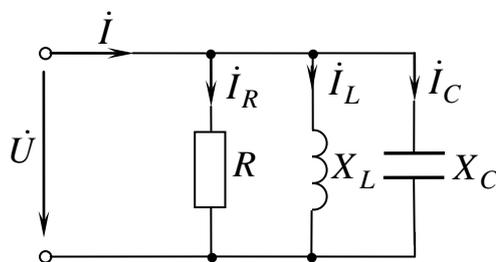


Рис. 2.4

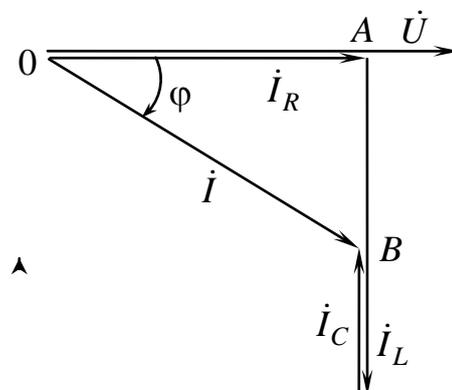


Рис. 2.5

Построение векторной диаграммы начинаем с вектора напряжения, которое является одинаковым для всех элементов схемы. Векторная диаграмма для случая, когда  $X_L < X_C$ , приведена на [рис. 2.5](#).

Ток в неразветвленной части схемы складывается из токов трех параллельных ветвей при учете сдвига фаз. Ток через резистор совпадает с напряжением по фазе, через индуктивный элемент отстает от напряжения на  $90^\circ$ , ток через конденсатор опережает его на  $90^\circ$ .

Полученный при построении векторной диаграммы треугольник токов  $OAB$  изображен на [рис. 2.6](#).

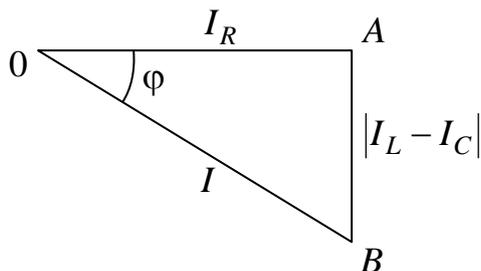


Рис. 2.6

Из свойств треугольника токов получаем следующие соотношения, позволяющие оперировать действующими значениями:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{|I_L - I_C|}{I_R};$$

$$I_R = I \cdot \cos \varphi; \quad |I_L - I_C| = I \cdot \sin \varphi.$$

Перейдем к рассмотрению второй целевой задачи.

Если разделить все стороны треугольника напряжений на ток  $I$ , получим подобный ему треугольник сопротивлений ([рис. 2.7](#)), где  $Z$  – полное сопротивление цепи;  $R$  – активное сопротивление;  $X$  – реактивное сопротивление;  $X_L = L \cdot \omega$  – индуктивное сопротивление,  $X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$  – емкостное сопротивление.

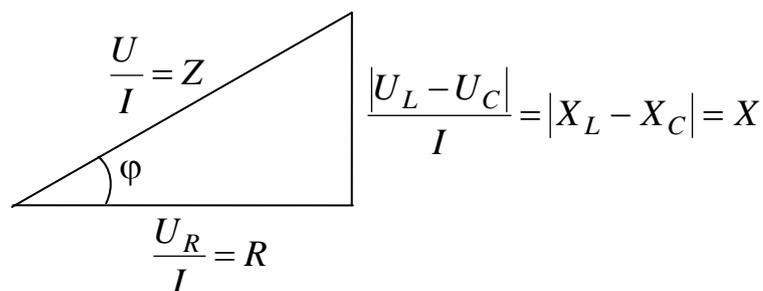


Рис. 2.7

Закон Ома для действующих значений при последовательном соединении приемников примет вид

$$U = Z I .$$

Из свойств треугольника сопротивлений получаем соотношения

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} ;$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} ;$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi ; X = Z \cdot \sin \varphi .$$

Полное сопротивление любого количества последовательно соединенных приемников

$$Z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_L - \sum X_C)^2} .$$

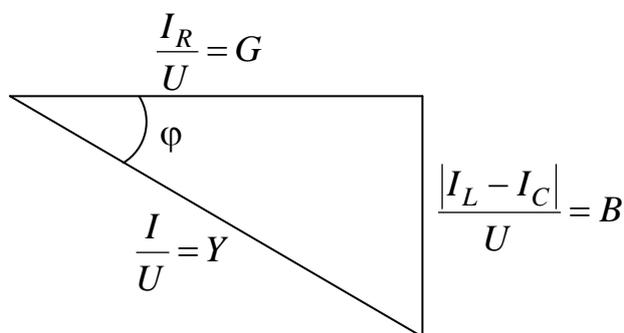


Рис. 2.8

Разделив все стороны треугольника токов на напряжение, получим подобный ему треугольник проводимостей ([рис. 2.8](#)), где  $Y$  – полная

проводимость;  $G$  – активная проводимость;  $B = B_L - B_C$  – реактивная проводимость;  $B_L$  – индуктивная проводимость;  $B_C$  – емкостная проводимость.

Закон Ома для действующих значений при параллельном соединении примет вид

$$I = YU.$$

Из свойств треугольника проводимостей получаем соотношения

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2};$$

$$G = Y \cos \varphi; B = Y \sin \varphi;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{G}.$$

Полная проводимость любого количества параллельно соединенных приемников

$$Y = \sqrt{(\sum G)^2 + (\sum B_L - \sum B_C)^2}.$$

Перейдем к рассмотрению третьей целевой задачи.

Умножением всех сторон треугольника напряжений на ток получаем треугольник мощностей (рис. 2.9).

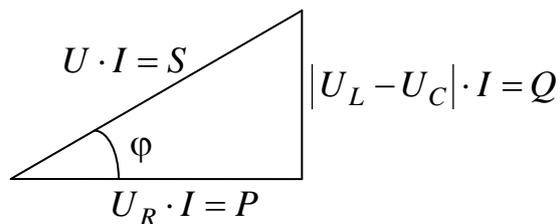


Рис. 2.9

Активная мощность

$$P = U_R \cdot I = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

характеризует энергию, которая передается в одном направлении от генератора к приемнику. Она связана с резистивными элементами.

Реактивная мощность  $Q = |U_L - U_C| \cdot I = X I^2 = U I \sin\varphi$  характеризует часть энергии, непрерывно циркулирующей в цепи и не совершающей полезной работы. Она связана с реактивными элементами.

Полная (кажущаяся) мощность  $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

Активную мощность измеряют в ваттах (Вт), реактивную – в вольтамперах реактивных (вар), полную – вольтамперах (В · А).

### Задача 1

Вычислить показание вольтметра, подключенного к зажимам индуктивной катушки, схема замещения которой представлена на [рис. 2.10](#), если амперметр показывает ток  $I = 10$  А,  $R = 3$  Ом,  $X_L = 4$  Ом.

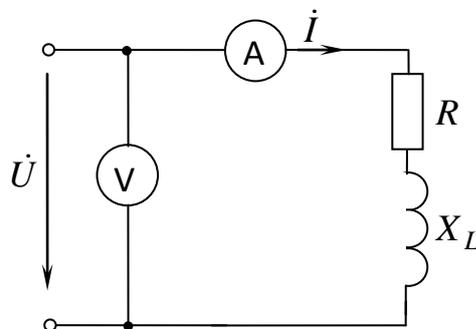


Рис. 2.10

### Решение

1. Вольтметр показывает действующее значение входного напряжения  $U$ , которое можно вычислить по закону Ома:

$$U = Z \cdot I.$$

2. Полное сопротивление схемы

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Ом.}$$

Тогда напряжение на входе схемы

$$U = 5 \cdot 10 = 50 \text{ В.}$$

Входное напряжение можно вычислить другим путем, используя треугольник напряжений, полученный при построении векторной диаграммы ([рис. 2.11](#)):

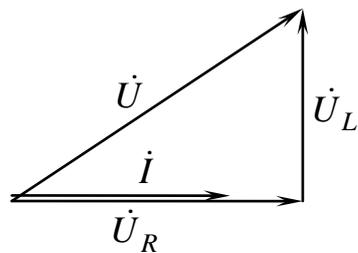


Рис. 2.11

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{(R \cdot I)^2 + (X_L \cdot I)^2} =$$

$$= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ В.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 2

В схеме на [рис. 2.12](#) первый вольтметр показывает напряжение 30 В, второй – 90 В, третий – 50 В.

Определить напряжение, которое показывает вольтметр на входе схемы.

Ответ:  $U = 50 \text{ В}$ .

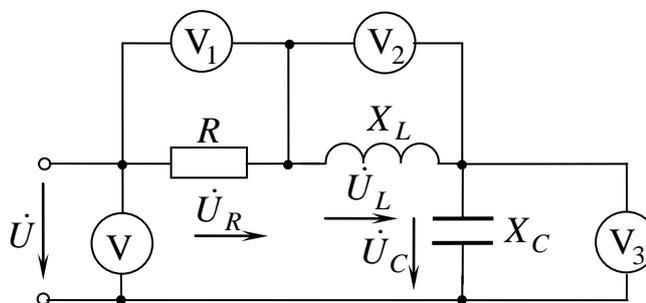


Рис. 2.12

### Задача 3

В схеме на [рис. 2.13](#) первый амперметр показывает ток 6 А, второй – 20 А, третий – 12 А. Определить ток, который показывает амперметр на входе схемы.

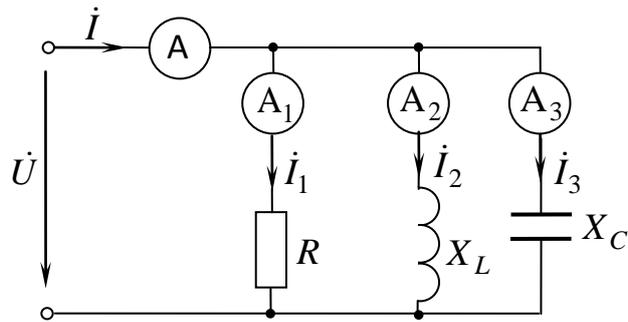


Рис. 2.13

Ответ:  $I = 10$  А.

### Задача 4

Определить, можно ли подключить цепь, схема замещения которой изображена на [рис. 2.14](#), к сети с напряжением  $U = 66$  В и частотой  $f = 50$  Гц, если напряжения  $U_{ab}$  и  $U_{bc}$  не должны превышать номинального  $U_n = 120$  В,  $R_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $L = 0,1576$  Гн,  $C = 64,34$  мкФ.

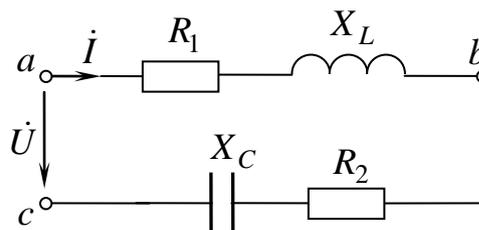


Рис. 2.14

### Решение

1. По закону Ома для действующих значений

$$U_{ab} = Z_{ab} \cdot I; U_{bc} = Z_{bc} \cdot I.$$

2. Полное сопротивление  $Z_{ab} = \sqrt{R_1^2 + X_L^2}$ . Индуктивное сопротивление  $X_L = L \cdot \omega = L \cdot 2\pi f = 0,1576 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 = 49,5$  Ом. Подставив значения  $R_1$  и  $X_L$ , получим  $Z_{ab} = \sqrt{8^2 + 49,5^2} = 50,1$  Ом.

Полное сопротивление  $Z_{bc} = \sqrt{R_2^2 + X_C^2}$ . Емкостное сопротивление  $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C \cdot 2\pi f} = \frac{10^6}{64,34 \cdot 2\pi \cdot 50} = 49,5$  Ом. Подставив значения  $R_2$  и  $X_C$ , получим  $Z_{bc} = \sqrt{3^2 + 49,5^2} = 49,6$  Ом.

3. Ток в цепи по закону Ома

$$I = \frac{U}{Z}.$$

4. Полное сопротивление схемы

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(8 + 3)^2 + (49,5 - 49,5)^2} = 11 \text{ Ом.}$$

Тогда ток  $I = \frac{66}{11} = 6 \text{ А}$ . Напряжение  $U_{ab} = 50,1 \cdot 6 = 300,6 \text{ В}$ , напряжение  $U_{bc} = 49,6 \cdot 6 = 297,5 \text{ В}$ . Следовательно, такое подключение сделать нельзя, так как значения напряжений  $U_{ab}$  и  $U_{bc}$  значительно превышают номинальное.

### Задача 5

Вычислить ток в индуктивной катушке, подключенной к сети переменного тока с напряжением  $U = 220 \text{ В}$ , если потребляемая мощность  $P = 440 \text{ Вт}$ , коэффициент мощности  $\cos \varphi = 0,5$ . Какой ток будет в этой катушке при подключении ее к сети постоянного тока того же напряжения?

### Решение

1. Вычислим ток в катушке при подключении ее к сети переменного напряжения, воспользовавшись формулой активной мощности  $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ .

Отсюда

$$I_{\sim} = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi} = \frac{440}{220 \cdot 0,5} = 4 \text{ А.}$$

2. Ток в катушке при подключении ее к сети постоянного напряжения можно найти по закону Ома  $I_{-} = \frac{U}{R}$ , так как в схеме замещения ([рис. 2.10](#)) остается только резистивный элемент ( $\omega = 0, X_L = L \cdot \omega = 0$ ).

3. Вычислим активное сопротивление из формулы активной мощности  $P = R \cdot I_{\sim}^2$ :

$$R = \frac{P}{I_{\sim}^2} = \frac{440}{16} = 27,5 \text{ Ом.}$$

Тогда  $I_- = \frac{220}{27,5} = 8 \text{ А}$ .

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 6

Вычислить параметры схемы замещения индуктивной катушки (рис. 2.10), если при подключении к сети с напряжением  $U = 120 \text{ В}$  и частотой  $f = 50 \text{ Гц}$  ток  $I = 100 \text{ А}$ , активная мощность  $P = 10000 \text{ Вт}$ .

#### Пояснение к решению

Параметрами индуктивной катушки являются активное сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$ .

Ответ:  $R = 1 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,002 \text{ Гн}$ .

Для самоконтроля решите задачи [7–10](#).

### Задача 7

В цепь синусоидального тока (рис. 2.15) включены три амперметра электромагнитной системы. Определить показание амперметра  $A_2$ , если амперметры  $A$  и  $A_1$  показывают соответственно  $I = 10 \text{ А}$  и  $I_1 = 6 \text{ А}$ .

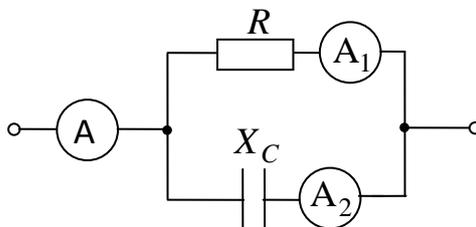


Рис. 2.15

Ответ:  $I_2 = 8 \text{ А}$ .

### Задача 8

Определить ток  $I$  и входное напряжение  $U$  схемы на рис. 2.16, если напряжение на емкостном элементе  $U_C = 70,7 \text{ В}$ ,  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $C = 2 \text{ мкФ}$ ,  $\omega = 5000 \text{ с}^{-1}$ .

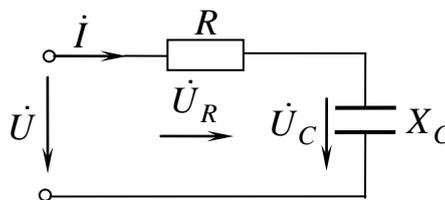


Рис. 2.16

Ответ:  $I = 0,707$  А,  $U = 100$  В.

### Задача 9

В электрической цепи, схема замещения которой приведена на [рис. 2.17](#), при токе  $I = 5$  А и частоте  $f = 50$  Гц  $U_R = 50$  В,  $U_L = 100$  В,  $U_C = 60$  В. Вычислить входное напряжение  $U$  при том же токе  $I = 5$  А и частоте  $f = 100$  Гц.

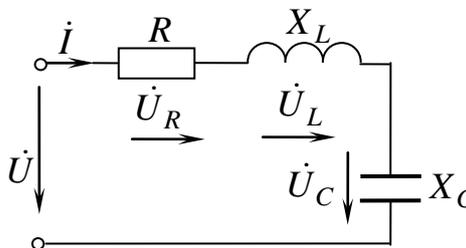


Рис. 2.17

Ответ:  $U = 177$  В.

### Задача 10

Определить сопротивление  $R$  и активную мощность  $P$  индуктивной катушки, схема замещения которой показана на рис. 2.10, если  $X_L = 30$  Ом. Амперметр показывает ток  $I = 4$  А, вольтметр – напряжение  $U = 200$  В.

Ответ:  $R = 40$  Ом,  $P = 640$  Вт.

## Тема 2

### Символический метод расчета

Символическим называют метод расчета, в котором синусоидальные функции изображают комплексными числами.

### Занятие 1

Цели занятия:

1. Научиться переходить от одной формы представления синусоидальных функций к другой.

2. Научиться применять комплексную форму изображения синусоидальных функций для анализа простейших цепей синусоидального тока.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

Гармонические величины представляют в виде тригонометрических функций и в виде комплексных чисел. Для их графической иллюстрации используют соответственно графики мгновенных значений и векторные диаграммы.

Значение переменной величины в данный момент называют мгновенным. Мгновенные значения являются синусоидальными функциями времени:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e),$$

где  $i, u, e$  – мгновенные значения;  $I_m, U_m, E_m$  – максимальные (амплитудные) значения;  $(\omega t + \psi)$  – фаза колебания, которая характеризует развитие процесса во времени;  $\omega t$  – текущий угол;  $\omega = 2\pi f$  – угловая (циклическая) частота, определяющая скорость изменения фазы;  $\psi$  – начальная фаза, т. е. угол, определяющий значение функции в начальный момент времени  $t = 0$ .

Положительную начальную фазу откладывают слева от начала координат, отрицательную – справа.

Непосредственные математические действия с синусоидальными величинами весьма трудоемки. Изображение их вращающимися векторами облегчает практические расчеты.

Вращая вектор, длина которого равна амплитуде синусоиды, вокруг начала координат со скоростью  $\omega$  и проецируя его на вертикальную ось, за один полный оборот получаем все мгновенные значения синусоидальных величин. Поэтому возможен обратный процесс: любую синусоиду можно изобразить вектором, вращающимся против часовой стрелки со скоростью  $\omega$ . Вектор изображают в начальный момент времени:  $t = 0$ ;  $(\omega t + \psi) = \psi$  (рис. 2.18).

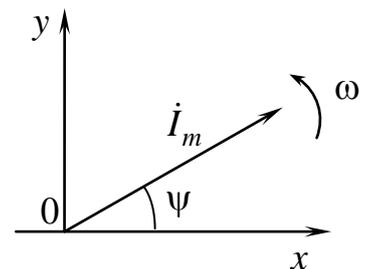


Рис. 2.18

Совокупность векторов, изображающих синусоидальные ЭДС, напряжения и токи одной частоты, называют векторными диаграммами.

Применение векторных диаграмм дает только графическое решение задачи.

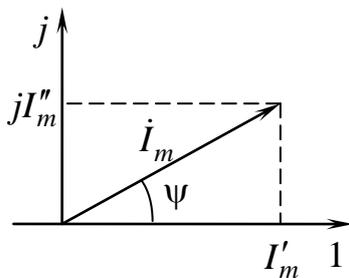


Рис. 2.19

Представление синусоидальных величин комплексными числами делает возможным аналитическое решение.

При изображении вращающегося вектора плоскость декартовых координат заменяют комплексной плоскостью (рис. 2.19). Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, которое может быть записано в показательной, тригонометрической или алгебраической форме:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi} = I_m \cos \psi + jI_m \sin \psi = I'_m + jI''_m.$$

Складывать и вычитать комплексные числа можно в алгебраической форме записи, делить и умножать – рационально в показательной. Переход от одной формы записи к другой осуществляют по формулам, которые получают из свойств треугольника (рис. 2.19):

$$I_m = \sqrt{(I'_m)^2 + (I''_m)^2}; \quad \psi = \arctg \frac{I''_m}{I'_m};$$

$$I'_m = I_m \cdot \cos \psi; \quad I''_m = I_m \cdot \sin \psi.$$

Перейдем к рассмотрению второй целевой задачи.

Основные свойства идеализированных приемников схем замещения цепей синусоидального тока сведены в табл. 2.1.

Умножение любого вектора на  $j$  или  $e^{j90^\circ}$  равноценно повороту его на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Умножение на  $-j$  или  $e^{-j90^\circ}$  равноценно повороту вектора на  $90^\circ$  по часовой стрелке.

В цепях переменного тока закон Ома выполняется для всех значений, законы Кирхгофа – только для мгновенных и комплексных, которые учитывают фазные соотношения.

**Первый закон Кирхгофа.** Алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

или так: алгебраическая сумма комплексных значений токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0.$$

*Второй закон Кирхгофа.* Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на приемниках в контуре равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС, действующих в этом же контуре:

$$\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^l e_j$$

или так: алгебраическая сумма комплексных значений напряжений на приемниках в контуре равна алгебраической сумме комплексных значений ЭДС в этом же контуре:

$$\sum_{i=1}^m \dot{U}_i = \sum_{j=1}^l \dot{E}_j.$$

Уравнения, составленные по законам Кирхгофа, называют уравнениями электрического состояния.

Уравнение электрического состояния в комплексной форме для схемы замещения цепи с последовательным соединением приемников ([рис. 2.20](#))

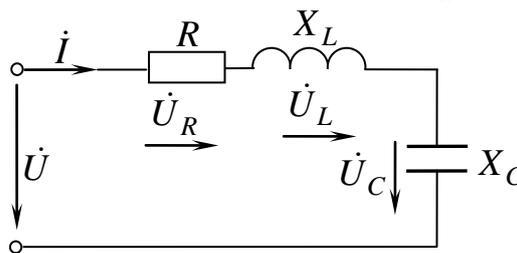


Рис. 2.20

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

Подставим в него значения напряжений, выраженные по закону Ома:

$$\dot{U} = R \dot{i} + j X_L \dot{i} - j X_C \dot{i} = [R + j(X_L - X_C)] \dot{i} = \underline{Z} \dot{i},$$

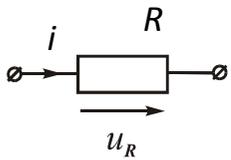
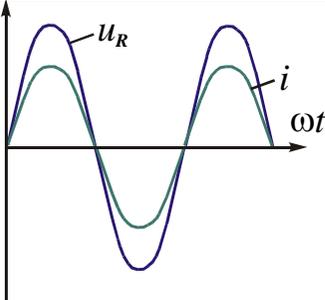
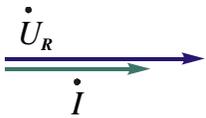
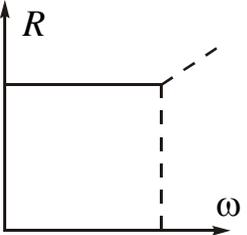
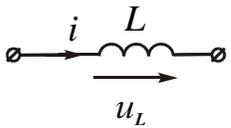
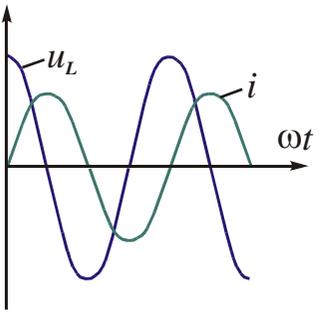
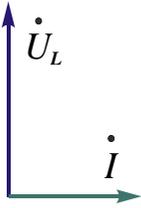
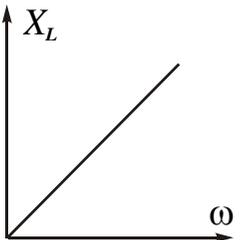
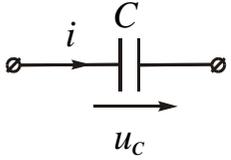
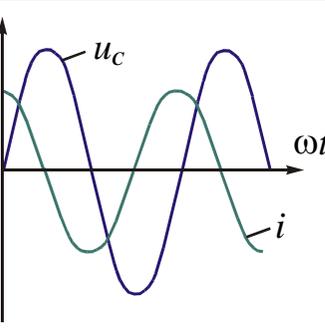
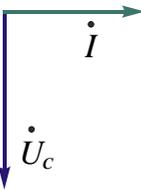
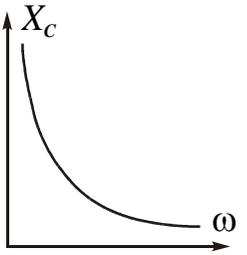
где  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление цепи.

Очевидно, что

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX,$$

где  $R$  – активное сопротивление;  $X$  – реактивное сопротивление.

Таблица 2.1

Идеализированный элемент	Сопротивление	Закон Ома для мгновенных значений	Графики напряжения и тока	Векторная диаграмма	Закон Ома для комплексных значений	Частотная характеристика сопротивления
	$R$	$u_R = R \cdot i$			$\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}$	
	$X_L = L \cdot \omega$	$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$			$\dot{U}_L = jX_L \cdot \dot{I}$ $= X_L \cdot \dot{I} \cdot e^{j90^\circ}$	
	$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$	$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i dt$			$\dot{U}_C = -jX_C \cdot \dot{I}$ $= X_C \cdot \dot{I} \cdot e^{-j90^\circ}$	



Закон Ома в комплексной форме для цепи с последовательным соединением приемников

$$\dot{U} = \underline{Z} \dot{I}.$$

Полное сопротивление  $Z$  является модулем комплексного сопротивления  $\underline{Z}$ , угол  $\varphi$  – аргументом комплексного сопротивления, поэтому можно записать

$$\underline{Z} = R + jX = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi.$$

Схема замещения цепи с параллельным соединением приемников изображена на [рис. 2.21](#). Для анализа цепи воспользуемся уравнением по первому закону Кирхгофа для комплексных значений:

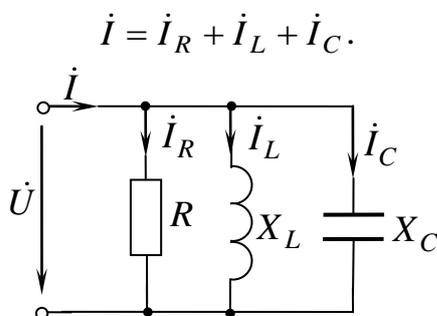


Рис. 2.21

Подставим в это уравнение значения токов, выраженные по закону Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} - \frac{\dot{U}}{jX_C} = \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{j} \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \right] \dot{U} = \underline{Y} \dot{U},$$

где  $\underline{Y}$  – комплексная проводимость.

Очевидно, что

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j} \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right),$$

где  $\frac{1}{R}$  – активная проводимость резистора  $\left(\frac{1}{R} = G\right)$ ;  $\frac{1}{X_L}$  – индуктивная проводимость индуктивного элемента  $\left(\frac{1}{X_L} = B_L\right)$ ;  $\frac{1}{X_C}$  – емкостная проводимость емкостного элемента  $\left(\frac{1}{X_C} = B_C\right)$ .

Используя эти обозначения, записываем

$$\underline{Y} = G - j(B_L - B_C) = G - jB,$$

где  $B$  – реактивная проводимость.

Полная проводимость  $Y$  является модулем комплексной проводимости  $\underline{Y}$ :

$$\underline{Y} = G - jB = Y e^{-j\varphi}.$$

### Задача 1

Записать  $U_m$ ,  $U$ ,  $\dot{U}$  для напряжения, мгновенное значение которого изменяется по закону  $u = 169 \sin(\omega t + 45^\circ)$  В.

### Решение

1. Максимальное значение напряжения  $U_m = 169$  В.
2. Действующее значение напряжения  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m = 120$  В.
3. Комплекс действующего значения напряжения  $\dot{U} = U \cdot e^{j\psi} = 120 \cdot e^{j45^\circ}$  В
4. На [рис. 2.22](#), а и б напряжение изображено синусоидой и вектором на комплексной плоскости.

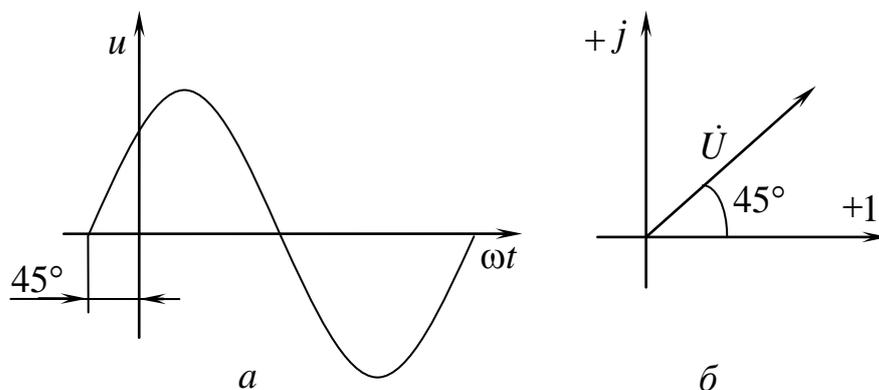


Рис. 2.22

Задача 2

Записать закон изменения мгновенного значения тока  $i$ , если комплекс действующего значения  $\dot{I} = 1,57 e^{-j90^\circ}$  А.

Решение

1. Действующее значение тока является модулем соответствующего комплекса  $I = 1,57$  А.
2. Максимальное значение тока  $I_m = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \cdot 1,57 = 2,22$  А.
3. Мгновенное значение тока изменяется по закону

$$i = 2,22 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ А.}$$

На [рис. 2.23](#),  $a$  и  $b$  ток изображен синусоидой и вектором на комплексной плоскости.

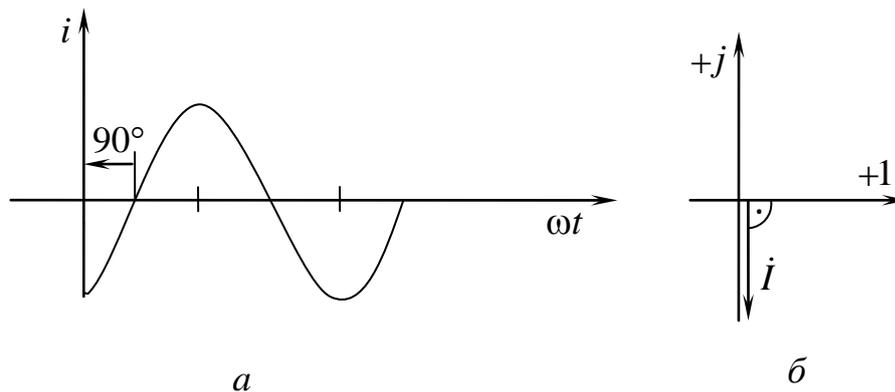


Рис. 2.23

Задача 3

Определить закон изменения тока в индуктивном элементе, если закон изменения напряжения на нем  $u_L = 150 \sin(\omega t + 40^\circ)$  В, а индуктивное сопротивление  $X_L = 15$  Ом.

Решение

1. Чтобы записать закон изменения тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , нужно вычислить максимальное значение тока  $I_m$  и начальную фазу  $\psi_i$ . Воспользуемся законом Ома для максимальных значений в комплексной форме:

$$i_m = \frac{\dot{U}_{Lm}}{jX_L}$$

2. Комплекс максимального значения напряжения

$$\dot{U}_{Lm} = U_{Lm} e^{j\psi_u} = 150 e^{j40^\circ} \text{ В.}$$

Тогда 
$$i_m = \frac{150 e^{j40^\circ}}{j15} = \frac{150 e^{j40^\circ}}{15 e^{j90^\circ}} = 10 e^{-j50^\circ} \text{ А.}$$

Закон изменения тока

$$i = 10 \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ А.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

#### Задача 4

Записать комплекс действующего значения тока, мгновенное значение которого меняется по закону  $i = 6 \sin(\omega t + 30^\circ)$  А. Построить синусоиду и вектор на комплексной плоскости.

Ответ:  $\dot{I} = 4,24 e^{j30^\circ}$  А.

#### Задача 5

Определить напряжение на резисторе  $U_R$  и потребляемую им мощность при  $R = 10$  Ом, если закон изменения тока  $i = 6 \sin(\omega t + 35^\circ)$  А.

Ответ:  $U_R = 42,42$  В,  $P = 179,9$  Вт.

#### Задача 6

Записать закон изменения  $u$  (рис. 2.24), если закон изменения  $u_L = 120 \sin(\omega t + 150^\circ)$  В,  $R = 20$  Ом,  $X_L = 20$  Ом.

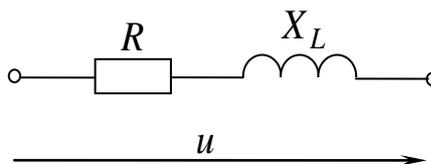


Рис. 2.24

Решение

1. Чтобы записать закон изменения напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , нужно вычислить максимальное значение напряжения  $U_m$  и начальную фазу  $\psi_u$ . Воспользуемся законом Ома для максимальных значений в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = \underline{Z} \cdot \dot{I}_m.$$

2. Комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = R + jX_L = 20 + j20 = 28,3e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

3. Комплекс максимального значения тока вычислим по закону Ома:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{Lm}}{jX_L}.$$

4. Комплекс максимального значения напряжения  $\dot{U}_{Lm} = 120e^{j150^\circ}$  В. Тогда

$$\dot{I}_m = \frac{120e^{j150^\circ}}{j20} = \frac{120e^{j150^\circ}}{20e^{j90^\circ}} = 6e^{j60^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{U}_m = 28,3e^{j45^\circ} \cdot 6e^{j60^\circ} = 169,7 e^{j105^\circ} \text{ В.}$$

Закон изменения входного напряжения

$$u = 169,7 \sin(\omega t + 105^\circ) \text{ В.}$$

Задача 7

Определить  $R$  и  $X$ , если  $i = 14,14 \sin(\omega t + 60^\circ)$  А,  $u = 100 \sin(\omega t + 15^\circ)$  В. Нарисовать простейшую схему замещения цепи.

Решение

1. По закону Ома комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{100e^{j15^\circ}}{14,14e^{j60^\circ}} = 7,07e^{-j45^\circ} = (5 - j5) \text{ Ом.}$$

2. Активное сопротивление  $R$  является действительной составляющей комплексного сопротивления:

$$R = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = 5 \text{ Ом.}$$

3. Реактивное сопротивление  $X$  является мнимой составляющей комплексного сопротивления

$$X = \operatorname{Im}(\underline{Z}) = -5 \text{ Ом.}$$

4. Схема замещения имеет активно-емкостной характер (рис. 2.25), так как ток опережает по фазе напряжение и  $X < 0$ .

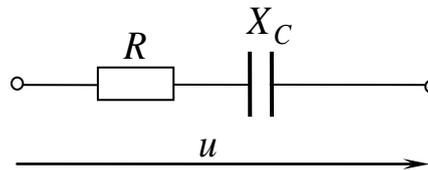


Рис. 2.25

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 8

Найти закон изменения напряжения  $u$  (рис. 2.25), если закон изменения тока  $i = 8 \sin(\omega t - 120^\circ)$  А,  $R = 16$  Ом,  $X_C = 12$  Ом.

Ответ:  $u = 160 \sin(\omega t - 157^\circ)$  В.

### Задача 9

Вычислить  $R$  и  $X$ , если  $U = 400$  В,  $I = 4$  А,  $\varphi = 60^\circ$ .

Ответ:  $R = 50$  Ом,  $X = 86,6$  Ом, цепь имеет активно-индуктивный характер, так как  $\varphi > 0$ .

### Задача 10

Записать закон изменения  $e$ , если  $\dot{E} = (-30 - j40)$  В.

Ответ:  $e = 70,7 \sin(\omega t - 127^\circ)$  В.

Для самоконтроля решите задачи 11–12.

### Задача 11

Записать закон изменения напряжения  $u$ , если комплекс действующего значения  $\dot{U} = 91e^{-j60^\circ}$  В. Построить соответствующие графики.

Ответ:  $u = 127 \sin(\omega t - 60^\circ)$  В.

### Задача 12

Записать закон изменения тока в схеме с последовательным соединением резистивного, индуктивного и емкостного элементов, если закон изменения входного напряжения  $u = 250 \sin 500t$  В,  $R = 30$  Ом,  $L = 0,18$  Гн,  $C = 40$  мкФ.

Ответ:  $i = 5 \sin(500t - 53^\circ)$  А.

### Занятие 2

*Цели занятия:*

1. Научиться рассчитывать токи в схемах с одним источником энергии методом эквивалентных преобразований.
2. Научиться строить векторные диаграммы.
3. Научиться определять показания ваттметра.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

Алгоритм расчета цепей синусоидального тока методом эквивалентных преобразований такой же, каким пользуются для расчета цепей постоянного тока. Но следует помнить, что нужно оперировать комплексными значениями сопротивлений и электрических величин.

Построение векторной диаграммы (вторая целевая задача) для схемы с одним источником энергии выполняют в той же последовательности, в которой проводят постепенное преобразование схемы:

1. Строим вектор тока в ветви, наиболее удаленной от источника энергии.
2. Строим вектор напряжения на зажимах этой ветви.
3. Строим вектор тока в пассивной ветви, присоединенной параллельно к ветви, с которой начато построение.
4. Строим вектор тока, являющегося геометрической суммой двух первых токов.
5. Дальнейшие построения повторяют предыдущие до тех пор, пока не будет построен вектор входного тока.
6. Строим вектор входного напряжения как сумму векторов напряжений на приемниках контура с источником энергии.

На практике особенно часто встречаются схемы с двумя узлами. Для построения векторной диаграммы в этом случае можно предложить более простой алгоритм:

1. Строим вектор напряжения между двумя узлами.

2. Строим векторы токов в пассивных параллельных ветвях, направления которых зависят от параметров приемников.

3. Строим вектор тока в неразветвленной части схемы как геометрическую сумму токов в пассивных параллельных ветвях.

4. Строим вектор входного напряжения.

Перейдем к рассмотрению третьей целевой задачи.

Для определения показаний ваттметра удобно пользоваться понятием комплексной мощности

$$\underline{S} = \dot{U}_W \cdot \dot{I}_W^*,$$

где  $\dot{U}_W = U_W e^{j\psi_u}$  – комплекс напряжения на ваттметре;  $\dot{I}_W^* = I_W e^{-j\psi_i}$  – комплекс, сопряженный комплексу тока в ваттметре.

Подставив значения  $\dot{U}_W$  и  $\dot{I}_W^*$  в формулу комплексной мощности, получим

$$\begin{aligned} \underline{S}_W &= U_W e^{j\psi_u} \cdot I_W e^{-j\psi_i} = U_W \cdot I_W \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \\ &= U_W \cdot I_W \cdot e^{j\varphi} = U_W \cdot I_W \cdot \cos \varphi + j \cdot U_W \cdot I_W \cdot \sin \varphi = P_W + j \cdot Q_W. \end{aligned}$$

Активная мощность, которую показывает ваттметр, является действительной составляющей комплексной мощности:

$$P_W = \operatorname{Re}(\underline{S}_W) = \operatorname{Re}(\dot{U}_W \cdot \dot{I}_W^*).$$

Активную мощность можно вычислить по формуле

$$P_W = U_W \cdot I_W \cdot \cos(\dot{U}_W \wedge \dot{I}_W).$$

Два зажима ваттметра (один – обмотки напряжения и один – обмотки тока) обозначают одинаковыми знаками, обычно звездочками. Угол сдвига фаз между напряжением на ваттметре и током в нем соответствует одинаковым положительным направлениям  $\dot{U}_W$  и  $\dot{I}_W$  относительно зажимов, отмеченных звездочками.

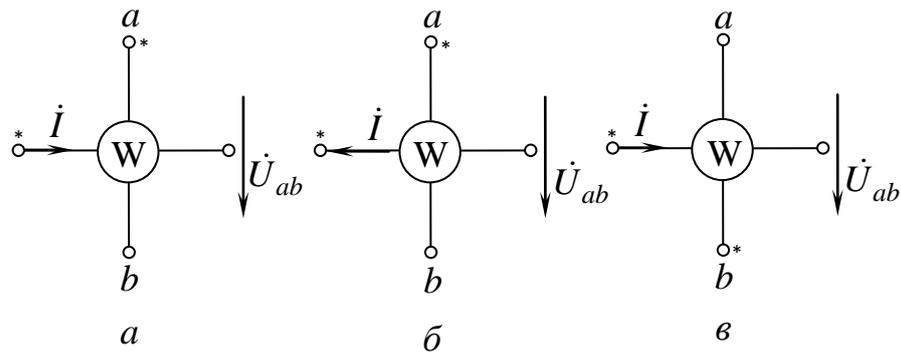


Рис. 2.26

Для указанных на [рис. 2.26, а](#) направлений напряжения и тока

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}(\dot{U}_{ab} \dot{I}^*) \text{ или } P = U_{ab} I \cos(\dot{U}_{ab} \wedge \dot{I}).$$

Для схемы, приведенной на [рис. 2.26, б](#), активная мощность

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}\left[\dot{U}_{ab} \left(-\dot{I}^*\right)\right] = U_{ab} I \cos\left[\dot{U}_{ab} \wedge (-\dot{I})\right].$$

Для схемы [рис. 2.26, в](#)

$$P = \operatorname{Re}\left[\left(-\dot{U}_{ab}\right)^* \dot{I}\right] = U_{ab} I \cos\left[\left(-\dot{U}_{ab}\right) \wedge \dot{I}\right].$$

Рассмотрим разобранные алгоритмы на примере конкретных задач.

### Задача 1

Вычислить токи  $I, I_1, I_2$  в цепи, схема замещения которой приведена на [рис. 2.27](#), если  $U = 127$  В,  $R_1 = 6$  Ом,  $X_{L_1} = 4$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $X_{C_2} = 5$  Ом,  $R = 2$  Ом,  $X_L = 5$  Ом. Построить векторную диаграмму.

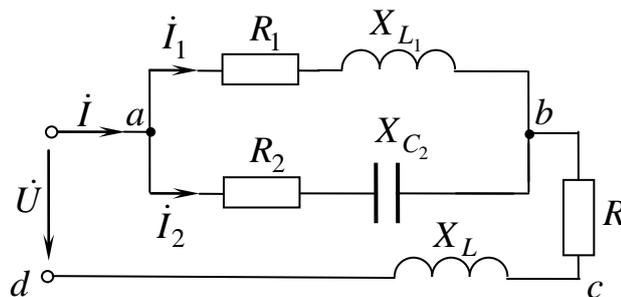


Рис. 2.27

*Решение*

1. Комплексное сопротивление первой ветви

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j X_{L_1} = 6 + j4 = 7,2e^{j33^\circ 40'} \text{ Ом.}$$

2. Комплексное сопротивление второй ветви

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j X_{C_2} = 3 - j5 = 5,8e^{-j59^\circ} \text{ Ом.}$$

3. Эквивалентное комплексное сопротивление параллельного участка

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ab} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{7,2e^{j33^\circ 40'} \cdot 5,8e^{-j59^\circ}}{6 + j4 + 3 - j5} = \frac{41,7e^{-j25^\circ 20'}}{9 - j} = \\ &= \frac{41,7e^{-j25^\circ 20'}}{9,08e^{-j6^\circ 08'}} = 4,6e^{-j19^\circ 12'} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

4. Эквивалентное комплексное сопротивление всей схемы

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_{ab} + R + j X_L = 4,6e^{-j19^\circ 12'} + 2 + j5 = 4,34 - j1,51 + 2 + j5 = \\ &= 6,34 + j3,49 = 7,25e^{j28^\circ 50'} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

5. Комплекс тока в неразветвленной части схемы

$$\underline{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{127}{7,25e^{j28^\circ 50'}} = 17,5e^{-j28^\circ 50'} \text{ А.}$$

6. Комплексы токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  вычислим, воспользовавшись формулами для определения токов пассивных параллельных ветвей:

$$\dot{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \dot{I} = \frac{5,8e^{-j59^\circ}}{9,08e^{-j6^\circ08'}} \cdot 17,5e^{-j28^\circ50'} = 11,1e^{-j81^\circ40'} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \dot{I} = \frac{7,2e^{j33^\circ40'}}{9,08e^{-j6^\circ08'}} \cdot 17,5e^{-j28^\circ50'} = 13,9e^{j11^\circ} \text{ А.}$$

7. Действующие значения токов:

$$I = 17,5 \text{ А; } I_1 = 11,1 \text{ А; } I_2 = 13,9 \text{ А.}$$

Векторную диаграмму (рис. 2.28) строим в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Построим вектор напряжения между двумя узлами  $\dot{U}_{ab}$ .

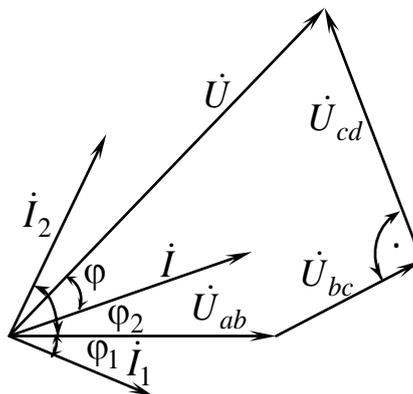


Рис. 2.28

2. Построим векторы токов в пассивных параллельных ветвях  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ . Первая ветвь имеет активно-индуктивный характер, поэтому вектор тока  $\dot{I}_1$  отстает от вектора напряжения  $\dot{U}_{ab}$  на угол  $\varphi_1$ , являющийся аргументом комплексного сопротивления  $\underline{Z}_1$  ( $\varphi_1 = 33^\circ40'$ ).

Вторая ветвь имеет активно-емкостный характер. Поэтому вектор тока  $\dot{I}_2$  опережает вектор напряжения  $\dot{U}_{ab}$  на угол  $\varphi_2$ , являющийся аргументом комплексного сопротивления  $\underline{Z}_2$  ( $\varphi_2 = -59^\circ$ ).

3. Построим вектор тока  $\dot{I}$ , равный геометрической сумме векторов токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ .

4. Вектор входного напряжения складывается из векторов трех напряжений:  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$  и  $\dot{U}_{cd}$ . К вектору  $\dot{U}_{ab}$  прибавляем вектор напряжения

$\dot{U}_{bc}$ . Между точками  $b$  и  $c$  в схеме находится резистор с сопротивлением  $R$ . Напряжение на нем совпадает по фазе с током  $\dot{I}$ , поэтому вектор  $\dot{U}_{bc}$  параллелен вектору тока  $\dot{I}$ . Напряжение на индуктивном элементе опережает ток на  $90^\circ$ , поэтому вектор  $\dot{U}_{cd}$  перпендикулярен вектору тока  $\dot{I}$ .

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 2

Вычислить токи  $I, I_1$  и  $I_2$  в схеме [рис. 2.29](#), если  $U = 220$  В,  $R_1 = 3$  Ом,  $X_{L_2} = 4$  Ом,  $R = 5$  Ом,  $X_C = 12$  Ом. Построить векторную диаграмму.

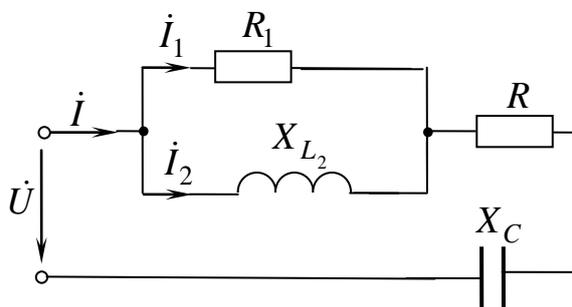


Рис. 2.29

Ответ:  $I = 18,2$  А;  $I_1 = 14,6$  А;  $I_2 = 10,9$  А.

### Задача 3

Вычислить показания ваттметра в схеме [рис. 2.30](#), если амперметр показывает ток 1 А,  $X_C = 4$  Ом,  $X_L = 10$  Ом,  $R = 10$  Ом.

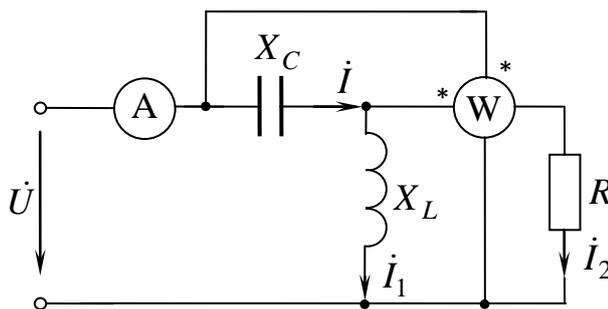


Рис. 2.30

### Решение

1. Выявим узлы, ветви, направим токи.
2. Вычислим ток в ваттметре  $\dot{I}_W = \dot{I}_2$  по формуле для определения тока в пассивной параллельной ветви:

$$\dot{I}_W = \dot{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \dot{I} = \frac{jX_L}{R + jX_L} \cdot \dot{I} = \frac{j10}{10 + j10} \cdot 1 = \frac{10e^{j90^\circ}}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} \cdot 1 = 0,7e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

3. Найдем напряжение на зажимах ваттметра:

$$\dot{U}_W = R\dot{I}_2 - jX_C \dot{I} = 10 \cdot 0,7e^{j45^\circ} - j4 \cdot 1 = 5 + j5 - j4 = (5 + j) \text{ В.}$$

4. Вычислим комплексную мощность

$$\begin{aligned} \underline{S}_W &= \dot{U}_W \dot{I}_W^* = (5 + j) \cdot 0,7e^{-j45^\circ} = \\ &= (5 + j)(0,5 - j0,5) = 2,5 + 0,5j - 2,5j + 0,5 = (3 - j2) \text{ В} \cdot \text{А}. \end{aligned}$$

5. Активная мощность

$$P_W = \text{Re}(\underline{S}) = 3 \text{ Вт.}$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

#### Задача 4

Вычислить показания ваттметра в схеме [рис. 2.31](#), если амперметр показывает ток 1 А,  $X_C = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ .

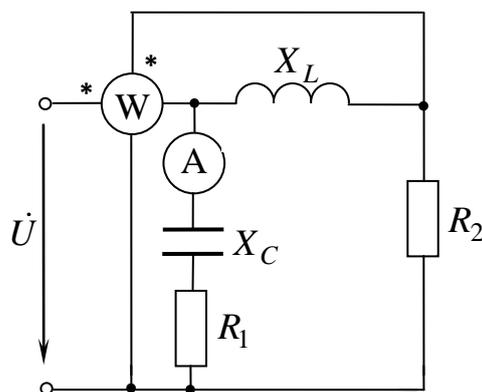


Рис. 2.31

Ответ:  $P_W = 2,5 \text{ Вт}$ .

Для самоконтроля решите задачи 5–7.

Задача 5

Вычислить все токи и потребляемую мощность в схеме [рис. 2.32](#), если  $U = 127$  В,  $R = 10$  Ом,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 1$  Ом,  $X_{L_1} = 6$  Ом,  $X_{C_2} = 9,95$  Ом. Построить векторную диаграмму.

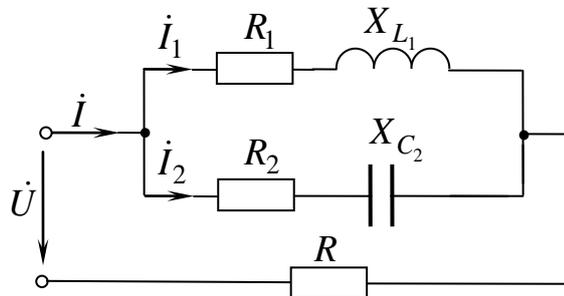


Рис. 2.32

Ответ:  $I = 5,93$  А;  $I_1 = 11,98$  А;  $I_2 = 7,58$  А;  $P = 693$  Вт.

Задача 6

Вычислить показания ваттметра в схеме [рис. 2.33](#), если амперметр показывает ток 1 А,  $R = 5$  Ом,  $R_1 = 10$  Ом,  $X_L = 10$  Ом.

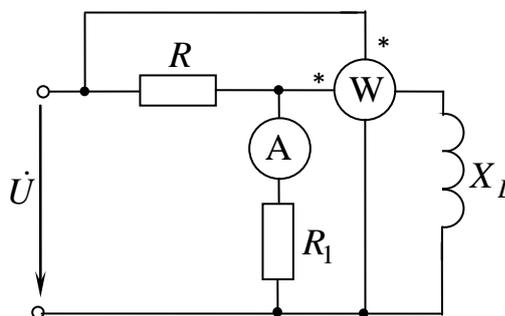


Рис. 2.33

Ответ:  $P_W = 5$  Вт.

Задача 7

Вычислить показания ваттметра в схеме [рис. 2.34](#), если амперметр показывает ток 1 А,  $R = R_1 = X_C = X_L = 10$  Ом.

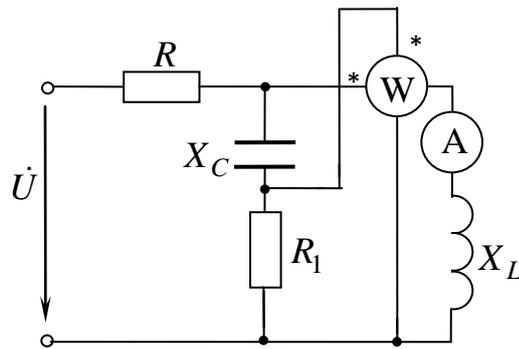


Рис. 2.34

Ответ:  $P_W = -5$  Вт.

### Тема 3

## Анализ резонансных режимов

Резонансные режимы могут быть в цепях, содержащих индуктивные катушки и конденсаторы, которые компенсируют действие друг друга.

### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться строить векторные диаграммы при резонансе напряжений.
2. Научиться использовать условие резонанса для расчета цепей с последовательным соединением приемников.

Если в условии заданы токи и напряжения, для решения задачи нужно построить векторную диаграмму. Алгоритм ее построения не отличается от рассмотренных ранее, но векторы входного тока и входного напряжения при резонансе направлены одинаково.

Если в условии задачи заданы параметры схемы ( $R, L, C$ ), для решения необходимо использовать условие резонанса. При резонансе напряжений в цепи с последовательным соединением приемников входное реактивное сопротивление  $X = 0$ . В целом цепь имеет чисто активный характер. Ток на входе цепи совпадает по фазе с входным напряжением ( $\varphi = 0$ ), поэтому потребляемая мощность  $P = U \cdot I$ .

Рассмотрим алгоритмы решения целевых задач на конкретных примерах.

Задача 1

На [рис. 2.35](#) изображена схема замещения цепи с последовательным соединением реальной индуктивной катушки и конденсатора. Вычислить напряжение на реальной катушке, если в резонансном режиме  $U = 120$  В,  $U_C = 160$  В.

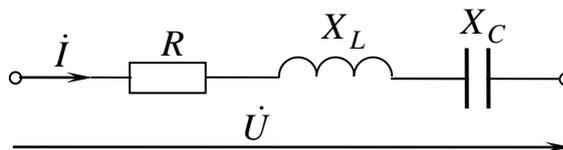


Рис. 2.35

Решение

1. В условии задачи заданы электрические величины, поэтому для решения нужно построить векторную диаграмму ([рис. 2.36](#)). Алгоритм построения диаграммы подробно изложен в занятии 1 темы 1. Напряжение на реальной индуктивной катушке

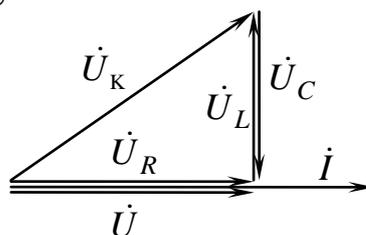


Рис. 2.36

$$U_K = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}.$$

При резонансе напряжений  $U_L = U_C$ ,  $U_R = U$ .

Поэтому

$$U_K = \sqrt{U^2 + U_C^2} = \sqrt{120^2 + 160^2} = 200 \text{ В.}$$

Задача 2

Вычислить  $U_L$  в схеме [рис. 2.37](#), если  $\varphi = 0$ ,  $U = 180$  В,  $U_C = 300$  В.

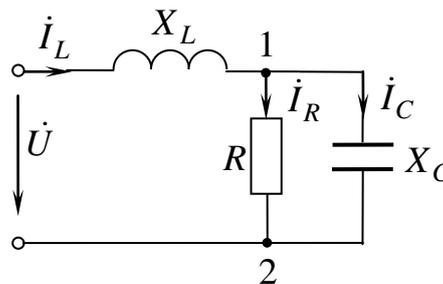


Рис. 2.37

*Пояснение к решению*

Так как индуктивный и емкостный элементы находятся на участках цепи, соединенных между собой последовательно, ток и напряжение на входе совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ), то наблюдается режим резонанса напряжений.

Выявим узлы (1 и 2), ветви, направим токи.

*Решение*

1. Построим векторную диаграмму (рис. 2.38), начиная с вектора напряжения между двумя узлами  $\dot{U}_{12}$ . Затем строим векторы токов в пассивных параллельных ветвях  $\dot{I}_R$  и  $\dot{I}_C$ . Вектор тока  $\dot{I}_L$  равен геометрической сумме векторов  $\dot{I}_R$  и  $\dot{I}_C$ . Входное напряжение складывается из векторов напряжений  $\dot{U}_{12}$  и  $\dot{U}_L$  и совпадает с вектором входного тока  $\dot{I}_L$  по фазе. Напряжение  $\dot{U}_L$  опережает ток  $\dot{I}_L$  на  $90^\circ$ .

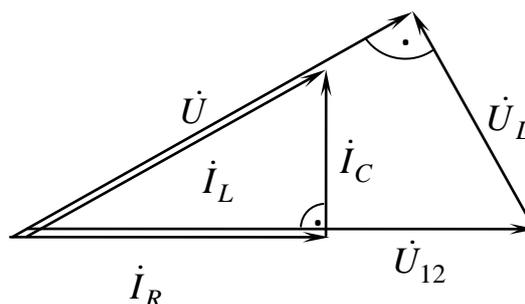


Рис. 2.38

2. Из прямоугольного треугольника напряжений, учитывая, что  $U_{12} = U_C$ , вычислим

$$U_L = \sqrt{U_{12}^2 - U^2} = \sqrt{300^2 - 180^2} = 240 \text{ В.}$$

**Задача 3**

Вычислить все сопротивления схемы [рис. 2.37](#), если  $P = 200 \text{ Вт}$ ,

$$U = 40 \text{ В}, U_L = 30 \text{ В}, U_{12} = 50 \text{ В}, \varphi = 0.$$

Решение

1. Вычислим ток  $I_L$ , воспользовавшись формулой активной мощности

$$P = U I_L \cos \varphi = U I_L.$$

Отсюда  $I_L = \frac{P}{U} = \frac{200}{40} = 5 \text{ А}.$

2. Определим ток  $I_R$ , исходя из того, что потребителем мощности является резистор, поэтому  $P = U_{12} \cdot I_R$ . Тогда  $I_R = \frac{P}{U_{12}} = \frac{200}{50} = 4 \text{ А}.$

3. Вычислим ток  $I_C$  с помощью треугольника токов (рис. 2.38):

$$I_C = \sqrt{I_L^2 - I_R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ А}.$$

4. Определим сопротивления приемников:

$$X_L = \frac{U_L}{I_L} = \frac{30}{5} = 6 \text{ Ом}, \quad R = \frac{U_{12}}{I_R} = \frac{50}{4} = 12,5 \text{ Ом}, \quad X_C = \frac{U_{12}}{I_C} = 16,7 \text{ Ом}.$$

*Обратите внимание!* Входное реактивное сопротивление  $X = 0$ , но  $X_L = X_C$  только в частном случае, при непосредственном последовательном соединении индуктивной катушки и конденсатора.

Следующую задачу решите самостоятельно.

#### Задача 4

Вычислить  $U_L$  в схеме [рис. 2.39](#), если  $U = 75 \text{ В}$ ,  $U_C = 100 \text{ В}$ ,  $\varphi = 0$ .

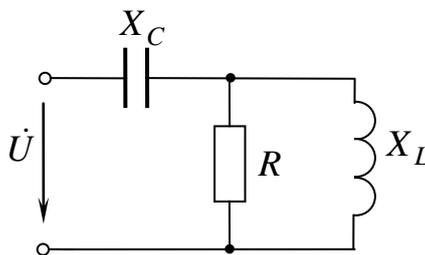


Рис. 2.39

Ответ:  $U_L = 125 \text{ В}.$

#### Задача 5

Вычислить емкость конденсатора  $C$  и входной ток  $I$  в схеме [рис. 2.40](#), если  $U = 120 \text{ В}$ ,  $\omega = 800 \text{ с}^{-1}$ ,  $R = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 2 \text{ Ом}$ ,  $\varphi = 0$ .

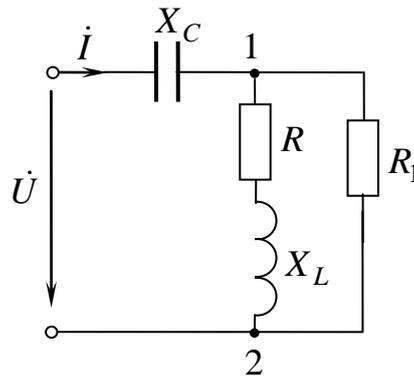


Рис. 2.40

В условии даны значения параметров схемы, следовательно, для решения нужно использовать условие резонанса напряжений:  $X_3 = 0$ .

*Решение*

1. Запишем эквивалентное комплексное сопротивление схемы:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= -jX_C + \frac{(R + jX_L) \cdot R_1}{R + jX_L + R_1} = \\ &= -jX_C + \frac{(5 + j2) \cdot 3}{5 + j2 + 3} = -jX_C + \frac{5,38e^{j21^\circ 50'} \cdot 3}{8,25e^{j14^\circ}} = \\ &= -jX_C + 1,96e^{j7^\circ 50'} = -jX_C + 1,94 + j0,27. \end{aligned}$$

2. Эквивалентное реактивное сопротивление является мнимой составляющей (без  $j$ ) комплексного сопротивления:

$$X_3 = -X_C + 0,27 = 0.$$

Отсюда  $X_C = 0,27$  Ом.

Емкость конденсатора  $C = \frac{1}{X_C \omega} = 0,0046$  Ф.

3. Эквивалентное комплексное сопротивление цепи является чисто активным:

$$\underline{Z}_3 = R_3 = 1,94 \text{ Ом.}$$

4. Вычислим ток в цепи по закону Ома:  $I = \frac{U}{R_3} = \frac{120}{1,94} = 62 \text{ А}$ .

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 6

Эквивалентное комплексное сопротивление цепи, схема которой представлена на [рис. 2.41](#), чисто активное и  $Z_3 = R_3 = 125 \text{ Ом}$ .

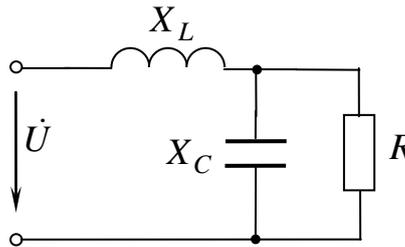


Рис. 2.41

Определить индуктивность катушки  $L$  и емкость конденсатора  $C$ , если сопротивление  $R = 200 \text{ Ом}$ , циклическая частота  $\omega = 2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

Ответ:  $L = 0,484 \text{ мГн}$ ;  $C = 0,0194 \text{ мкФ}$ .

Задачи 7–10 решите для самоконтроля.

### Задача 7

Вычислить параметры схемы (рис. 2.42), если  $\varphi = 0$ ,  $I = 4 \text{ А}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ , вольтметры показывают соответственно:  $U = 200 \text{ В}$ ,  $U_1 = 206 \text{ В}$ ,  $U_2 = 180 \text{ В}$ .

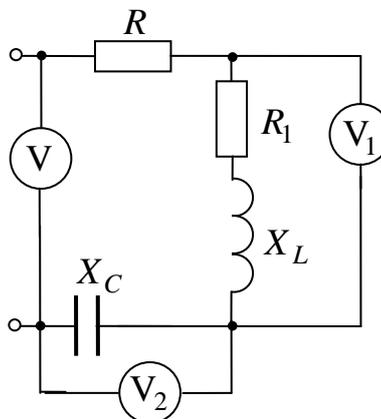


Рис. 2.42

Ответ:  $R = R_1 = 25 \text{ Ом}$ ;  
 $C = 70 \text{ мкФ}$ ;  $L = 0,143 \text{ Гн}$ .

Задача 8

Вычислить  $U$  в схеме (рис. 2.43), если  $\varphi = 0$ ,  $U_C = 150$  В,  $U_L = 120$  В,

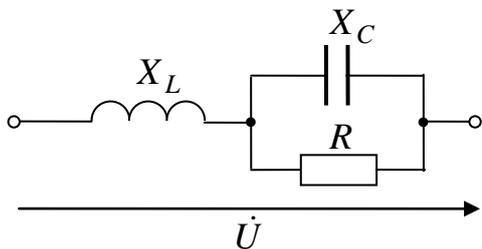


Рис. 2.43

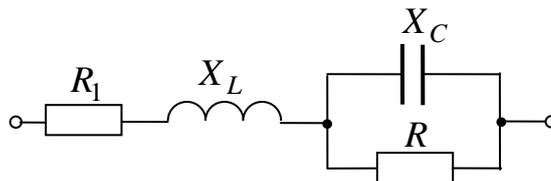


Рис. 2.44

Ответ:  $U = 90$  В.

Задача 9

Вычислить  $X_L$  в схеме, представленной на рис. 2.44, если  $X_C = R = 5$  Ом,  $R_1 = 8$  Ом,  $\varphi = 0$ .

Ответ:  $X_L = 2,5$  Ом.

Задача 10

Вычислить  $L_0$  в схеме (рис. 2.45), если  $\varphi = 0$ ,  $R = 2$  Ом,  $L = 2$  мГн,  $C = 250$  мкФ,  $\omega = 2 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>.

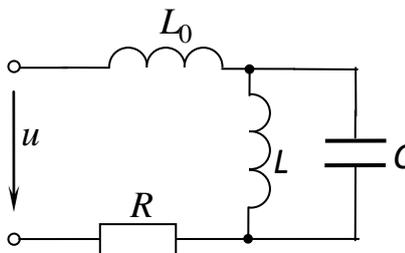


Рис. 2.45

Ответ:  $L_0 = 2$  мГн.

Занятие 2

Цели занятия:

1. Научиться строить векторные диаграммы при резонансе токов.
2. Научиться использовать условие резонанса для расчета цепей при параллельном соединении приемников.

Алгоритм построения векторных диаграмм подробно рассмотрен на с. 45 и 63. Так как при резонансном режиме сопротивление цепи чисто активное, направления векторов входного тока и входного напряжения совпадают.

Если в условии задачи заданы параметры схемы  $(R, L, C)$ , для решения необходимо использовать условие резонанса.

При резонансе токов в цепи с параллельным соединением индуктивных катушек и конденсаторов входная реактивная проводимость  $B = 0$ .

Реактивную проводимость ветви определяют по формуле

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2},$$

где  $X$  и  $R$  – соответственно реактивное и активное сопротивления этой ветви.

Если ветвь не обладает активным сопротивлением ( $R = 0$ ), то реактивная проводимость  $B = \frac{1}{X}$ , где  $X = X_L - X_C$ .

Рассмотрим алгоритмы решения целевых задач на конкретных примерах.

### Задача 1

Определить показания второго амперметра (рис. 2.46), если в резонансном режиме остальные приборы показывают:  $I_1 = 6$  А,  $I_3 = 3,6$  А.

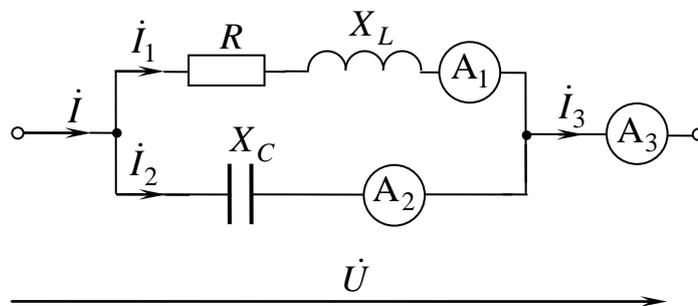


Рис. 2.46

### Решение

1. Построим векторную диаграмму (рис. 2.47).

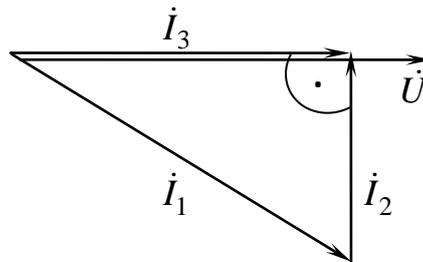


Рис. 2.47

2. Вычислим ток  $I_2$ :

$$I_2 = \sqrt{I_1^2 - I_3^2} = \sqrt{6^2 - 3,6^2} = 4,8 \text{ А.}$$

### Задача 2

Вычислить сопротивления всех приемников в схеме, представленной на рис. 2.46, если  $P = 80 \text{ Вт}$ ,  $I_1 = 5 \text{ А}$ ,  $I_3 = 4 \text{ А}$ ,  $\varphi = 0$ .

#### Решение

1. Вычислим ток  $I_2$  из треугольника токов (рис. 2.47):

$$I_2 = \sqrt{I_1^2 - I_3^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ А.}$$

2. Определим входное напряжение, воспользовавшись формулой активной мощности:

$$P = U \cdot I_3 \cos\varphi = U \cdot I_3.$$

Отсюда  $U = \frac{P}{I_3} = \frac{80}{4} = 20 \text{ В.}$

3. Вычислим активное сопротивление, воспользовавшись формулой

$$P = R \cdot I_1^2. \text{ Тогда } R = \frac{P}{I_1^2} = \frac{80}{5^2} = 3,2 \text{ Ом.}$$

4. Вычислим полное сопротивление индуктивной катушки по закону Ома:

$$Z_K = \frac{U}{I_1} = \frac{20}{5} = 4 \text{ Ом.}$$

5. Рассчитаем индуктивное сопротивление:

$$X_L = \sqrt{Z_K^2 - R^2} = \sqrt{4^2 - 3,2^2} = 2,4 \text{ Ом.}$$

6. Вычислим емкостное сопротивление:

$$X_C = \frac{U}{I_2} = \frac{20}{3} = 6,7 \text{ Ом.}$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 3

Определить емкость конденсатора в схеме ([рис. 2.46](#)), если напряжение  $U = 30 \text{ В}$ , токи  $I_1 = 375 \text{ мА}$  и  $I_3 = 225 \text{ мА}$ ,  $\omega = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .

Ответ:  $C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ .

### Задача 4

Вычислить емкостное сопротивление  $X_C$  и ток  $I$  в схеме ([рис. 2.48](#)), если  $U = 50 \text{ В}$ ,  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 6 \text{ Ом}$ ,  $\varphi = 0$ .

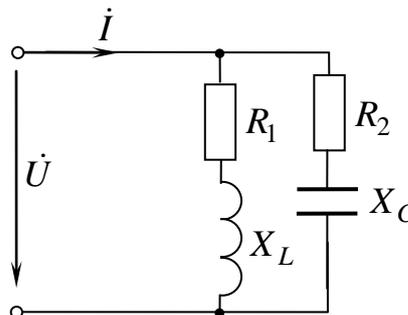


Рис. 2.48

### Решение

1. Вычислим  $X_C$  из условия резонанса токов: входная реактивная проводимость  $B = 0$ . Схема содержит две параллельные ветви с разным характером реактивных сопротивлений. Поэтому  $B = B_L - B_C = 0$  и  $B_L = B_C$ .

Индуктивная проводимость

$$B_L = \frac{X_L}{X_L^2 + R_1^2}.$$

Емкостная проводимость

$$B_C = \frac{X_C}{X_C^2 + R_2^2}.$$

Подставив эти значения, получим следующее уравнение:

$$\frac{6}{36 + 64} = \frac{X_C}{X_C^2 + 25};$$

$$6X_C^2 - 100X_C + 150 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$X_{C_{1,2}} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 6 \cdot 4 \cdot 150}}{2 \cdot 6} = \frac{100 \pm \sqrt{6400}}{12} = \frac{100 \pm 80}{12};$$

$$X_{C_1} = \frac{100 + 80}{12} = 15 \text{ Ом}; \quad X_{C_2} = 1,67 \text{ Ом}.$$

Полученное решение означает, что резонанс токов возможен при двух значениях емкостного сопротивления.

2. Вычислим ток в неразветвленной части схемы по закону Ома для действующих значений:

$$I = Y \cdot U.$$

Полная проводимость  $Y$  при резонансе токов является чисто активной:

$$Y = G = G_1 + G_2 = \frac{R_1}{X_L^2 + R_1^2} + \frac{R_2}{X_C^2 + R_2^2}$$

При  $X_{C_1} = 15$  Ом активная проводимость

$$G = \frac{8}{36 + 64} + \frac{5}{225 + 25} = 0,1 \text{ См}.$$

Тогда ток  $I = G \cdot U = 0,1 \cdot 50 = 5$  А.

При  $X_{C_2} = 1,67$  Ом активная проводимость

$$G = \frac{8}{100} + \frac{5}{27,8} = 0,26 \text{ См.}$$

Ток  $I = 0,26 \cdot 50 = 13 \text{ А.}$

### Задача 5

Вычислить  $I, U, B_2, \omega$  в схеме (рис. 2.49), если  $\varphi = 0, I_1 = 1 \text{ А}, I_2 = 0,8 \text{ А}, Q_2 = 32 \text{ вар}, L = 25 \text{ мГн.}$

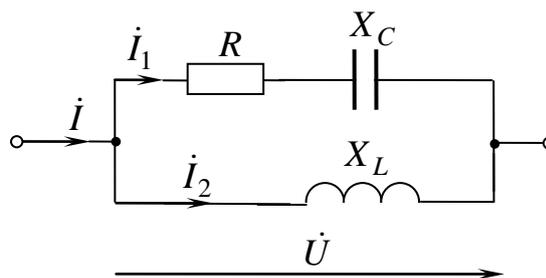


Рис. 2.49

### Решение

1. Вычислим ток  $I$  из треугольника токов, который получается при построении векторной диаграммы (рис. 2.50):

$$I = \sqrt{I_1^2 - I_2^2} = \sqrt{1^2 - 0,8^2} = 0,6 \text{ А.}$$

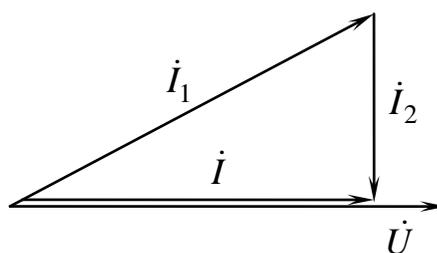


Рис. 2.50

2. Вычислим входное напряжение, воспользовавшись формулой реактивной мощности  $Q_2 = U \cdot I_2$ .

$$\text{Отсюда } U = \frac{Q_2}{I_2} = \frac{32}{0,8} = 40 \text{ В.}$$

3. Вычислим индуктивную проводимость по закону Ома:

$$B_2 = \frac{I_2}{U} = \frac{0,8}{40} = 0,02 \text{ См.}$$

4. Вычислим циклическую частоту  $\omega$ :

$$B_2 = \frac{1}{L\omega}.$$

Тогда  $\omega = \frac{1}{B_2 L} = \frac{10^3}{0,02 \cdot 25} = 2000 \text{ с}^{-1}.$

### Задача 6

Вычислить  $I_1, U, Y_1, X_L$  в схеме (рис. 2.51), если  $I = 0,4 \text{ А}, I_2 = 0,7 \text{ А}, G_1 = 0,08 \text{ См}, R = 3 \text{ Ом}, \varphi = 0.$

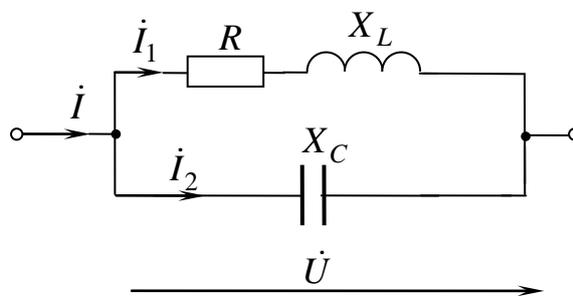


Рис. 2.51

### Решение

1. Вычислим ток  $I_1$  из треугольника токов (см. рис. 2.47):

$$I_1 = \sqrt{I^2 + I_2^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,7^2} = 0,8 \text{ А.}$$

2. Вычислим входное напряжение по закону Ома:

$$I = Y \cdot U = G_1 \cdot U.$$

Отсюда  $U = \frac{I}{G_1} = \frac{0,4}{0,08} = 5 \text{ В.}$

3. Вычислим полную проводимость первой ветви по закону Ома:

$$Y_1 = \frac{I_1}{U} = \frac{0,8}{5} = 0,16 \text{ См.}$$

4. Вычислим полное сопротивление первой ветви:

$$Z_1 = \frac{1}{Y_1} = \frac{1}{0,16} = 6,25 \text{ Ом.}$$

5. Вычислим индуктивное сопротивление:

$$X_L = \sqrt{Z_1^2 - R^2} = \sqrt{6,25^2 - 3^2} = 5,48 \text{ Ом.}$$

### Задача 7

Вычислить активное сопротивление  $R$  в схеме (рис. 2.51), если  $I = 0,8 \text{ А}$ ,  $Z = 4 \text{ Ом}$ ,  $B_1 = 0,3 \text{ См}$ ,  $\omega_0 = 10^5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi = 0$ .

#### Решение

Можно предложить несколько вариантов для решения этой задачи. Рассмотрим наиболее рациональные и интересные.

Вариант I.

1. Вычислим потребляемую мощность по формуле

$$P = Z I^2 = 4 \cdot 0,8^2 = 2,56 \text{ Вт.}$$

2. Вычислим напряжение  $U$  по закону Ома:

$$U = Z I = 4 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ В.}$$

3. Вычислим ток  $I_2$  по закону Ома:

$$I_2 = B_2 \cdot U.$$

Из условия резонанса токов  $B_1 = B_2$ , поэтому

$$I_2 = 0,3 \cdot 3,2 = 0,96 \text{ А.}$$

4. Вычислим ток  $I_1$  из треугольника токов (см. рис. 2.47):

$$I_1 = \sqrt{I^2 + I_2^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,96^2} = 1,25 \text{ А.}$$

5. Вычислим активное сопротивление  $R$  из формулы активной мощности:  $P = R \cdot I_1^2$ .

Отсюда

$$R = \frac{P}{I_1^2} = \frac{2,56}{1,25^2} = 1,63 \text{ Ом.}$$

Вариант II.

1. Вычислим активную проводимость  $G_1$ . При резонансе токов  $G_1$  равна полной проводимости цепи  $Y$ :

$$G_1 = Y = \frac{1}{Z} = 0,25 \text{ См.}$$

2. Вычислим полную проводимость ветви с индуктивной катушкой:

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = \sqrt{0,25^2 + 0,3^2} = 0,39 \text{ См.}$$

3. Вычислим активное сопротивление по формуле

$$R = \frac{G_1}{Y_1^2} = \frac{0,25}{0,39^2} = 1,63 \text{ Ом.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 8

Вычислить  $I_2, U, P, Y_1$  в схеме рис. 2.51, если  $I_1 = 1,5 \text{ А}$ ,  $I = 1,2 \text{ А}$ ,  $B_1 = 0,03 \text{ См}$ ,  $\varphi = 0$ .

Ответ:  $I_2 = 0,9 \text{ А}$ ,  $U = 30 \text{ В}$ ,  $P = 36 \text{ Вт}$ ,  $Y_1 = 0,05 \text{ См}$ .

### Задача 9

Вычислить  $I, I_1, I_2, C$  в схеме рис. 2.51, если  $G_1 = 0,2 \text{ См}$ ,  $B_2 = 0,5 \text{ См}$ ,  $U = 2 \text{ В}$ ,  $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi = 0$ .

Ответ:  $I = 0,4 \text{ А}$ ;  $I_1 = 1,08 \text{ А}$ ;  $I_2 = 1 \text{ А}$ ;  $C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ .

Задачи 10–13 предлагаются для самоконтроля.

### Задача 10

Вычислить  $I, B_2, U$  в схеме рис. 2.51, если  $I_1 = 1 \text{ А}$ ,  $I_2 = 0,8 \text{ А}$ ,  $Q_2 = 32 \text{ вар}$ ,  $\varphi = 0$ .

Ответ:  $I = 0,6$  А;  $B_2 = 0,02$  См;  $U = 40$  В.

### Задача 11

Вычислить  $I, U, Y_1, C$  в схеме рис. 2.51, если  $I_1 = 3$  А,  $I_2 = 1,8$  А,  $B_1 = 0,09$  См,  $\varphi = 0$ ,  $f = 50$  Гц.

Ответ:  $I = 2,4$  А;  $U = 20$  В;  $Y_1 = 0,15$  См;  $C = 287$  мкФ.

### Задача 12

Определить емкость конденсатора  $C$  в схеме рис. 2.51, если  $R = 12$  Ом,  $X_L = 16$  Ом,  $f = 50$  Гц.

Ответ:  $C = 127$  мкФ.

### Задача 13

Вычислить  $U$  и  $U_R$  в схеме [рис. 2.52](#), если  $I_1 = 2$  А,  $C = 0,4$  мкФ,  $\omega = 5 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi = 0$ .

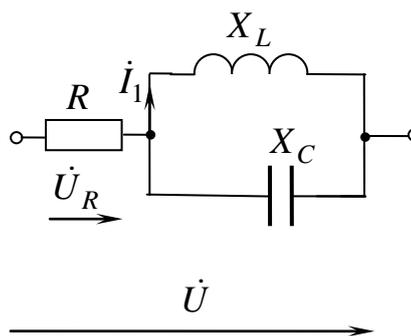


Рис. 2.52

Ответ:  $U = 100$  В;  $U_R = 0$ .

Тема 4

Анализ цепей с взаимной индуктивностью

Занятия 1 и 2

Цели занятий:

1. Ознакомиться с особенностями расчета цепей с взаимной индуктивностью.
2. Научиться выполнять развязку магнитных связей.
3. Научиться строить векторные диаграммы.

Электрические цепи могут содержать индуктивные катушки с магнитной связью: ЭДС в одной катушке возникает при изменении магнитного потока, созданного током другой катушки. Это явление характеризуют взаимной индуктивностью  $M$ .

Степень магнитной связи определяют коэффициентом связи  $K$ :

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \leq 1,$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – индуктивности катушек с магнитной связью.

Два зажима индуктивно связанных элементов называют одноименными, если при одинаковом направлении токов относительно них магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции складываются.

Одноименные зажимы обозначают точками. Направление магнитного потока определяют по правилу буравчика или правой руки: если охватить рукой катушку (пальцы направлены по току), то большой палец покажет направление магнитного потока.

Если токи одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов, имеет место согласное включение индуктивно связанных катушек, если противоположно – встречное.

Условно положительное направление ЭДС самоиндукции любого индуктивного элемента совпадает с условно положительным направлением тока этого элемента. Условно положительное направление ЭДС взаимной индукции  $e_M$  совпадает с направлением ЭДС самоиндукции  $e_L$  при согласном включении ( $e = e_L + e_M$ ) и противоположно направлено при встречном включении ( $e = e_L - e_M$ ).

В общем случае направление напряжения  $\dot{U}_M$ , обусловленного взаимной индуктивностью, можно определить по правилу: ток  $\dot{I}_K$  и напряжение  $jM \omega \dot{I}_K$  одинаково направлены относительно одноименных зажимов индуктивных элементов. Это правило дает возможность составить уравнение по второму закону Кирхгофа в случае, когда нельзя определить характер включения индуктивных элементов (согласное или встречное).

При наличии взаимной индуктивности токи в ветвях зависят от токов в других ветвях, поэтому для расчета можно использовать только методы непосредственного использования законов Кирхгофа и контурных токов, в которых эти зависимости учитываются.

Чтобы устранить ограничения, накладываемые на методы расчета, прибегают к развязке магнитных связей, т. е. к замене цепи с взаимной индуктивностью эквивалентной цепью, но без магнитных связей. Магнитная развязка применима для узлов, в которых сходятся не более трех ветвей.

Правило развязки: если в узле сходятся три ветви и две из них индуктивно связаны (рис. 2.53), то для развязки в первые две ветви добавляют индуктивный элемент с сопротивлением  $\mp X_M$ , а в третью ветвь – элемент с сопротивлением  $\pm X_M$  (рис. 2.54). Верхние знаки относятся к случаю, когда в узле соединены одноименные зажимы индуктивно связанных элементов.

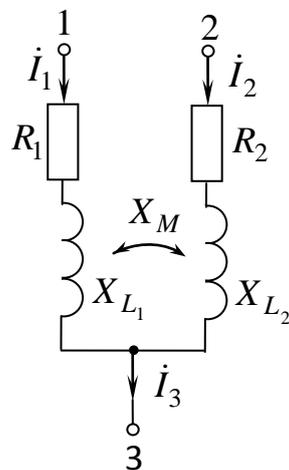


Рис. 2.53

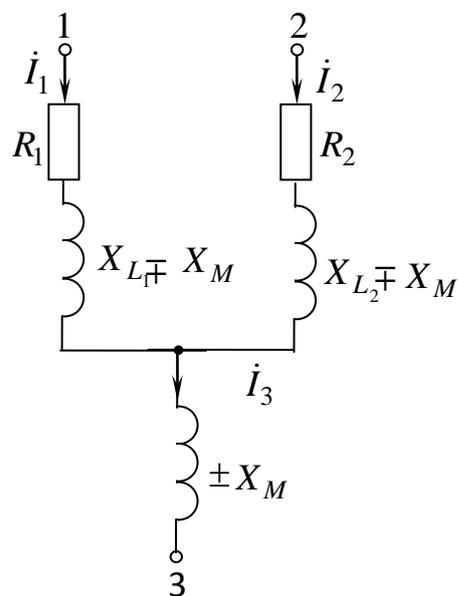


Рис. 2.54

При построении векторных диаграмм добавляются векторы напряжений, обусловленных взаимной индуктивностью. Они опережают на  $90^\circ$  векторы вызвавших их токов при согласном включении и отстают на  $90^\circ$  – при встречном.

Рассмотрим целевые задачи на конкретных примерах.

### Задача 1

Вычислить входное комплексное сопротивление схемы  $\underline{Z}$  (рис. 2.55), если  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_1} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{L_2} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 2 \text{ Ом}$ .

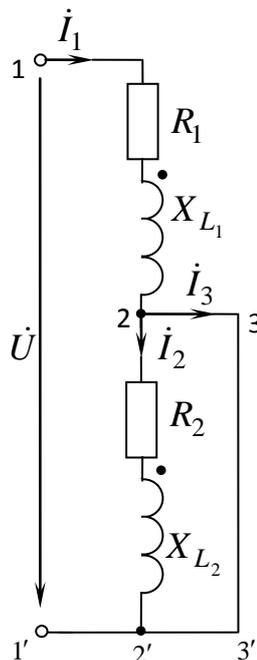


Рис. 2.55

*Решение*

1. Выявим узлы (2 и 2'), направим токи.

*Обратите внимание! При отсутствии взаимной индуктивности входной ток замыкался бы по «закоротке» (2–3–3'–2') и ток  $I_2$  был бы равен нулю. В схеме рис. 2.55 входной ток создает магнитный поток, который наводит во второй индуктивной катушке ЭДС, а она вызывает ток  $I_2$ .*

2. Входное комплексное сопротивление  $\underline{Z}$  является коэффициентом пропорциональности между комплексами входного напряжения  $\dot{U}$  и входного тока  $\dot{I}_1$ :

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1}.$$

3. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура 1–2–3–3'–2'–1', связывающее величины  $\dot{U}$  и  $\dot{I}_1$ . Напряжение на индуктивном элементе образует напряжение, обусловленное собственной индуктивностью  $jX_{L_1}\dot{I}_1$ , и напряжение, обусловленное взаимной индуктивностью и созданное током  $\dot{I}_2$ :  $jX_M\dot{I}_2$ . Катушки включены согласно, поэтому напряжения  $jX_{L_1}\dot{I}_1$  и  $jX_M\dot{I}_2$  записывают с одинаковыми

знаками, которые зависят от выбранного направления обхода контура. При обходе по часовой стрелке получим

$$R_1 \dot{I}_1 + j X_{L_1} \dot{I}_1 + j X_M \dot{I}_2 = \dot{U}.$$

4. Вычислить  $\underline{Z}$  не позволяет наличие в уравнении тока  $\dot{I}_2$ . Для исключения тока  $\dot{I}_2$  составим еще одно уравнение по второму закону Кирхгофа. Для контура 2-3-3'-2' получим

$$R_2 \dot{I}_2 + j X_{L_2} \dot{I}_2 + j X_M \dot{I}_1 = 0.$$

Отсюда ток  $\dot{I}_2 = -\frac{j X_M}{R_2 + j X_{L_2}} \cdot \dot{I}_1$ .

5. Подставив полученное выражение в первое уравнение, получим

$$(R_1 + j X_{L_1}) \dot{I}_1 + \frac{X_M^2}{R_2 + j X_{L_2}} \cdot \dot{I}_1 = \dot{U}.$$

Тогда

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = R_1 + j X_{L_1} + \frac{X_M^2}{R_2 + j X_{L_2}} = 3 + j4 + \frac{4}{5 + j8} = 4,86 e^{j48,5^\circ} \text{ Ом.}$$

### Задача 2

Вычислить емкость конденсатора  $C$  и ток  $I$  в схеме [рис. 2.56](#), если  $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = L_2 = 15 \text{ мГн}$ ,  $M = 5 \text{ мГн}$ ,  $f = 500 \text{ Гц}$ ,  $U = 120 \text{ В}$ ,  $\varphi = 0$ . Построить векторную диаграмму.

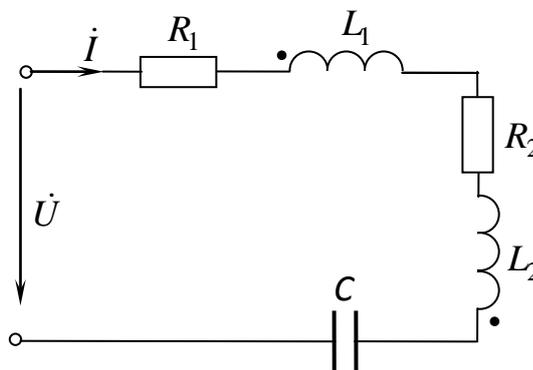


Рис. 2.56

Решение

1. Цепь имеет чисто активный характер, так как угол  $\varphi = 0$ , поэтому ток  $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{120}{20} = 6$  А.

2. Для вычисления емкости конденсатора воспользуемся условием резонанса напряжений:  $X = 0$ . Реактивное сопротивление  $X$  является мнимой составляющей (без  $j$ ) комплексного сопротивления схемы  $\underline{Z}$ .

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U} = R_1 \dot{I} + j X_{L_1} \dot{I} - j X_M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j X_{L_2} \dot{I} - j X_M \dot{I} - j X_C \dot{I}.$$

Комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R_1 + R_2 + j (X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M - X_C).$$

Реактивное сопротивление

$$X = \text{Im}(\underline{Z}) = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M - X_C = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} X_C &= X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M = 2\pi f(L_1 + L_2 - 2M) = \\ &= 2\pi \cdot 500(15 + 15 - 2 \cdot 5) \cdot 10^{-3} = 62,8 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Емкость

$$C = \frac{1}{2\pi f \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 62,8} = 5 \text{ мкФ.}$$

3. Векторная диаграмма приведена на [рис. 2.57](#).

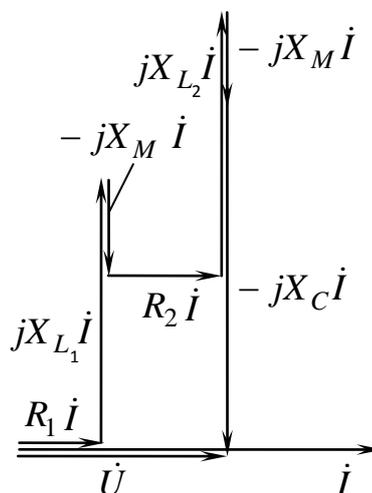


Рис. 2.57

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 3

Вычислить напряжения  $U_{ab}$  и  $U_{bc}$  в схеме [рис. 2.58](#), если  $U = 130$  В,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $X_{L_1} = 3$  Ом,  $X_{L_2} = 7$  Ом,  $X_M = 1$  Ом. Построить векторную диаграмму.

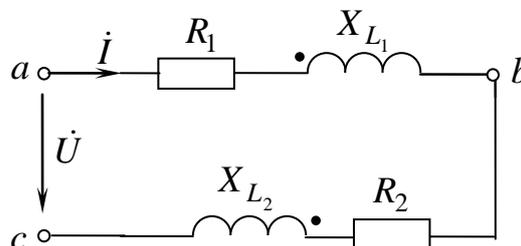


Рис. 2.58

Ответ:  $U_{ab} = 44,7$  В;  $U_{bc} = 85,5$  В.

### Задача 4

Определить величину взаимной индуктивности  $M$  двух катушек, включенных последовательно под напряжение  $U = 50$  В частотой  $f = 50$  Гц, если при согласном включении ток  $I_c = 1$  А, при встречном  $I_B = 2$  А. Ваттметр при согласном включении показывает мощность  $P_c = 15$  Вт.

#### Решение

1. Вычислим полные сопротивления схемы при разных способах включения по закону Ома:

$$Z_c = \frac{U}{I_c} = \frac{50}{1} = 50 \text{ Ом}; \quad Z_B = \frac{U}{I_B} = \frac{50}{2} = 25 \text{ Ом}.$$

2. Вычислим активное сопротивление схемы, воспользовавшись формулой активной мощности  $P_c = RI_c^2$ .

$$\text{Отсюда } R = R_1 + R_2 = \frac{P_c}{I_c^2} = \frac{15}{1} = 15 \text{ Ом}.$$

3. Вычислим реактивные сопротивления  $X_c$  и  $X_B$  из треугольников сопротивлений:

$$X_c = \sqrt{Z_c^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 15^2} = 47,7 \text{ Ом};$$

$$X_B = \sqrt{Z_B^2 - R^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ Ом}.$$

4. Вычислим взаимную индуктивность  $M$ .

Так как  $X_c = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M$ , а  $X_B = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M$ , то  $X_c - X_B = 4X_M$ .

$$\text{Отсюда } X_M = \frac{X_c - X_B}{4} = \frac{47,7 - 20}{4} = 6,925 \text{ Ом}.$$

$$\text{Тогда } M = \frac{X_M}{\omega} = \frac{X_M}{2\pi f} = \frac{6,925}{314} = 0,022 \text{ Гн}.$$

### Задача 5

Вычислить показания вольтметра в схеме [рис. 2.59](#), если  $E = 100$  В,  $R = X_C = X_{L_1} = X_{L_2} = 10$  Ом,  $X_M = 5$  Ом,  $R_V \rightarrow \infty$ .

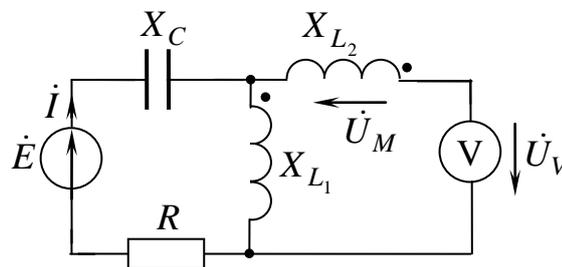


Рис. 2.59

#### Пояснение к решению

В месте подключения вольтметра цепь практически разорвана, поэтому тока во второй катушке нет. Ток источника ЭДС замыкается по контуру,

содержащему первую катушку, и наводит во второй катушке ЭДС взаимной индукции. Учитывающее эту ЭДС напряжение  $\dot{U}_M$  направлено одинаково с током  $\dot{I}$  в первой катушке относительно одноименных зажимов (от зажима с точкой). На первой идеальной катушке возникает только одно напряжение, обусловленное собственной индуктивностью  $\dot{U}_{L_1}$ , на второй – обусловленное взаимной индуктивностью  $\dot{U}_M$ .

Решение

1. Запишем выражение напряжения вольтметра как разность потенциалов на его зажимах:

$$\dot{U}_V = \dot{U}_{L_1} + \dot{U}_M = jX_{L_1}\dot{I} + jX_M\dot{I}.$$

Оба слагаемых записаны со знаком плюс, так как при проведении расчетов перемещение происходит навстречу току  $\dot{I}$  и напряжению  $\dot{U}_M$ , т. е. в сторону увеличения потенциала.

2. Вычислим нужный для расчета напряжения ток  $\dot{I}$ :

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + jX_{L_1} - jX_C} = \frac{100}{10 + j10 - j10} = 10 \text{ А.}$$

Тогда  $\dot{U}_V = j10 \cdot 10 + j5 \cdot 10 = j150 \text{ В.}$

Вольтметр показывает действующее значение напряжения  $U_V = 150 \text{ В.}$  Следующую задачу решите самостоятельно.

Задача 6

Вычислить показания вольтметра в схеме [рис. 2.60](#), если  $e = 100\sqrt{2}\sin 10^3 t \text{ В}$ ,  $X_{L_1} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_C = X_{L_2} = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_V \rightarrow \infty$ ,  $K = 0,5$ .

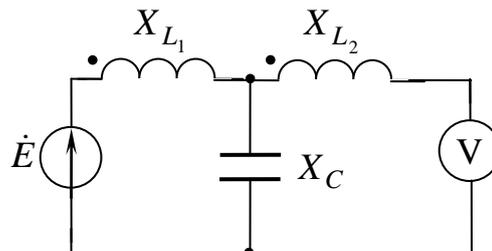


Рис. 2.60

Ответ:  $U_V = 170 \text{ В.}$

Задача 7

Определить показания вольтметров в цепи (рис. 2.61), если  $R = 30 \text{ Ом}$ ,  $L = 70 \text{ мГн}$ ,  $M = 10 \text{ мГн}$ ,  $R_V = \infty$ ,  $i = 0,5 \sin 500 t \text{ А}$ .

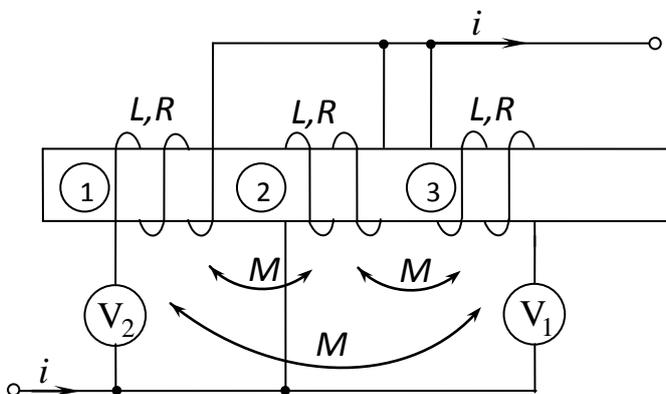


Рис. 2.61

Пояснение к решению

Сложность решения задачи заключается в том, что у индуктивных катушек не размечены одноименные зажимы. Разметка зажимов зависит от направления навивки катушки на сердечник и тока в ней. У катушек 2 и 3 (см. рис. 2.61) они одинаковы, поэтому и одноименные зажимы у них должны быть размечены аналогично.

Решение

1. Составим схему замещения анализируемой цепи (рис. 2.62). Разметим одноименные зажимы.

2. Ток в схеме один, так как в местах подключения вольтметров цепь разорвана. Комплекс действующего значения тока

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = \frac{0,5}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 0,35 \text{ А.}$$

3. Ток во второй катушке создает напряжения взаимной индукции в первой и третьей катушках, направленные относительно одноименных зажимов одинаково с током (см. рис. 2.62).

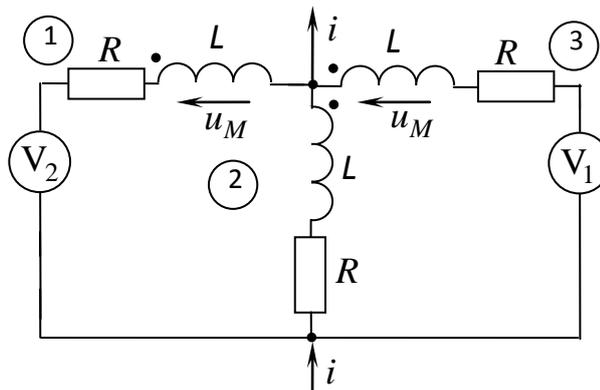


Рис. 2.62

4. Вычислим показания вольтметров:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{V_1} &= R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_M\dot{I} = R\dot{I} + jL\omega\dot{I} - jM\omega\dot{I} = \\ &= 30 \cdot 0,35 + j70 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 0,35 - j10 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 0,35 = \\ &= 10,5 + j10,5 = 14,8e^{j45^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{V_2} &= R\dot{I} + jX_L\dot{I} + jX_M\dot{I} = 30 \cdot 0,35 + j80 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 0,35 = \\ &= 10,5 + j14 = 17,5e^{j53^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Первый вольтметр показывает напряжение  $U_{V_1} = 14,8$  В, второй –  $U_{V_2} = 17,5$  В.

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 8

Вычислить показания вольтметров в схеме [рис. 2.63](#), если  $i = 10\sin 5000 t$  А,  $C = 2$  мкФ,  $M_{12} = M_{23} = 2$  мГн,  $R_V = \infty$ .

Ответ:  $U_{V_1} = 770$  В;  $U_{V_2} = 630$  В.

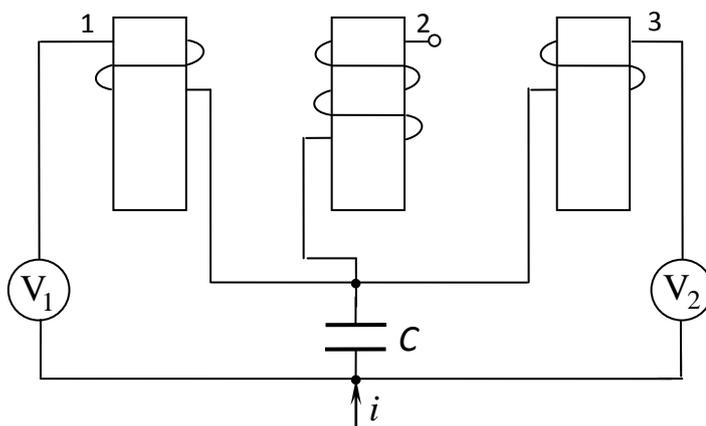


Рис. 2.63

Задача 9

Вычислить показания ваттметров в схеме [рис. 2.64](#), если  $\dot{U} = (150 + j150) \text{ В}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L_1\omega = 15 \text{ Ом}$ ,  $L_2\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ ,  $M\omega = 10 \text{ Ом}$ .

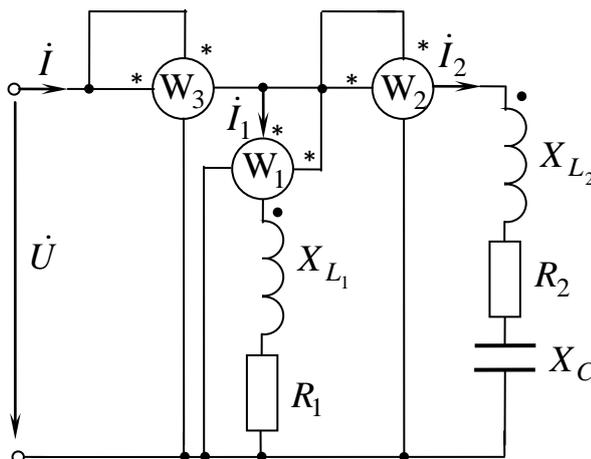


Рис. 2.64

Решение

1. Сделаем магнитную развязку ([рис. 2.65](#)).

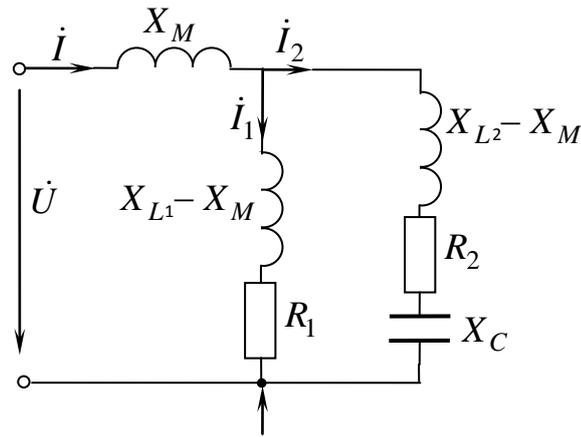


Рис. 2.65

2. Найдём эквивалентное комплексное сопротивление схемы:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= jM\omega + \frac{[R_1 + j(L_1 - M)\omega] \left[ R_2 + j(L_2 - M)\omega - j\frac{1}{C\omega} \right]}{R_1 + j(L_1 - M)\omega + R_2 + j(L_2 - M)\omega - j\frac{1}{C\omega}} = \\ &= j10 + \frac{(5 + j5)(10 - j10)}{15 - j5} = j10 + \frac{7,07e^{j45^\circ} \cdot 14,1e^{-j45^\circ}}{15,8e^{-j18,43^\circ}} = \\ &= j10 + 6,3e^{j18,43^\circ} = j10 + 5,98 + j1,99 \approx 6 + j12 = 13,4e^{j63,43^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

3. Найдём ток в свёрнутой схеме по закону Ома:

$$\underline{i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{150 + j150}{13,4e^{j63,43^\circ}} = \frac{212,13e^{j45^\circ}}{13,4e^{j63,43^\circ}} = 15,8e^{-j18,43^\circ} \text{ А.}$$

4. Найдём токи в параллельных пассивных ветвях:

$$\begin{aligned} \underline{i}_1 &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{i} = \frac{10 - j10}{15,8e^{-j18,43^\circ}} \cdot 15,8e^{-j18,43^\circ} = 14,1e^{-j45^\circ} \text{ А;} \\ \underline{i}_2 &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{i} = \frac{5 + j5}{15,8e^{-j18,43^\circ}} \cdot 15,8e^{-j18,43^\circ} = 7,07e^{j45^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

5. Вычислим показания ваттметров, воспользовавшись понятием комплексной мощности:

$$P_1 = \text{Re} \left( \underline{U} \underline{I}_1^* \right) = \text{Re} \left( 212,13e^{j45^\circ} \cdot 14,1e^{j45^\circ} \right) = 212,13 \cdot 14,1 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ Вт;}$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left( \dot{U} I_2^* \right) = \operatorname{Re} \left( 212,12 e^{j45^\circ} \cdot 7,07 e^{-j45^\circ} \right) = 1500 \text{ Вт};$$

$$P_3 = \operatorname{Re} \left( \dot{U} I^* \right) = \operatorname{Re} \left( 212,12 e^{j45^\circ} \cdot 15,8 e^{j18,43^\circ} \right) = 1500 \text{ Вт}.$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 10

Определить показания вольтметра и ваттметра в схеме [рис. 2.66](#) при разомкнутом и замкнутом выключателе, если  $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_1 = X_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $K = 0,8$ ,  $E = 141 \text{ В}$ .

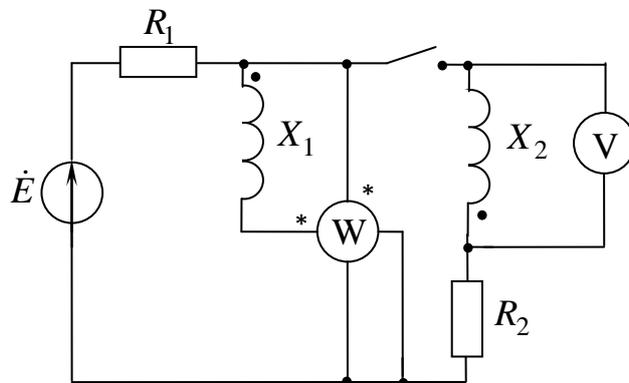


Рис. 2.66

Ответ: а)  $U = 80 \text{ В}$ ;  $P = 0 \text{ Вт}$ ; б)  $U = 27 \text{ В}$ ;  $P = 130 \text{ Вт}$ .

Задачи 11–15 предлагаются для самоконтроля.

### Задача 11

Вычислить напряжения  $U_{ab}$  и  $U_{bc}$  в схеме [рис. 2.67](#), если  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 1 \text{ Ом}$ . Построить векторную диаграмму.

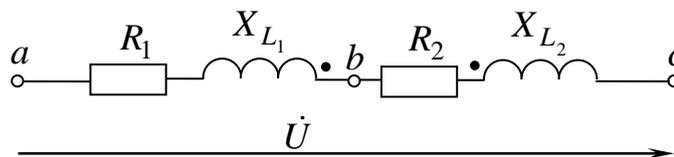


Рис. 2.67

Ответ:  $U_{ab} = 53,9 \text{ В}$ ,  $U_{bc} = 50 \text{ В}$ .

Задача 12

Определить показания вольтметра в схеме [рис. 2.68](#), если  $E = 100$  В,  $X_C = 130$  Ом,  $R_1 = 30$  Ом,  $X_{L_1} = 80$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $X_{L_2} = 50$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом,  $X_{L_3} = 80$  Ом,  $X_{M_{13}} = 60$  Ом,  $X_{M_{23}} = 40$  Ом,  $R_V = \infty$ .

Ответ:  $U_V = 79$  В.

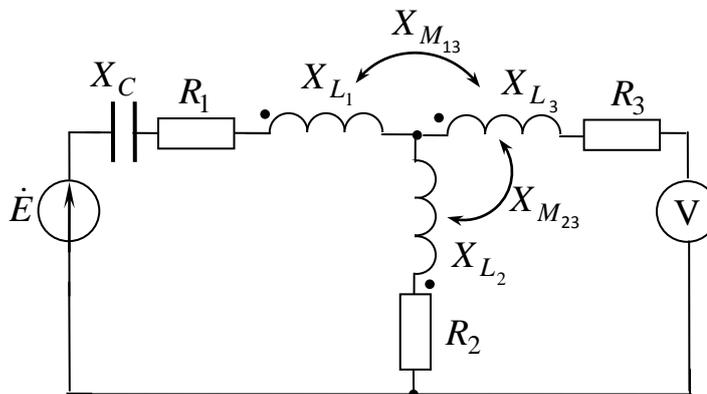


Рис. 2.68

Задача 13

Две индуктивно связанные катушки соединены между собой параллельно и подключены к сети переменного тока напряжением 120 В. Активным сопротивлением катушек пренебрегаем. При согласном включении токи в катушках были равны:  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 6$  А. При встречном включении ток во второй катушке в 2,5 раза больше тока в первой.

Определить коэффициент связи между катушками и ток в неразветвленной части схемы при встречном включении катушек.

Ответ:  $K = 0,5$ ,  $I = 14$  А.

Задача 14

Вычислить показания ваттметра в схеме [рис. 2.69](#), если  $R_1 = R_2 = X_{L_2} = X_{C_2} = X_M = 10$  Ом,  $X_{L_1} = X_{C_1} = 20$  Ом,  $J = 10$  А.

Ответ:  $P = 2000$  Вт.

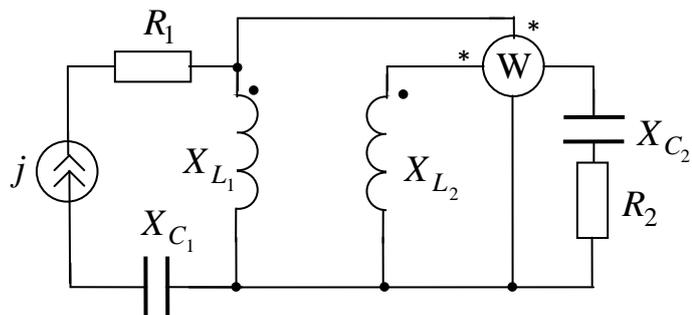


Рис. 2.69

### Задача 15

Индуктивные катушки могут быть соединены в узле  $C$  ([рис. 2.70](#)) либо одноименными, либо разноименными зажимами. Определить, при каком соединении напряжение  $\dot{U}_{AB}$  отстает по фазе от тока  $\dot{I}$ .

Ответ: разноименными зажимами.

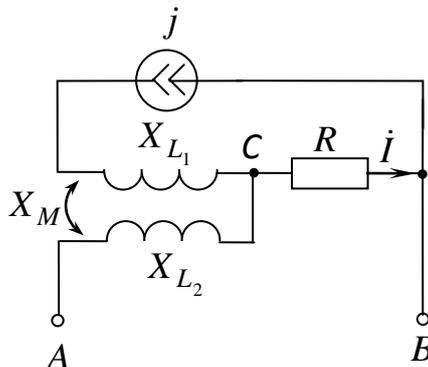


Рис. 2.70

## ГЛАВА 3 РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

### Тема 1 Расчет цепей с симметричной системой ЭДС

Трехфазные цепи – это частный случай многофазных систем переменного тока. Многофазной системой называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, отличающиеся одна от другой по фазе и индуктированные в одном источнике энергии.

Обычно наведенные в катушках трехфазного генератора ЭДС имеют одинаковые амплитуды и сдвинуты по фазе относительно друг друга на один и тот же угол  $120^\circ \left( \frac{2\pi}{3} \right)$ . Такую систему ЭДС называют симметричной.

Векторная диаграмма трехфазной симметричной системы ЭДС показана на [рис. 3.1](#).

При изображении векторной диаграммы на комплексной плоскости ([рис. 3.2](#)) каждому вектору можно сопоставить комплексное число. При расчете трехфазных цепей комплексную плоскость обычно поворачивают на угол  $\frac{\pi}{2}$  против часовой стрелки.

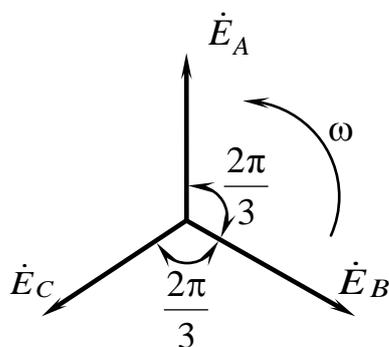


Рис. 3.1

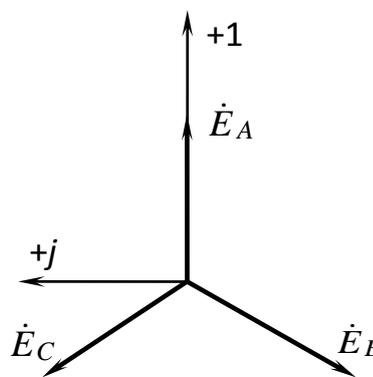


Рис. 3.2

Комплексы действующих значений ЭДС фаз в показательной форме могут быть записаны уравнениями:

$$\dot{E}_A = E; \quad \dot{E}_B = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{-j120^\circ} = a^2 E;$$

$$\dot{E}_C = E e^{j\frac{2\pi}{3}} = E e^{j120^\circ} = E e^{-j\frac{4\pi}{3}} = a E,$$

где  $a = e^{j120^\circ}$ ,  $a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ}$ .

$$\text{Значение } 1 + a + a^2 = 1 - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Сумма комплексных значений ЭДС трех фаз равна нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = E + E e^{-j120^\circ} + E e^{j120^\circ} = E - \frac{E}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}E - \frac{E}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}E = 0.$$

Обычно обмотки фаз генератора соединяют звездой. При этом концы фаз объединяют в нейтральную точку  $N$  (рис. 3.3). Начала фаз генератора обозначают буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Напряжения между началом и концом фазы (см. рис. 3.3) называют фазными ( $u_A, u_B, u_C$ ), а напряжения между началами фаз генератора – линейными ( $u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}$ ).

Внутренним сопротивлением фаз генератора можно пренебречь. В этом случае фазные напряжения  $U_A, U_B$  и  $U_C$  считают численно равными ЭДС фаз.

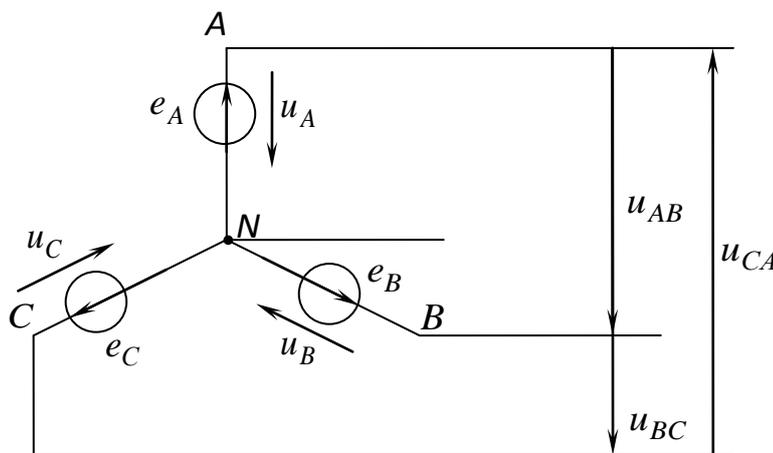


Рис. 3.3

Стрелка источника показывает направление повышения потенциала. Поэтому за условные положительные направления фазных напряжений принимают направления от начала к концу фаз обмоток, а линейных напряжений – к началу фазы, являющейся вторым индексом в обозначении напряжения.

Можно определить любое линейное напряжение, рассчитав изменение потенциалов между соответствующими началами фаз генератора:

$$u_{AB} = u_A - u_B; \quad u_{BC} = u_B - u_C; \quad u_{CA} = u_C - u_A.$$

Для комплексных значений эти уравнения имеют вид:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A,$$

а также дают возможность построить топографическую диаграмму фазных и линейных напряжений ([рис. 3.4](#)).

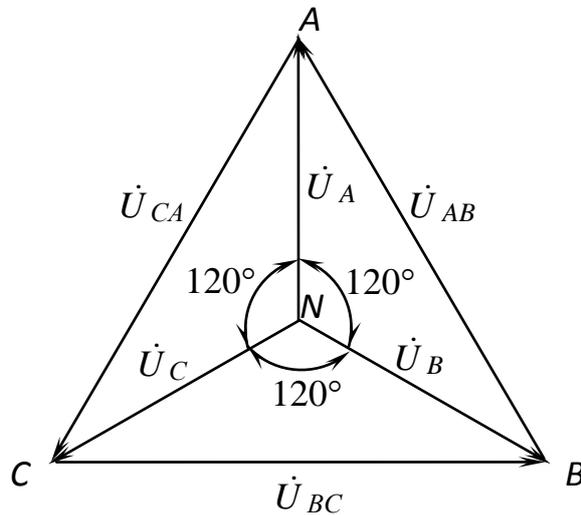


Рис. 3.4

Следует обратить внимание на противоположное направление стрелок на схеме, указывающих условное положительное направление напряжений и соответствующих им векторов на топографической диаграмме.

Из диаграммы видно, что векторы линейных напряжений  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  опережают по фазе соответственно векторы фазных напряжений  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  на угол  $30^\circ$ .

Линейное напряжение по величине больше фазного в  $\sqrt{3}$  раз, т. е.  
 $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}$  или  $U_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$ .

При соединении фаз обмоток генератора треугольником конец одной фазы соединяют с началом другой ([рис. 3.5](#)). В этом случае линейные напряжения равны фазным:  $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$ .

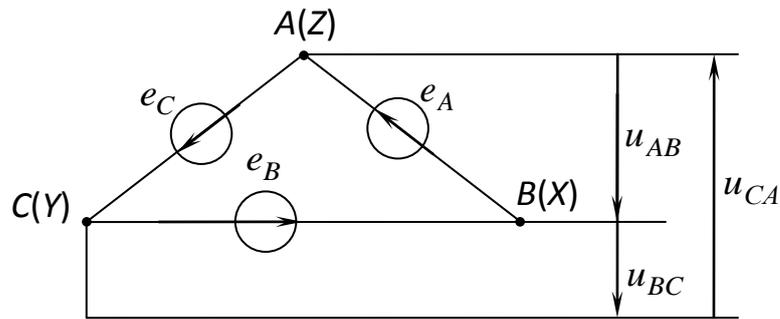


Рис. 3.5

Топографическую диаграмму напряжений в зависимости от способа соединения фаз приемников строят, как представлено на [рис. 3.6, а и б](#).

Приемники, включаемые в трехфазную цепь, могут быть однофазными и трехфазными. Начала и концы фаз трехфазных приемников обозначают соответственно буквами  $a, x; b, y; c, z$ .

Трехфазные приемники могут быть симметричными и несимметричными. У симметричных приемников равны между собой комплексные сопротивления фаз:  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$ .

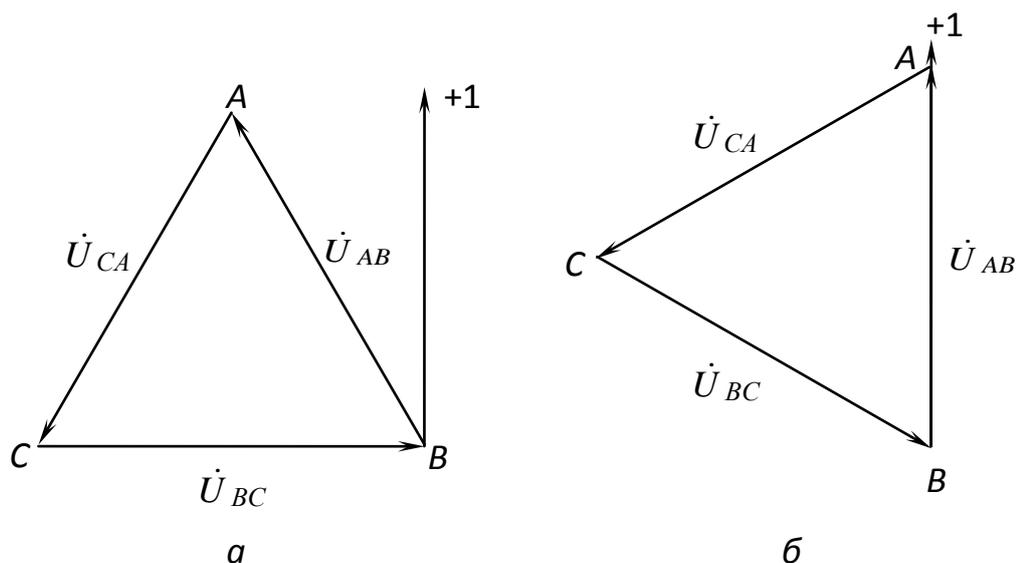


Рис. 3.6

У несимметричного приемника нагрузка может быть равномерной, если сопротивления фаз равны между собой по величине (по модулю), или однородной, если  $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c$ .

Способ соединения фаз приемника не зависит от способа соединения фаз обмоток генератора.

В трехфазных цепях различают те же мощности, что и в однофазных: мгновенную  $p$ , активную  $P$ , реактивную  $Q$  и полную  $S$ .

Мощности  $p$ ,  $P$  и  $Q$  находят как суммы мощностей трех фаз:  $p = \sum p_\phi$  ;  
 $P = \sum P_\phi$  ;  $Q = \sum Q_\phi$  .

Мощности каждой фазы вычисляют по известным формулам.

Потребляемой является активная мощность. Активную мощность фазы проще всего определить по формуле  $P_\phi = U_\phi I_\phi \cos\varphi_\phi$  или  $P_\phi = R_\phi I_\phi^2$ .

Реактивную мощность фазы ищут следующим образом:

$$Q_\phi = U_\phi I_\phi \sin\varphi_\phi \text{ или } Q_\phi = X_\phi I_\phi^2 .$$

Полную мощность трехфазной цепи вычисляют как гипотенузу суммарного треугольника мощностей:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(\sum P_\phi)^2 + (\sum Q_\phi)^2} .$$

*При симметричной нагрузке мощности фаз одинаковы, поэтому*

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos\varphi_\phi ; Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin\varphi_\phi .$$

При соединении звездой  $U_\phi = \frac{U_\pi}{\sqrt{3}}$  и  $I_\phi = I_\pi$ , а при соединении треугольником  $U_\phi = U_\pi$  и  $I_\phi = \frac{I_\pi}{\sqrt{3}}$ . Поэтому независимо от схемы соединения фаз приемника можно получить одинаковые формулы мощностей, вычисленных через линейные напряжения и токи:

$$P = \sqrt{3}U_\pi I_\pi \cos\varphi_\phi ; Q = \sqrt{3}U_\pi I_\pi \sin\varphi_\phi ; S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}U_\pi I_\pi .$$

Для измерения активной мощности используют ваттметры. Число ваттметров и способ их включения зависят от способа соединения фаз приемника и от их параметров.

Ваттметр показывает активную мощность, которую вычисляют по формуле

$$P_W = U_W \cdot I_W \cos\left(\overset{\wedge}{\dot{U}_W} \overset{\wedge}{\dot{I}_W}\right) \text{ или } P_W = \operatorname{Re}(\underline{S}_W) = \operatorname{Re}\left(\dot{U}_W \cdot \dot{I}_W^*\right),$$

где  $U_W$  и  $I_W$  – действующие значения напряжения на ваттметре и тока в нем.

Угол сдвига фаз между ними соответствует одинаковым положительным направлениям  $\dot{U}_W$  и  $\dot{I}_W$  относительно зажимов, отмеченных звездочками.

**Занятие 1**

**Расчет трехфазной цепи при соединении фаз приемника треугольником**

*Цели занятия:*

1. Научиться рассчитывать трехфазные цепи при соединении фаз приемника треугольником (нагрузка несимметричная и симметричная).
2. Научиться строить векторно-топографические диаграммы.
3. Научиться вычислять потребляемую цепью мощность.

Рассмотрим две первые целевые задачи.

В схеме замещения электрической цепи, представленной на [рис. 3.7](#), вычислить токи, если известны напряжения генератора и сопротивления фаз приемника.

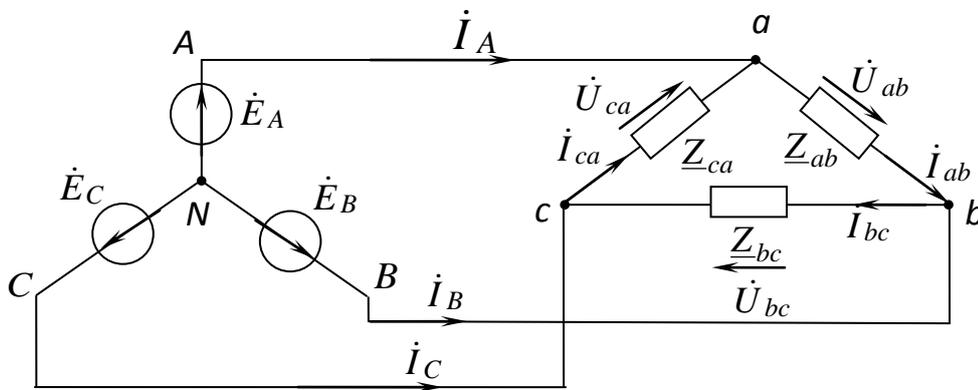


Рис. 3.7

В трехфазной цепи различают токи фазные ( $I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$ ) и линейные ( $I_A, I_B, I_C$ ). Фазные токи вычисляют на основании закона Ома по формулам

$$i_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad i_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad i_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}},$$

где  $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}$  и  $\dot{U}_{ca}$  – комплексы напряжений на фазах приемника, а  $\underline{Z}_{ab}, \underline{Z}_{bc}, \underline{Z}_{ca}$  – комплексные сопротивления фаз.

При соединении фаз приемника треугольником напряжения на его фазах равны линейным напряжениям генератора ([рис. 3.7](#)), поэтому

$$i_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad i_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad i_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}.$$

Сопротивлением линейных проводов при этом пренебрегают.

Затем вычисляют линейные токи по уравнениям, составленным на основании первого закона Кирхгофа для узлов  $a, b$  и  $c$ :

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

Из этих уравнений следует, что геометрическая сумма векторов линейных токов равна нулю:  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ .

Топографическая диаграмма и векторная диаграмма токов изображены на рис. 3.8. Вид векторной диаграммы токов зависит от характера нагрузки фаз приемника. Самой распространенной на практике является нагрузка активно-индуктивная. В этом случае вектор тока отстает от соответствующего вектора напряжения на угол  $\varphi$ , больший  $0^\circ$ , но меньший  $90^\circ$ .

Построение начинают с топографической диаграммы напряжений (см. рис. 3.6 а, б). Затем проводят векторы фазных токов под соответствующими углами к векторам фазных напряжений. Векторы линейных токов строят как геометрическую разность векторов токов тех двух фаз приемника, которые соединяют с данным линейным проводом. Удобнее вектор линейного тока получить как сумму вектора фазного тока, являющегося уменьшаемым, и вектора, противоположного вычитаемому фазному току (рис. 3.8).

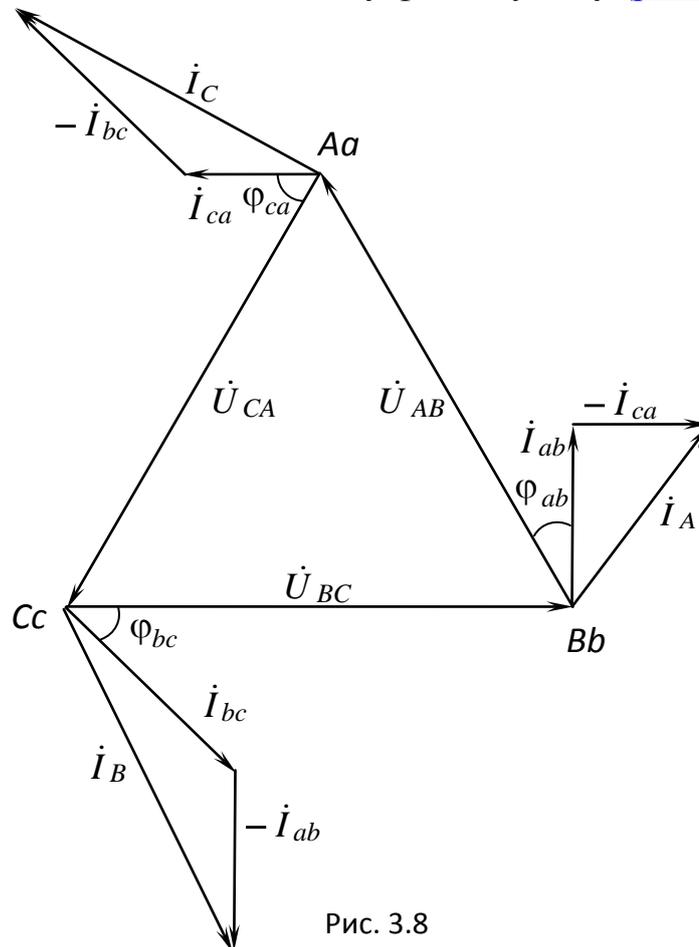


Рис. 3.8

Возможен другой способ построения векторной диаграммы токов, представленный на рис. 3.9.

У симметричного приемника комплексные сопротивления равны между собой:  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca}$ . Поэтому токи в фазах равны между собой по

величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $120^\circ \left( \frac{2\pi}{3} \right)$ .  
 Достаточно вычислить по закону Ома ток только одной фазы:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}.$$

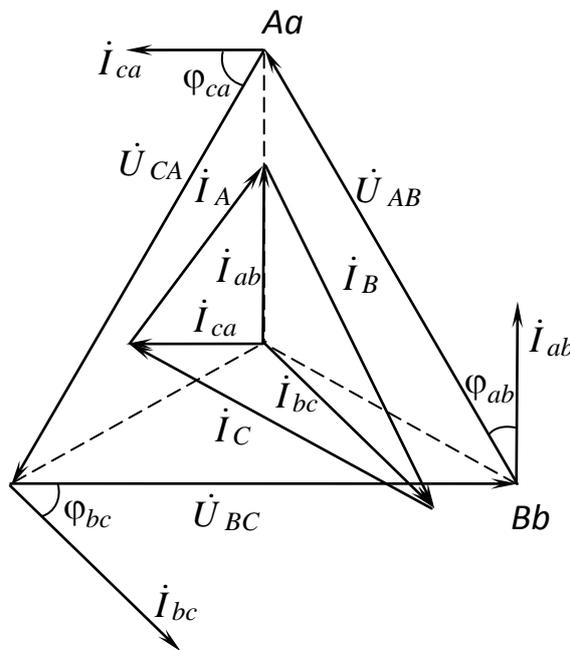


Рис. 3.9

Токи двух других фаз вычисляют, используя значение тока  $\dot{I}_{ab}$ :

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} e^{-j120^\circ}; \quad \dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j120^\circ}.$$

Комплексы линейных токов определяют как разности комплексов соответствующих фазных токов.

Векторно-топографическая диаграмма при симметричной нагрузке изображена на [рис. 3.10](#).

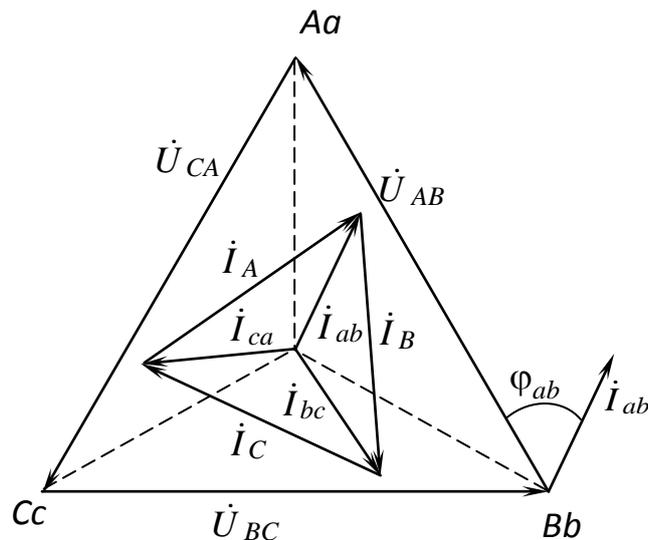


Рис. 3.10

Из диаграммы видим, что линейные токи по величине равны между собой и сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол  $120^\circ$ . Линейный ток по величине в  $\sqrt{3}$  раз превышает фазный:

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}}.$$

Векторы линейных токов  $i_A, i_B$  и  $i_C$  отстают по фазе соответственно от векторов фазных токов  $i_{ab}, i_{bc}$  и  $i_{ca}$  на угол  $30^\circ$ .

Вычислив фазный ток  $i_{ab}$ , можно записать значения всех линейных токов следующим образом:

$$i_A = \sqrt{3} i_{ab} e^{-j30^\circ}; i_B = i_A e^{-j120^\circ}; i_C = i_A e^{j120^\circ}.$$

Если нужно вычислить только величины токов, расчет производят по формулам

$$I_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{фп}}}{Z_{\text{ф}}} = \frac{U_{\text{лг}}}{Z_{\text{ф}}}; I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}}.$$

### Задача 1

Определить показания амперметров в схеме [рис. 3.11](#), если линейное напряжение  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ;  $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = (10 + j10) \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

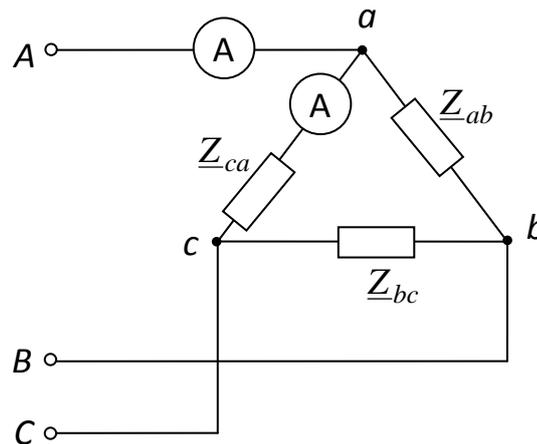


Рис. 3.11

*Решение*

Комплексные сопротивления фаз приемника одинаковы, нагрузка является активно-индуктивной. Приборы показывают действующие значения.

При симметричной нагрузке можно сделать расчет, не используя комплексные числа. Токи в фазах приемника одинаковы по величине. Их определяют по закону Ома:

$$I_{\phi} = \frac{U_{\text{фп}}}{Z_{\phi}}$$

Напряжение на фазе приемника равно линейному напряжению. Полное сопротивление фазы приемника

$$Z_{\phi} = \sqrt{R_{\phi}^2 + X_{\phi}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,1 \text{ Ом.}$$

Тогда  $I_{\phi} = \frac{220}{14,1} = 15,6 \text{ А}$ . Токи в линии  $I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\phi} \approx 27 \text{ А}$ .

Векторно-топографическая диаграмма имеет вид, представленный на [рис. 3.12](#). При активно-индуктивной нагрузке векторы токов в фазах отстают от соответствующих фазных напряжений на угол  $\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{10}{10} = 45^{\circ}$ .

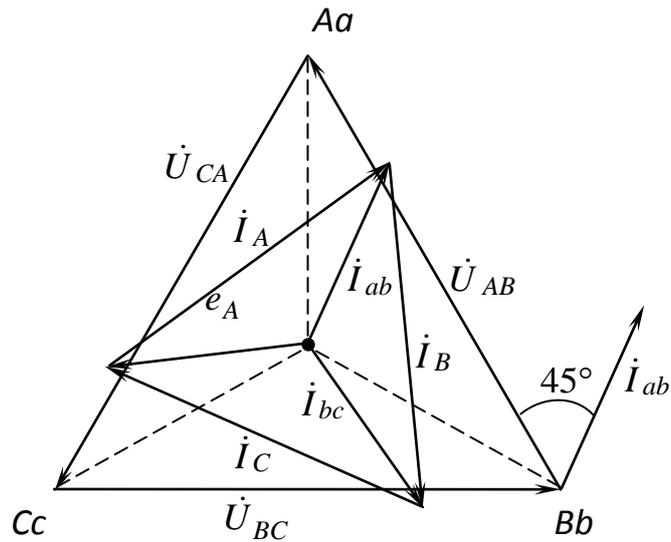


Рис. 3.12

Векторы линейных токов получают, соединяя концы соответствующих векторов фазных токов.

### Задача 2

Вычислить мощность, потребляемую цепью, схема замещения которой изображена на [рис. 3.13](#), если  $U_{\text{л}} = 220$  В,  $R_{ab} = 10$  Ом,  $R_{ca} = X_{ab} = 15$  Ом,  $X_{bc} = X_{ca} = 25$  Ом.

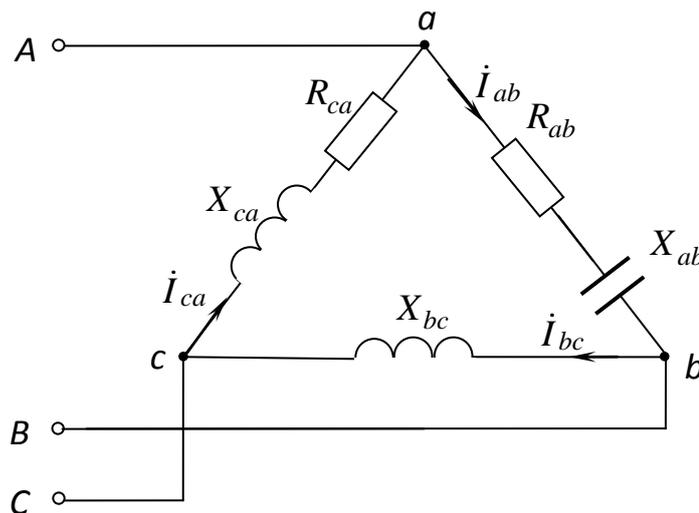


Рис. 3.13

*Пояснение к решению*

Задачу можно решить без применения комплексных чисел. Так как мощность потребляют только резистивные элементы, то удобно воспользоваться формулой  $P = RI^2$ .

*Решение*

1. Вычислим токи в резистивных элементах по закону Ома для действующих значений:

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R_{ab}^2 + X_{ab}^2}} = \frac{220}{\sqrt{10^2 + 15^2}} = \frac{220}{18} = 12 \text{ А};$$

$$I_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{U_{CA}}{\sqrt{R_{ca}^2 + X_{ca}^2}} = \frac{220}{\sqrt{15^2 + 25^2}} = \frac{220}{29} = 7,6 \text{ А}.$$

2. Определим потребляемую мощность:

$$P = R_{ab} I_{ab}^2 + R_{ca} I_{ca}^2 = \\ = 10 \cdot 12^2 + 15 \cdot 7,6^2 = 2306,4 \text{ Вт}.$$

**Задача 3**

Вычислить фазные и линейные токи в схеме на [рис. 3.14](#), если  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = (8 - j10,4)$  Ом,  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

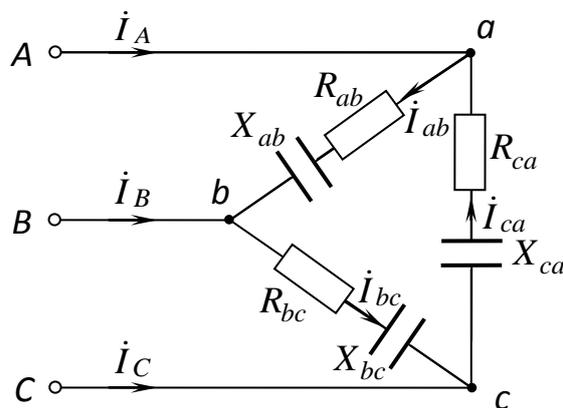


Рис. 3.14

*Решение*

1. Вычислим фазные токи по закону Ома. Приемник симметричный, поэтому токи равны по величине и сдвинуты относительно друг друга на угол  $120^\circ$ :

$$\begin{aligned} \dot{I}_{ab} &= \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R_{ab} - jX_{ab}} = \\ &= \frac{220}{8 - j10,4} = \frac{220}{13e^{-j52^\circ}} = 16,9e^{j52^\circ} \text{ А;} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} e^{-j120^\circ} = 16,9e^{-j68^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j120^\circ} = 16,9e^{j172^\circ} \text{ А.}$$

2. Вычислим линейные токи. У симметричного приемника

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \sqrt{3} \dot{I}_{ab} e^{-j30^\circ} = \\ &= \sqrt{3} \cdot 16,9e^{j52^\circ} \cdot e^{-j30^\circ} = 29,7e^{j22^\circ} \text{ А;} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = 29,7e^{j22^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 29,7e^{-j98^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 29,7e^{j22^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 29,7e^{j142^\circ} \text{ А.}$$

3. Векторно-топографическая диаграмма приведена на [рис. 3.15](#). Ее построение начинают с топографической диаграммы напряжений генератора. Топографическая диаграмма напряжений приемника совпадает с линейными напряжениями генератора.

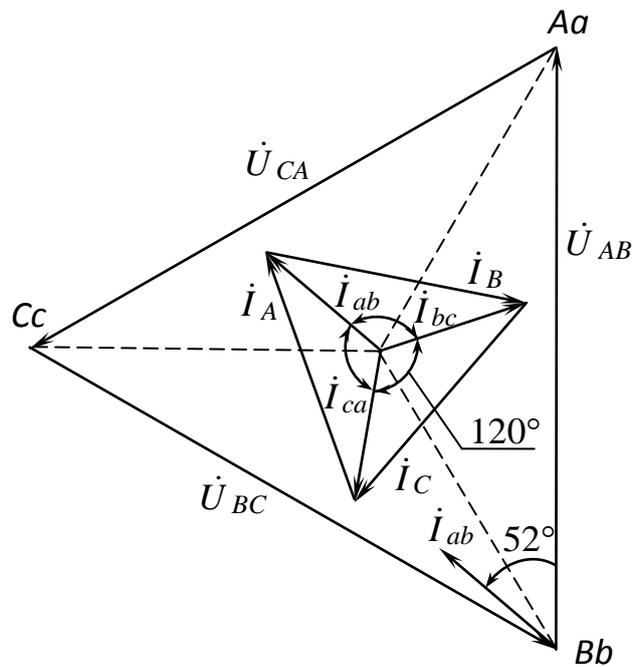


Рис. 3.15

Ток  $\dot{I}_{ab}$  опережает по фазе напряжение  $\dot{U}_{ab}$  на угол  $\varphi_{ab} = -52^\circ$ . Перенесем вектор тока  $\dot{I}_{ab}$  в центр топографической диаграммы. Построим векторы токов  $\dot{I}_{bc}$  и  $\dot{I}_{ca}$ . Соединив концы векторов фазных токов и указав направление согласно уравнениям по второму закону Кирхгофа, получим векторы линейных токов  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$ .

Построенная диаграмма позволяет убедиться в правильности произведенных расчетов.

#### Задача 4

Вычислить показания ваттметров в схеме на [рис. 3.16](#), если  $R_{ab} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_{ab} = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_{bc} = 35 \text{ Ом}$ ,  $R_{ca} = 16 \text{ Ом}$ ,  $X_{ca} = 28 \text{ Ом}$ ,  $U_{л} = 380 \text{ В}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

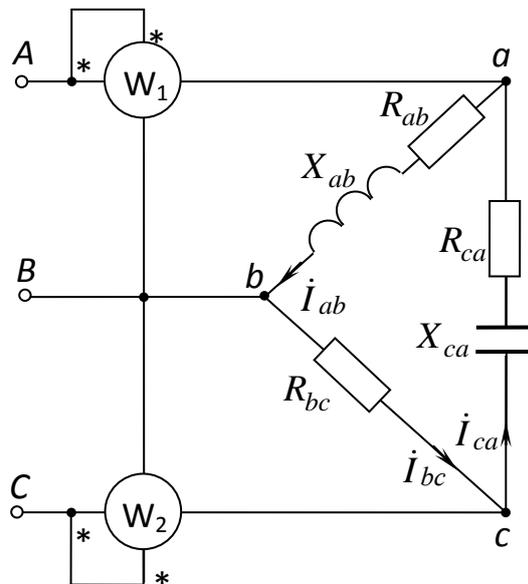


Рис. 3.16

*Решение*

1. Вычислим фазные токи по закону Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{ab} &= \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R_{ab} + jX_{ab}} = \\ &= \frac{380}{20 + j25} = \frac{380}{32e^{j51^\circ}} = \\ &= 11,88e^{-j51^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{bc} &= \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{\dot{U}_{bc}}{R_{bc}} = \frac{380e^{-j120^\circ}}{35} = \\ &= 10,86e^{-j120^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{\dot{U}_{CA}}{R_{ca} - jX_{ca}} = \frac{380e^{j120^\circ}}{16 - j28} = \frac{380e^{j120^\circ}}{32e^{-j60^\circ}} = 11,88e^{j180^\circ} \text{ A}.$$

2. Вычислим линейные токи по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = 11,88e^{-j51^\circ} - 11,88e^{j180^\circ} = 7,47 - j9,23 + 11,88 =$$

$$= 19,35 - j9,33 = 21,48e^{-j25,7^\circ} \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = 10,86e^{-j120^\circ} - 11,88e^{-j51^\circ} = -5,43 - j9,4 - 7,48 + j9,23 = \\ &= -12,91 - j0,17 = 12,91e^{-j179^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = -11,88 + 5,43 + j9,4 = -6,45 + j9,4 = 11,4e^{j124,5^\circ} \text{ A}.$$

3. Найдем показания ваттметров, используя формулу комплексной мощности:

$$P_{W_1} = \operatorname{Re}\left(\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^*\right) = \operatorname{Re}\left(380 \cdot 21,48e^{25,7^\circ}\right) = 7355 \text{ Вт};$$

$$\begin{aligned} P_{W_2} &= \operatorname{Re}\left(\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*\right) = \operatorname{Re}\left(380e^{j60^\circ} \cdot 11,4e^{-j124,5^\circ}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(4332e^{-j64,5^\circ}\right) = 1865 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что первым индексом у напряжения, измеряемого ваттметром, обозначают зажим, отмеченный звездочкой ( $\dot{U}_{CB}$  при вычислении  $P_{W_2}$ ).

Правильность решения можно проверить следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{W_1} + P_{W_2} &= R_{ab} \cdot I_{ab}^2 + R_{bc} \cdot I_{bc}^2 + R_{ca} \cdot I_{ca}^2; \\ 7355 + 1865 &= 20 \cdot 11,88^2 + 35 \cdot 10,86^2 + 16 \cdot 11,88^2; \end{aligned}$$

$$9220 \text{ Вт} \approx 9208 \text{ Вт}.$$

Погрешность составляет 0,13 %.

4. Векторно-топографическая диаграмма приведена на [рис. 3.17](#).

*Диаграмма позволяет проверить правильность вычисления линейных токов.*

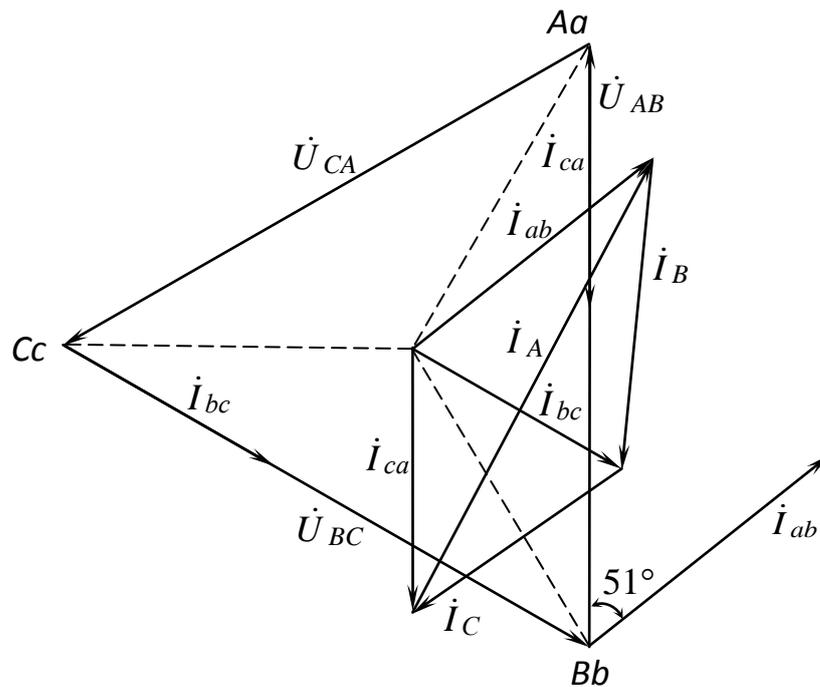


Рис. 3.17

Задачи 5–7 решите самостоятельно.

### Задача 5

Вычислить ток  $I_A$  в схеме [рис. 3.18](#), если  $R = X_L = X_C = 220$  Ом,  $U_{\text{л}} = 220$  В.

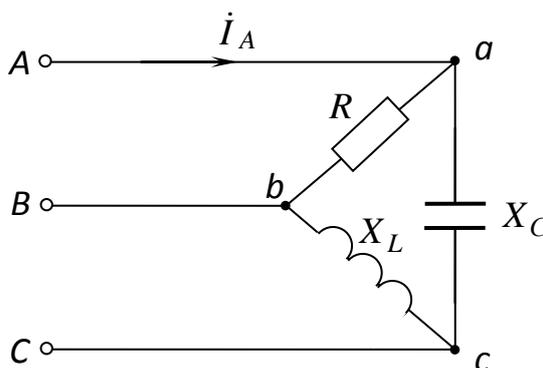


Рис. 3.18

Ответ:  $I_A = 1,93$  А.

### Задача 6

Определить показания ваттметров в схеме [рис. 3.19](#), если  $U_{\phi} = 220$  В и  $I_{\phi} = 10$  А. Построить векторно-топографическую диаграмму.

Ответ:  $P_{W_1} = 1100$  Вт,  $P_{W_2} = 1100$  Вт.

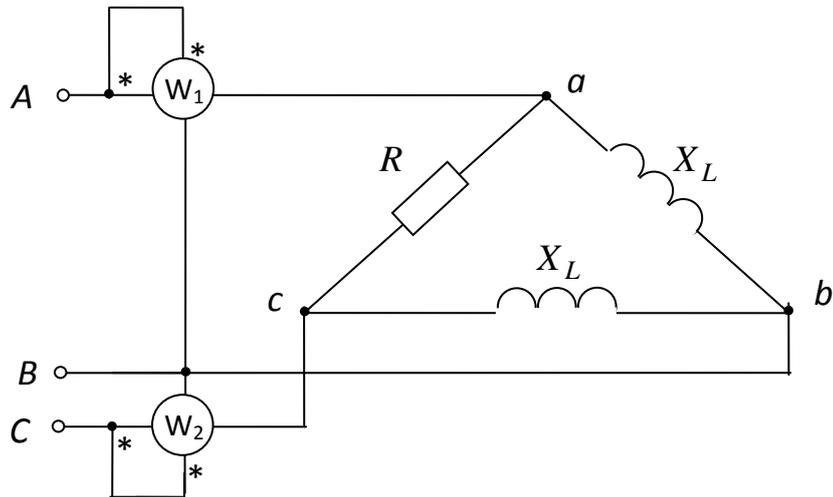


Рис. 3.19

### Задача 7

Вычислить показания ваттметров в схеме [рис. 3.20](#), если  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ , в каждую фазу включено по одной лампе с  $P_{\text{н}} = 50 \text{ Вт}$ ,  $U_{\text{н}} = 220 \text{ В}$ .

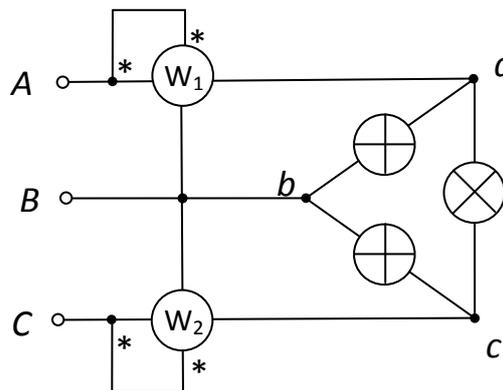


Рис. 3.20

Ответ:  $P_{W_1} = P_{W_2} = 75 \text{ Вт}$ .

Следующие задачи решите для самоконтроля.

### Задача 8

Вычислить ток  $I_C$  в схеме [рис. 3.21](#), если  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ,  $R = X_C = 190 \text{ Ом}$ .

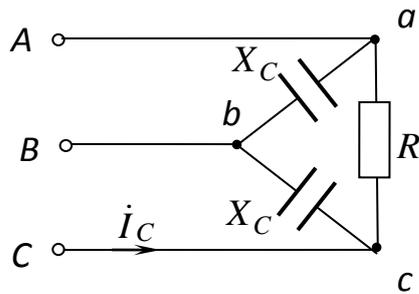


Рис. 3.21

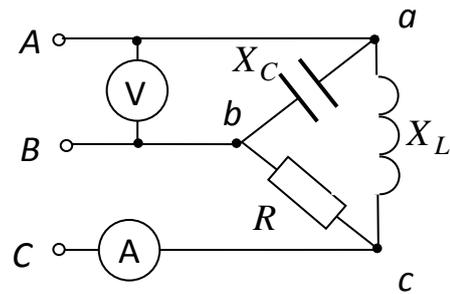


Рис. 3.22

Ответ:  $I_C = 3,86$  А.

### Задача 9

Вычислить показания вольтметра в схеме [рис. 3.22](#), если  $R = X_L = X_C = 100$  Ом, амперметр показывает ток  $I_A = 3,84$  А.

Ответ:  $U_V = 200$  В.

### Задача 10

Вычислить показания ваттметров в схеме [рис. 3.23](#), если  $R_{ab} = 22$  Ом,  $X_{ab} = 28$  Ом,  $R_{bc} = 14$  Ом,  $X_{bc} = 16$  Ом,  $R_{ca} = 8$  Ом,  $X_{ca} = 18$  Ом,  $U_{л} = 220$  В.

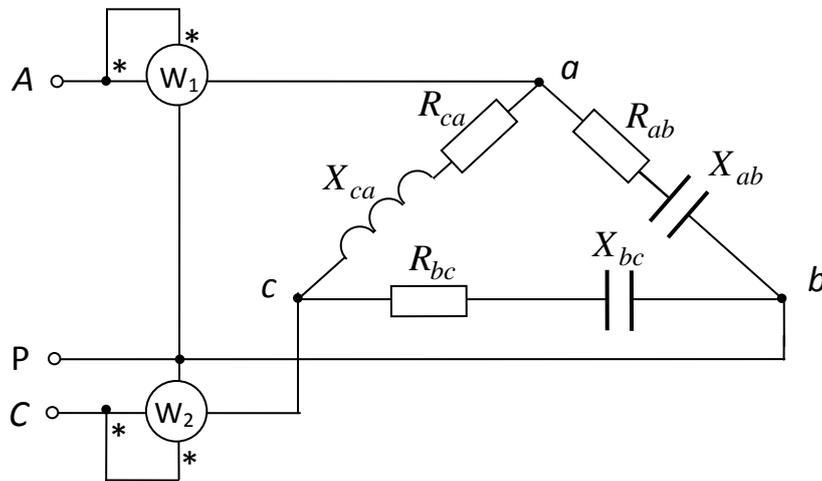


Рис. 3.23

Ответ:  $P_{W_1} = -615$  Вт,  $P_{W_2} = 3902$  Вт.

### Задача 11

Вычислить показания ваттметров в схеме [рис. 3.24](#), если  $U_{л} = 220$  В,  $R_{ab} = 8$  Ом,  $X_{ab} = 6$  Ом,  $R_{bc} = X_{ca} = 10$  Ом. Построить векторно-топографическую диаграмму.

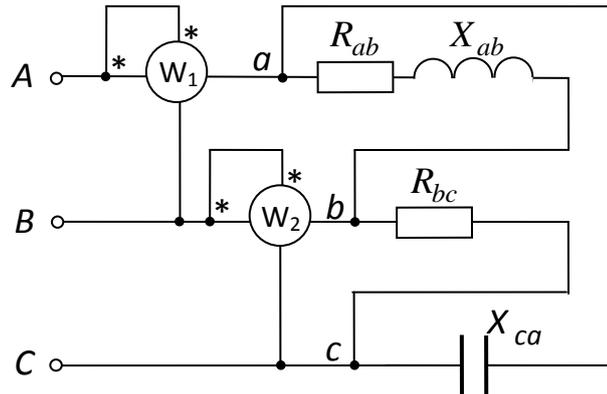


Рис. 3.24

Ответ:  $P_{W_1} = 8052$  Вт,  $P_{W_2} = 4248$  Вт.

### Занятие 2

#### Расчет трехфазной цепи при соединении звездой четырехпроводной с нейтральным проводом

*Цели занятия:*

1. Научиться вычислять токи и напряжения в схеме с нейтральным проводом, обладающим сопротивлением, при несимметричном и симметричном приемниках.
2. Научиться вычислять токи и напряжения в случае, если сопротивлением нейтрального провода можно пренебречь, при несимметричном и симметричном приемниках.
3. Научиться строить векторно-топографические диаграммы.
4. Научиться определять показания ваттметров, вычислять потребляемую мощность.

Рассмотрим первую целевую задачу. Схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 3.25](#).

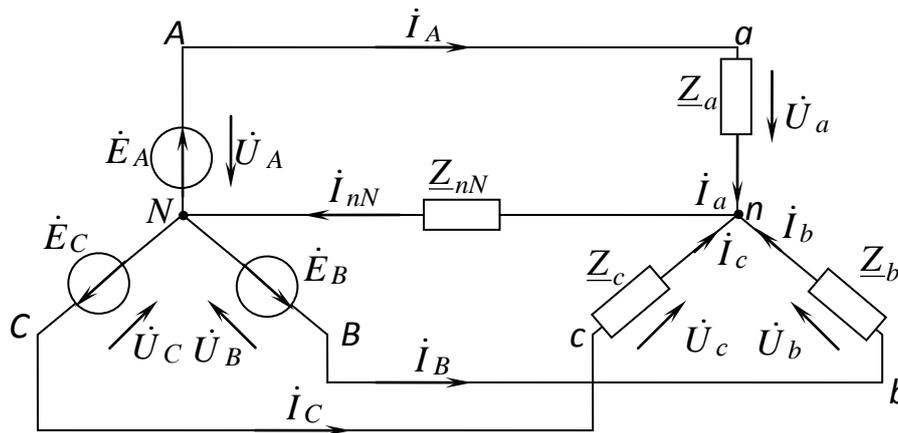


Рис. 3.25

По известным значениям напряжения генератора и сопротивлений фаз приемника нужно вычислить фазные и линейные токи, а также ток в нейтральном проводе, соединяющем нейтральные точки генератора и приемника.

*Из схемы видим, что при соединении фаз звездой фазные и линейные токи соответственно равны между собой, например  $I_A = I_a$ .*

Трёхфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, поэтому для их расчета пригодны все методы, применяемые в однофазных цепях. Анализируемую схему можно рассматривать как схему с двумя узлами ( $N$  и  $n$ ) и рассчитать токи в ней методом напряжения между двумя узлами.

Напряжение между нейтральными точками генератора и приемника можно вычислить по формуле

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_{nN}},$$

где  $\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a}$ ,  $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b}$ ,  $\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c}$  – комплексные проводимости фаз приемника;  $\underline{Y}_{nN} = \frac{1}{\underline{Z}_{nN}}$  – комплексная проводимость нейтрального провода.

Линейные и равные им соответственно фазные токи можно определить по закону Ома для активной ветви:

$$\dot{I}_A = \dot{i}_a = \underline{Y}_a (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}); \dot{I}_B = \dot{i}_b = \underline{Y}_b (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}); \dot{I}_C = \dot{i}_c = \underline{Y}_c (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}).$$

Выражения в скобках являются разностью потенциалов между началами ( $a, b, c$ ) и концами ( $n$ ) фаз приемников, т. е. фазными напряжениями приемника. Например,  $\dot{U}_a = -\dot{U}_{nN} + \dot{U}_A$ .

Поэтому уравнения можно переписать в виде

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a \cdot \dot{U}_a; \dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b \cdot \dot{U}_b; \dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c \cdot \dot{U}_c.$$

Ток в нейтральном проводе можно вычислить по закону Ома для пассивной ветви или по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_{nN} = \underline{Y}_{nN} \cdot \dot{U}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c.$$

Топографическую диаграмму строят в два этапа:

1. Построение топографической диаграммы напряжений генератора ([см. рис. 3.4](#)).

2. Построение топографической диаграммы напряжений приемника.

Напряжение – разность потенциалов между двумя точками. Если известна картина распределения потенциалов различных точек схемы на комплексной плоскости, то, соединив две соответствующие точки, можно получить вектор нужного напряжения. Если сопротивлением линии пренебрегают, то на схеме замещения начала фаз генератора и приемника коротко соединены между собой. Тогда потенциалы их будут одинаковы, точки  $A$  и  $a$ ,  $B$  и  $b$ ,  $C$  и  $c$  на комплексной плоскости совпадают. Между нейтральными точками генератора  $N$  и приемника  $n$  возникает напряжение  $\dot{U}_{nN}$ .

Точка  $n$  на комплексной плоскости смещена относительно точки  $N$ . Поэтому напряжение  $\dot{U}_{nN}$  называют напряжением смещения нейтрали. Точку  $n$  получим, построив вектор  $\dot{U}_{nN}$ . Соединив точки, соответствующие началам и концам фаз приемника, получим векторы фазных напряжений приемника  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ . Система фазных напряжений приемника несимметрична.

Векторная диаграмма токов зависит от нагрузки.

Рассмотрим первую целевую задачу на конкретном примере.

### Задача 1

Вычислить токи в схеме [рис. 3.26](#), если  $U_\phi = 127$  В,  $R_a = 7$  Ом,  $R_b = 0,9$  Ом,  $R_c = 10,3$  Ом,  $X_a = 11,9$  Ом,  $X_b = 4,2$  Ом,  $X_c = 8,2$  Ом,  $R_{nN} = 10$  Ом.

Построить векторно-топографическую диаграмму.

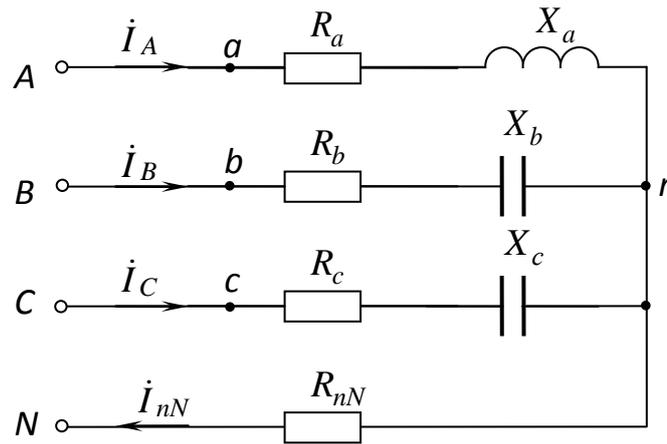


Рис. 3.26

*Решение*

1. Вычислим напряжение смещения нейтрали:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{nN} &= \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_{nN}} = \\ &= \frac{\frac{1}{7 + j11,9} \cdot 127 + \frac{1}{0,9 - j4,2} \cdot 127e^{-j120^\circ} + \frac{1}{10,3 - j8,2} \cdot 127e^{j120^\circ}}{\frac{1}{7 + j11,9} + \frac{1}{0,9 - j4,2} + \frac{1}{10,3 - j8,2} + 0,1} = \\ &= \frac{\frac{127}{13,8e^{j60^\circ}} + \frac{127e^{-j120^\circ}}{4,3e^{-j78^\circ}} + \frac{127e^{j120^\circ}}{13,16e^{-j39^\circ}}}{\frac{1}{13,8e^{j60^\circ}} + \frac{1}{4,3e^{-j78^\circ}} + \frac{1}{13,16e^{-j39^\circ}} + 0,1} = \\ &= \frac{9,2e^{-j60^\circ} + 29,53e^{-j42^\circ} + 9,65e^{j159^\circ}}{0,07e^{-j60^\circ} + 0,23e^{j78^\circ} + 0,076e^{j39^\circ} + 0,1} = \\ &= \frac{4,6 - j7,97 + 21,95 - j19,76 - 9,01 + j3,46}{0,035 - j0,06 + 0,05 + j0,22 + 0,06 + j0,048 + 0,1} = \frac{17,54 - j24,27}{0,245 + j0,208} = \end{aligned}$$

$$= \frac{29,94e^{-j54^\circ}}{0,32e^{j40^\circ}} = 93,6e^{-j94^\circ} \text{ В.}$$

2. Найдем токи в схеме по закону Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \underline{Y}_a (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}) = 0,07e^{-j60^\circ} (127 - 93,6e^{-j94^\circ}) = \\ &= 0,07e^{-j60^\circ} (127 + 6,5 + j93,17) = 0,07e^{-j60^\circ} \cdot 162,7e^{j35^\circ} = 11,39e^{-j25^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

$$\text{Напряжение на фазе приемника } \dot{U}_a = 162,7e^{j35^\circ} \text{ В.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ток } \dot{I}_B &= \underline{Y}_b (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}) = 0,23e^{j78^\circ} (127e^{-j120^\circ} + 6,5 + j93,17) = \\ &= 0,23e^{j78^\circ} (-63,5 - j109,98 + 6,5 + j93,17) = 0,23e^{j78^\circ} (-57 - j16,81) = \\ &= 0,23e^{j78^\circ} \cdot 59,43e^{-j164^\circ} = 13,67e^{-j86^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Напряжение на фазе приемника

$$\dot{U}_b = 59,43e^{-j164^\circ} \text{ В.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ток } \dot{I}_C &= \underline{Y}_c (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}) = 0,076e^{j39^\circ} (-63,5 + j109,98 + 6,5 + j93,17) = \\ &= 0,076e^{j39^\circ} (-57 + j203,15) = 0,076e^{j39^\circ} \cdot 211e^{j106^\circ} = 16,04e^{j145^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Напряжение на фазе приемника

$$\dot{U}_c = 211e^{j106^\circ} \text{ В.}$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{nN} = \underline{Y}_{nN} \cdot \dot{U}_{nN} = 0,1 \cdot 93,6e^{-j94^\circ} = 9,36e^{-j94^\circ} \text{ А.}$$

Можно сделать проверку по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{nN} &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 11,39e^{-j25^\circ} + 13,67e^{-j86^\circ} + 16,04e^{j145^\circ} = \\ &= 10,32 - j4,81 + 0,95 - j13,64 - 13,14 + j9,2 = -1,86 - j9,25 = 9,43e^{-j96^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

3. Построение топографической диаграммы (рис. 3.27) начнем с векторов напряжений на фазах генератора.

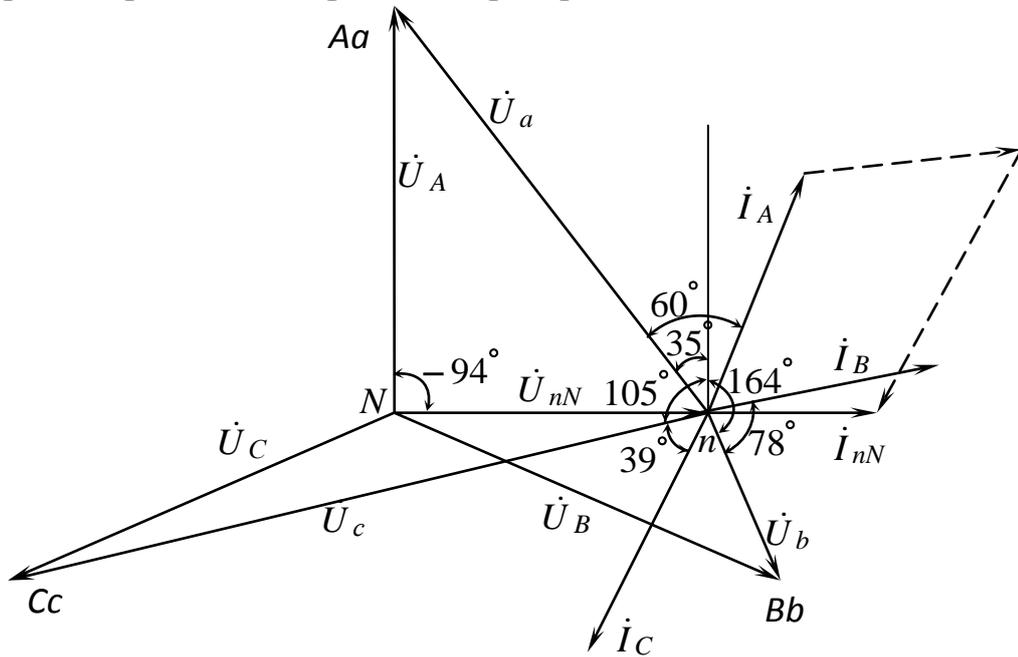


Рис. 3.27

Построив вектор напряжения  $\dot{U}_{nN} = 93,6e^{-j94^\circ}$  В, получим нейтральную точку приемника  $n$ . Сопротивлением линейных проводов пренебрегаем, поэтому точки  $A$  и  $a$ ,  $B$  и  $b$ ,  $C$  и  $c$  на комплексной плоскости совпадают.

Соединив точки, соответствующие началам и концам фаз приемников, получим топографическую диаграмму напряжений приемника. Она позволяет проверить правильность расчета напряжений  $\dot{U}_a, \dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ .

Векторы фазных токов строим из точки  $n$  в зависимости от нагрузки в фазах. В фазе  $a$  нагрузка активно-индуктивная, поэтому ток  $\dot{I}_A$  отстает от напряжения  $\dot{U}_a$  на угол  $\varphi_a = 60^\circ$ . Напомним, что угол  $\varphi_\phi$  является аргументом комплексного сопротивления фазы.

Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  опережают напряжения  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$  соответственно на углы  $\varphi_b = -78^\circ$  и  $\varphi_c = -39^\circ$ .

Ток  $\dot{I}_{nN}$  равен геометрической сумме токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$ .

Векторная диаграмма токов позволяет проверить правильность произведенных расчетов. Напомним, что углы  $\psi_u$  и  $\psi_i$  отсчитывают от положительного направления действительной оси.

Если приемник симметричный ( $Z_a = Z_b = Z_c = Z$ ), формула напряжения между двумя узлами может быть записана в виде

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{3\underline{Y} + \underline{Y}_{nN}} = \frac{\underline{Y}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3\underline{Y} + \underline{Y}_{nN}} = 0.$$

Напряжение между нейтральными точками генератора и приёмника не возникает.

Напряжения генератора и приёмника соответственно равны. Линейные и фазные токи равны по величине и сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол  $120^\circ$ .

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}; \dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{I}_A; \dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = a \dot{I}_A.$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{nN} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_A(1 + a^2 + a) = 0.$$

Топографические диаграммы генератора и приемника совпадают.

Перейдём к рассмотрению второй целевой задачи занятия.

Схема замещения цепи при соединении звездой четырёхпроводной с нейтральным проводом без сопротивления приведена на [рис. 3.28](#).

По известным значениям напряжения генератора и сопротивлений фаз приемника нужно вычислить фазные и линейные токи, а также ток в нейтральном проводе, соединяющем нейтральные точки генератора и приемника.

Из схемы видим, что при соединении фаз приемника звездой фазные и линейные токи соответственно равны между собой, например  $\dot{I}_A = \dot{I}_a$ .

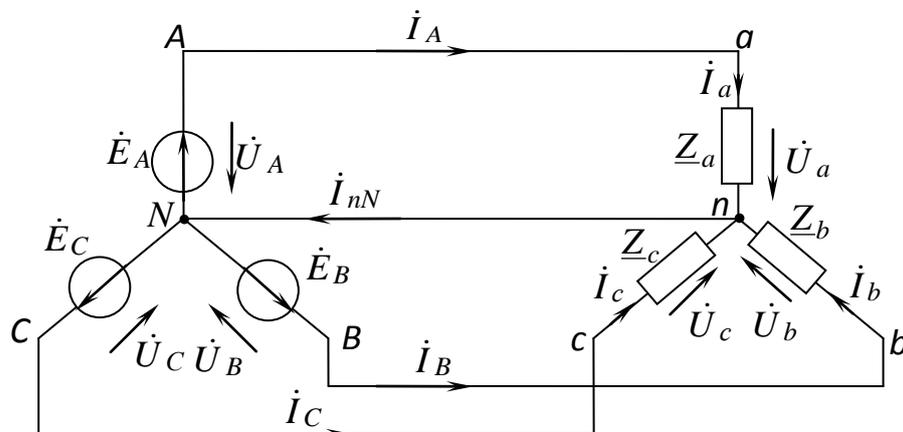


Рис. 3.28

Нейтральный провод с нулевым сопротивлением соединяет нейтральные точки генератора и приемника, следовательно, их потенциалы равны между собой:  $\dot{V}_N = \dot{V}_n$ . Если сопротивлением линии пренебрегают, то потенциалы начал фаз генератора и приёмника одинаковы:  $\dot{V}_A = \dot{V}_a$ ;  $\dot{V}_B = \dot{V}_b$ ;  $\dot{V}_C = \dot{V}_c$ .

Поэтому фазные напряжения генератора и приёмника соответственно равны:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a; \dot{U}_B = \dot{U}_b; \dot{U}_C = \dot{U}_c.$$

Линейные и фазные токи определяют по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}; \dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_b}; \dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_c}.$$

Ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c$  зависит не только от характера и величины сопротивлений фаз, но и от схемы их включения. При перемене местами нагрузок двух фаз ток нейтрального провода может измениться в несколько раз.

Топографические диаграммы напряжений генератора и приемника совпадают. Нейтральный провод обеспечивает симметрию фазных напряжений приемника при несимметричной нагрузке.

Векторы фазных токов ориентируют относительно векторов соответствующих фазных напряжений приемника в зависимости от нагрузки фаз.

При наличии результатов расчёта токов соответствующие им векторы можно построить под углами  $\psi_i$  к положительному направлению действительной оси. Углы  $\psi_i$  – аргументы комплексных значений токов.

Вектор тока в нейтральном проводе  $\dot{I}_{nN}$  получают как геометрическую сумму векторов фазных токов.

### Задача 2

Несимметричный трехфазный приемник включен в четырехпроводную сеть с фазным напряжением генератора 100 В ([рис. 3.29](#)).

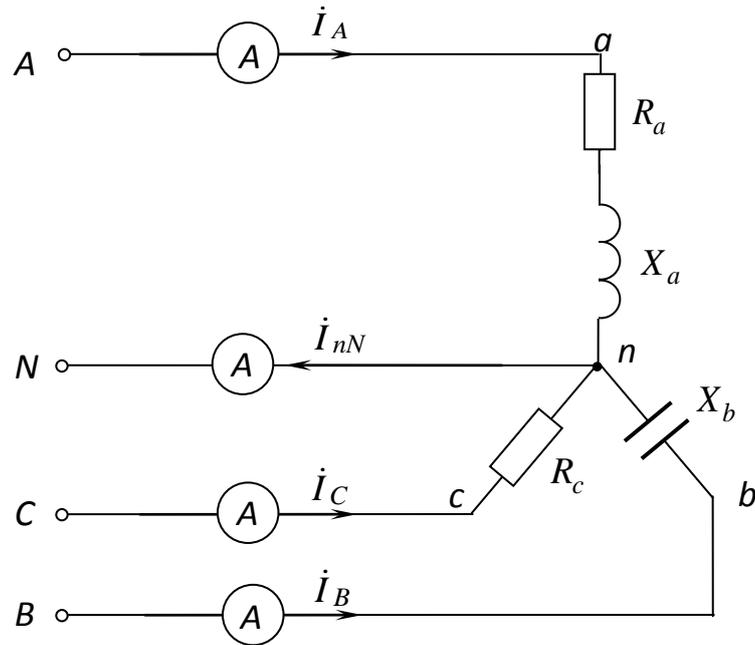


Рис. 3.29

Определить показания амперметров в линейных и нейтральном проводах, если  $R_a = 6$  Ом,  $X_a = 8$  Ом,  $X_b = 20$  Ом,  $R_c = 10$  Ом. Построить векторно-топографическую диаграмму.

Фазные напряжения генератора и приемника соответственно одинаковы:  $\dot{U}_a = \dot{U}_A = 100$  В;  $\dot{U}_b = \dot{U}_B = 100e^{-j120^\circ}$  В;  $\dot{U}_c = \dot{U}_C = 100e^{j120^\circ}$  В.

По закону Ома вычислим комплексные значения линейных токов:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a} = \frac{100}{6 + j8} = \frac{100}{10e^{j53^\circ}} = 10e^{-j53^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{100e^{-j120^\circ}}{-j20} = \frac{100e^{-j120^\circ}}{20e^{-j90^\circ}} = 5e^{-j30^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{100e^{j120^\circ}}{10} = 10e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ток в нейтральном проводе } \dot{i}_{nN} &= \dot{i}_A + \dot{i}_B + \dot{i}_C = 10e^{-j53^\circ} + \\ &+ 5e^{-j30^\circ} + 10e^{j120^\circ} = 6 - j8 + 4,3 - j2,5 - 5 + j8,7 = 5,3 - j1,8 = \\ &= 5,65e^{-j18^\circ 45'} \text{ А}. \end{aligned}$$

*Амперметры показывают действующие значения токов, т. е.*

$$I_A = 10 \text{ А}; I_B = 5 \text{ А}; I_C = 10 \text{ А}; I_{nN} = 5,65 \text{ А}.$$

Топографические диаграммы генератора и приемника совпадают (рис. 3.30).

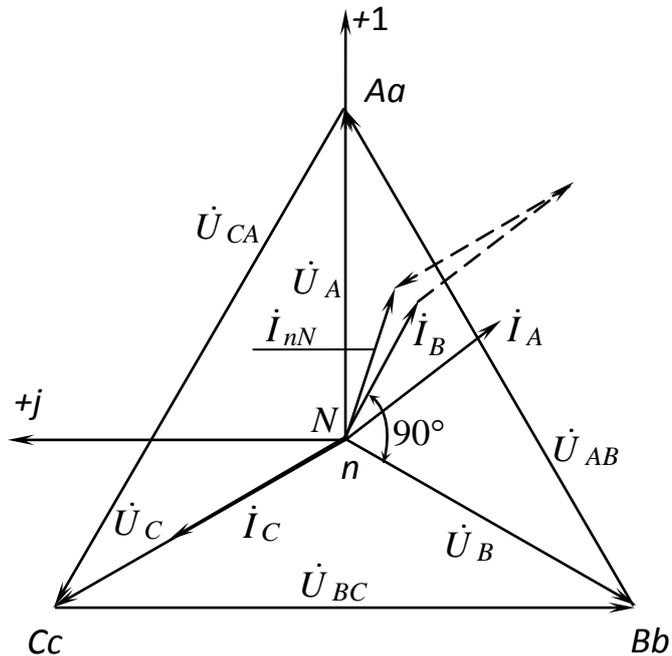


Рис. 3.30

Нагрузка фазы  $a$  имеет активно-индуктивный характер, поэтому вектор тока  $\dot{I}_A$  отстает от вектора напряжения  $\dot{U}_A$  на угол  $\varphi_a = 53^\circ$ , определяемый соотношением сопротивлений фазы ( $\varphi_a = \arctg \frac{X_a}{R_a}$ ), т. е. являющийся аргументом комплексного сопротивления  $\underline{Z}_a$ . Вектор тока  $\dot{I}_B$  опережает вектор напряжения  $\dot{U}_B$  на угол  $\varphi_b = 90^\circ$ . Вектор тока  $\dot{I}_C$  совпадает с вектором  $\dot{U}_C$  по направлению. Вектор тока в нейтральном проводе можно построить как геометрическую сумму линейных токов.

Векторы токов можно построить по-другому, откладывая их от положительного направления действительной оси под углами  $\psi_i$  ( $\psi_a = -53^\circ$ ;  $\psi_b = -30^\circ$ ;  $\psi_c = 120^\circ$ ;  $\psi_{nN} = -18^\circ 45'$ ).

Если приемник симметричный, токи в фазах и линиях равны между собой по величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $120^\circ$ . Достаточно вычислить только один ток:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}.$$

Тогда  $\dot{I}_B = \dot{I}_b = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{I}_A$ ;  $\dot{I}_C = \dot{I}_c = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = a \dot{I}_A$ .

Ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$ .

### Задача 3

Определить мощность, потребляемую симметричным приемником, схема замещения которого изображена на [рис. 3.31](#), если  $U_{\text{л}} = 380$  В,  $R = 59$  Ом,  $X = 27$  Ом.

Построить векторно-топографическую диаграмму.

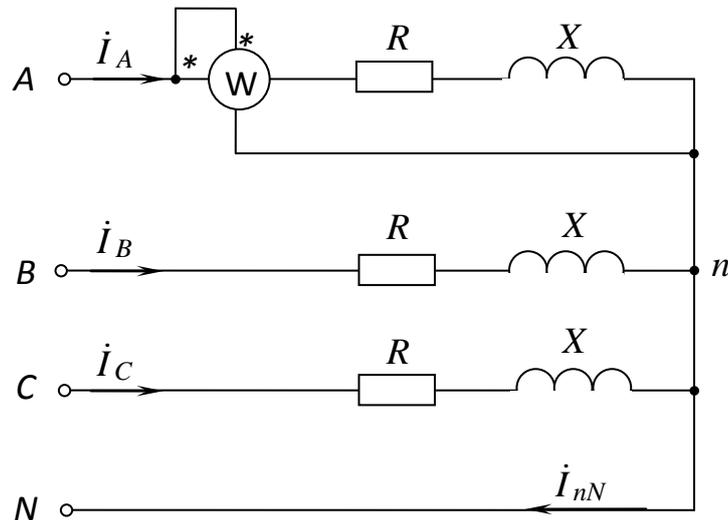


Рис. 3.31

### Решение

В симметричном приемнике достаточно измерить или вычислить мощность одной фазы, а затем ее значение утроить.

Для определения показаний ваттметра ([рис. 3.31](#)) воспользуемся формулой комплексной мощности:

$$P_W = \operatorname{Re} \left( \dot{U}_A I_A^* \right).$$

Фазное напряжение  $U_A = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220$  В. Будем считать его действительным числом.

Напряжение  $\dot{U}_{nN} = 0$ . Напряжения генератора и приемника соответственно совпадают.

$$\text{Ток } \dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a} = \frac{220}{59 + j27} = \frac{220}{65 e^{j25^\circ}} = 3,38 e^{-j25^\circ} \text{ А.}$$

$$\text{Тогда } P_W = \operatorname{Re} \left( 220 \cdot 3,38 e^{j25^\circ} \right) = 674 \text{ Вт.}$$

Мощность, потребляемая схемой,

$$P = 3P_W = 3 \cdot 674 = 2022 \text{ Вт.}$$

*Проверим правильность решения по формуле*

$$P = 3RI_{\phi}^2 = 3 \cdot 59 \cdot 3,38^2 = 2022 \text{ Вт.}$$

Векторно-топографическая диаграмма представлена на [рис. 3.32](#).

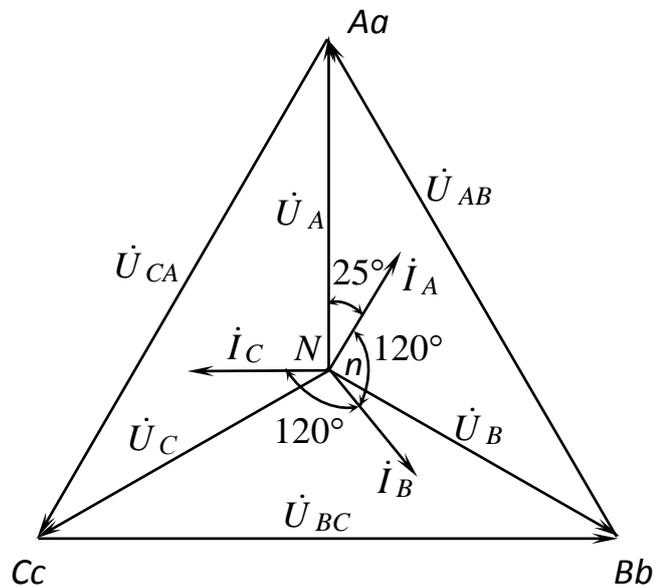


Рис. 3.32

#### Задача 4

Определить, при каком сопротивлении резистора  $R$  ([рис. 3.33](#)) ток в нейтральном проводе будет равен нулю, если  $X_L = X_C = X$

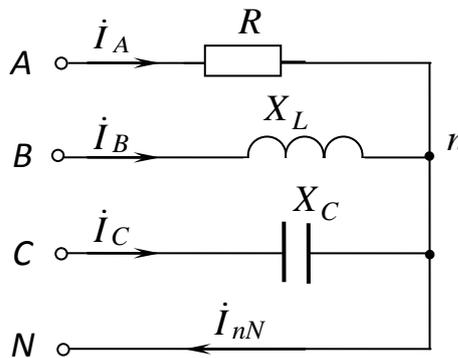


Рис. 3.33

*Решение*

Благодаря наличию нейтрального провода сохраняется симметрия фазных напряжений приемника.

Токи  $I_B$  и  $I_C$  равны по модулю.

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{nN} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Следовательно,  $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C)$ .

Для решения задачи необходимо построить векторно-топографическую диаграмму ([рис. 3.34](#)).

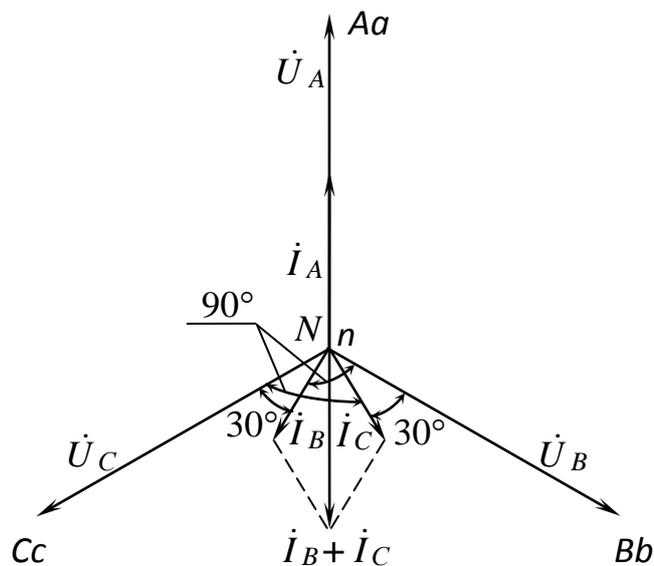


Рис. 3.34

Топографические диаграммы генератора и приёмника совпадают.

Вектор тока  $\dot{I}_A$  совпадает с вектором напряжения  $\dot{U}_A$ , так как нагрузка в этой фазе чисто активная. Вектор тока  $\dot{I}_B$  отстаёт от напряжения  $\dot{U}_B$  на  $90^\circ$ , так как в этой фазе нагрузка чисто индуктивная. Вектор тока  $\dot{I}_C$  опережает напряжение  $\dot{U}_C$  на  $90^\circ$  из-за емкостного характера нагрузки в этой фазе.

Как видно из диаграммы, треугольник  $nkp$  является равнобедренным. Он отдельно изображён на [рис. 3.35](#).

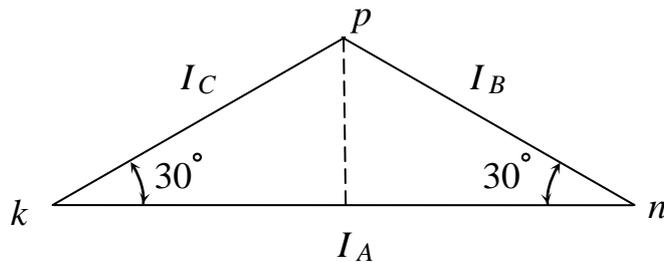


Рис. 3.35

Из решения треугольника  $nkp$  ток  $I_A = 2 \cdot I_B \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot I_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} I_B$ .

Ток  $I_B = \frac{U_\phi}{X}$ , тогда ток  $I_A = \frac{\sqrt{3} U_\phi}{X}$ .

Отсюда  $U_\phi = \frac{X}{\sqrt{3}} \cdot I_A$ .

Напряжения на фазах приемника равны друг другу по модулю:

$$U_\phi = RI_A = \frac{X}{\sqrt{3}} I_A.$$

Следовательно, ток в нейтральном проводе равен нулю при  $R = \frac{X}{\sqrt{3}}$ .

### Задача 5

Найти показания вольтметра в схеме [рис. 3.36](#), если  $U_\phi = 220$  В,  $R = X_L = X_C$ .

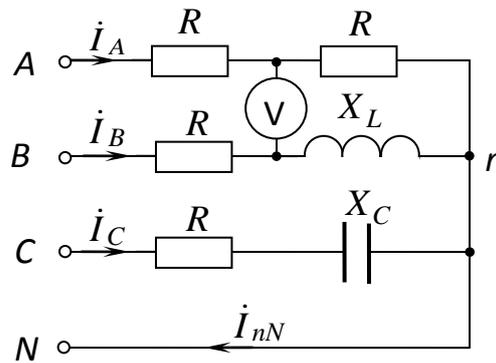


Рис. 3.36

*Решение*

Напряжение на зажимах вольтметра

$$\dot{U}_V = -j X_L \dot{I}_B + R \dot{I}_A.$$

Напряжения на фазах приёмника совпадают с напряжениями на фазах генератора, так как в схеме есть нейтральный провод без сопротивления.

$$\text{Ток } \dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{\dot{U}_A}{2R} = \frac{220}{2R} = \frac{110}{R} \text{ А.}$$

$$\text{Ток } \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\dot{U}_B}{R + jX_L} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{R\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{156}{R}e^{-j165^\circ} \text{ А.}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \dot{U}_V &= -jR \frac{156}{R} e^{-j165^\circ} + R \frac{110}{R} = e^{-j90^\circ} \cdot 156e^{-j165^\circ} + 110 = \\ &= 156e^{j105^\circ} + 110 = -40 + j150 + 110 = 70 + j150 = 166e^{j65^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Вольтметр покажет напряжение  $U_V = 166 \text{ В}$ .

Следующие задачи решите самостоятельно.

**Задача 6**

Вычислить сопротивления и ток в нейтральном проводе в схеме [рис. 3.37](#), если нагрузка равномерная,  $U_{л} = 380 \text{ В}$ ,  $I_{\phi} = 2 \text{ А}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

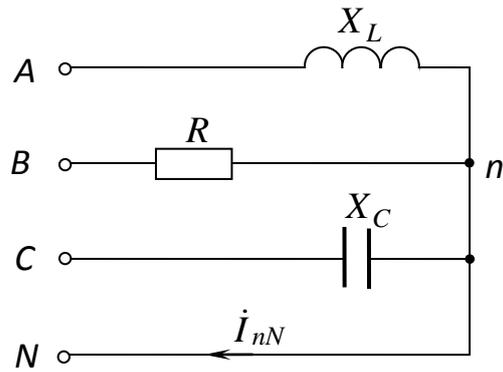


Рис. 3.37

Ответ:  $R = X_L = X_C = 110 \text{ Ом}$ ,  $I_{nN} = 5,46 \text{ А}$ .

### Задача 7

Вычислить показания ваттметров в схеме [рис. 3.38](#), если  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ,  $R_a = 0,8 \text{ Ом}$ ,  $R_b = 1,4 \text{ Ом}$ ,  $R_c = 2,2 \text{ Ом}$ ,  $X_a = 1,8 \text{ Ом}$ ,  $X_b = 1,6 \text{ Ом}$ ,  $X_c = 2,8 \text{ Ом}$ .

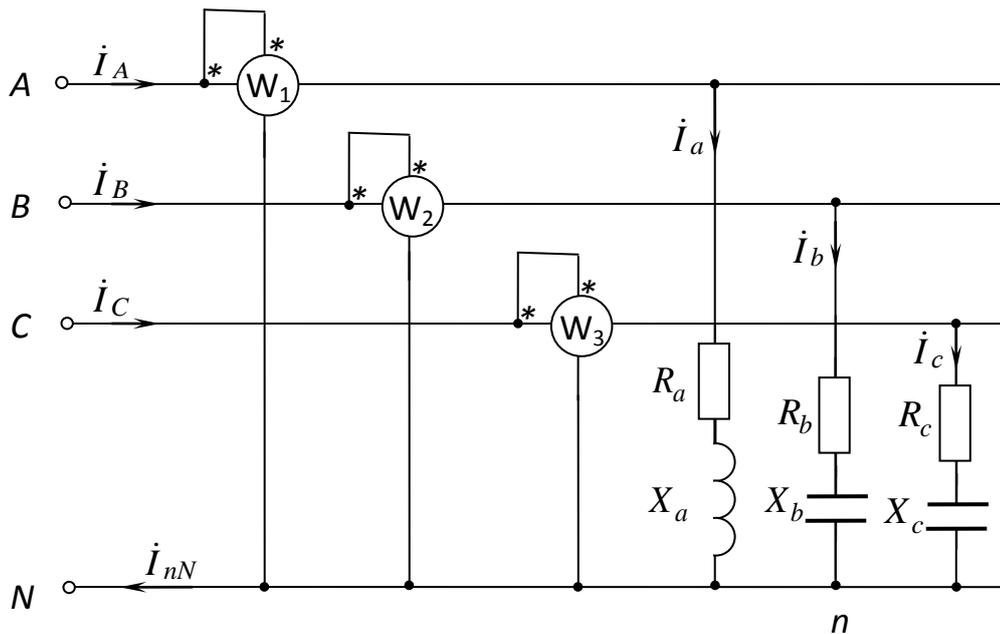


Рис. 3.38

Ответ:  $P_{W_1} = 10 \text{ кВт}$ ,  $P_{W_2} = 15 \text{ кВт}$ ,  $P_{W_3} = 8 \text{ кВт}$ .

Задачи 8 и 9 решите для самоконтроля.

### Задача 8

Найти показания вольтметра в схеме [рис. 3.39](#), если  $U_{\phi} = 220$  В,  $R = X_L = X_C$ .

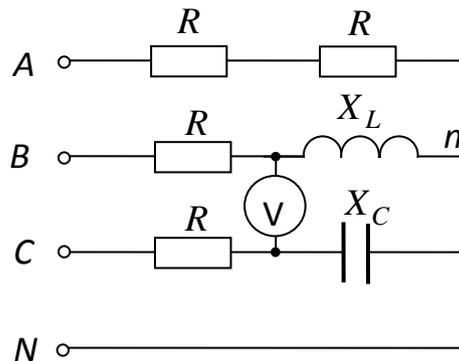


Рис. 3.39

Ответ:  $U_V = 300$  В.

### Задача 9

Вычислить входные токи и показания ваттметров в схеме [рис. 3.40](#), если  $U_{\Delta} = 380$  В,  $R_a = 0,605$  Ом,  $R_b = 2,065$  Ом,  $R_c = 1,960$  Ом,  $R = 2,178$  Ом,  $X_a = 1,047$  Ом,  $X_b = 1,548$  Ом,  $X_c = 0,949$  Ом,  $X = 6,926$  Ом.

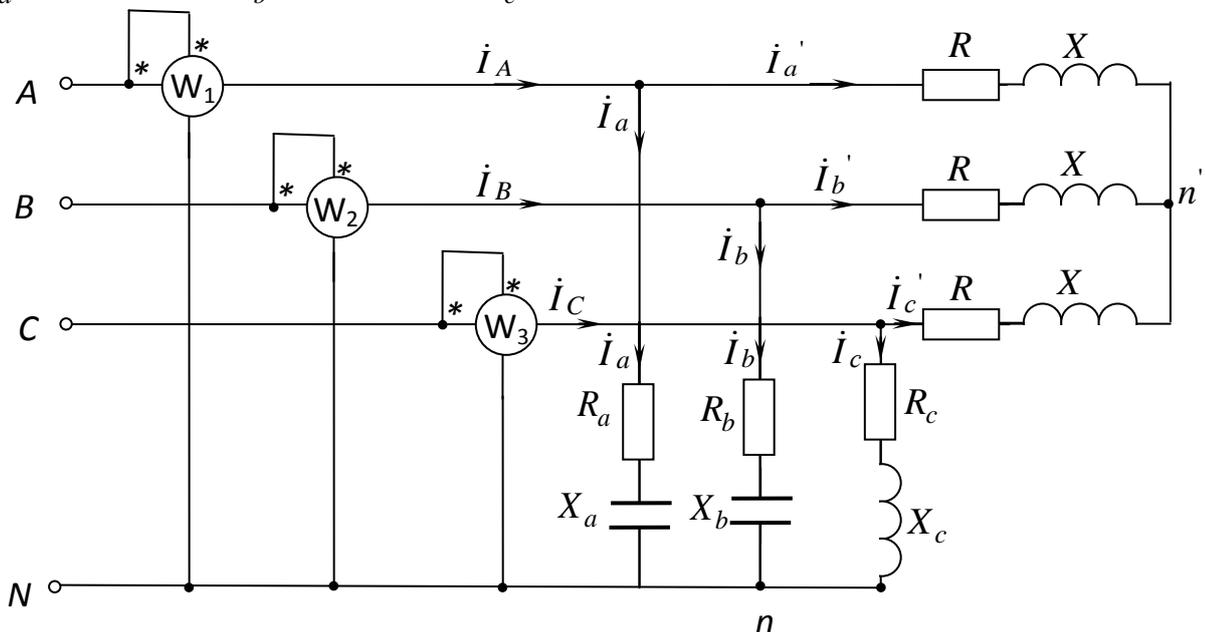


Рис. 3.40

Построить векторно-топографическую диаграмму.

Ответ:  $I_A = 162,8$  А,  $I_B = 80,41$  А,  $I_C = 123,7$  А,  $I_{nN} = 197,2$  А,  
 $P_{W_1} = 22$  кВт,  $P_{W_2} = 17$  кВт,  $P_{W_3} = 22$  кВт.

**Занятие 3**

**Расчет трехфазной цепи при соединении звездой трехпроводной**

*Цели занятия:*

1. Научиться вычислять токи и напряжения.
2. Научиться строить векторно-топографические диаграммы.
3. Научиться определять показания ваттметров, вычислять потребляемую мощность.

Схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 3.41](#).

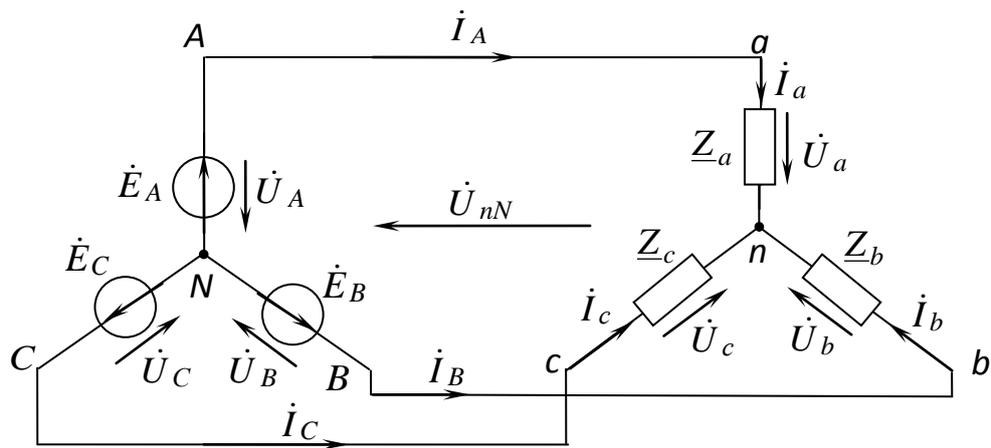


Рис. 3.41

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, поэтому для их расчета пригодны все методы, применяемые в однофазных цепях. Анализируемую схему можно рассматривать как схему с двумя узлами ( $N$  и  $n$ ) и рассчитать токи в ней методом напряжения между двумя узлами.

Напряжение между нейтральными точками генератора и приемника можно вычислить по формуле

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

где  $\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a}$ ,  $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b}$ ,  $\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c}$  – комплексные проводимости фаз приемника.

Линейные и равные им соответственно фазные токи можно определить по закону Ома для активной ветви:

$$I_A = i_a = \underline{Y}_a (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN});$$

$$I_B = i_b = \underline{Y}_b (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN});$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}).$$

Выражения в скобках являются разностью потенциалов между началами ( $a, b, c$ ) и концами ( $n$ ) фаз приемников, т. е. фазными напряжениями приемника. Например,  $\dot{U}_a = -\dot{U}_{nN} + \dot{U}_A$ .

Поэтому уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a \dot{U}_a;$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b \dot{U}_b;$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c \dot{U}_c.$$

На основании первого закона Кирхгофа геометрическая сумма токов  $\dot{I}_a, \dot{I}_b$  и  $\dot{I}_c$  будет равна нулю.

Уравнение  $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$  дает возможность проверить правильность решения.

Топографическую диаграмму строят в два этапа:

1. Построение топографической диаграммы напряжений генератора.
2. Построение топографической диаграммы напряжений приемника.

Напряжение – разность потенциалов между двумя точками. Если известна картина распределения потенциалов различных точек схемы на комплексной плоскости, то, соединив две соответствующие точки, можно получить вектор нужного напряжения. Если сопротивлением линии пренебрегают, то на схеме замещения начала фаз генератора и приемника коротко соединяют между собой, тогда потенциалы их будут одинаковы. Точки  $A$  и  $a$ ,  $B$  и  $b$ ,  $C$  и  $c$  на комплексной плоскости совпадают. Между нейтральными точками генератора  $N$  и приемника  $n$  возникает напряжение  $\dot{U}_{nN}$ . Точка  $n$  на комплексной плоскости смещена относительно точки  $N$ , поэтому напряжение  $\dot{U}_{nN}$  называют напряжением смещения нейтрали. Точку  $n$  получают, построив вектор  $\dot{U}_{nN}$ . Соединив точки, соответствующие началам и концам фаз приемника, получают векторы фазных напряжений приемника  $\dot{U}_a, \dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ . Система фазных напряжений приемника несимметрична.

Векторная диаграмма токов зависит от нагрузки.

Если приемник симметричный

$$(\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}, \underline{Y}_a = \underline{Y}_b = \underline{Y}_c = \underline{Y}),$$

формула напряжения между двумя узлами может быть записана в виде

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3\underline{Y}} = 0.$$

Напряжение между нейтральными точками генератора и приемника не возникает.

Напряжения генератора и приемника соответственно равны. Линейные и фазные токи равны по величине и сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол  $120^\circ$ :

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_a e^{-j120^\circ}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_a e^{j120^\circ}.$$

Векторно-топографическая диаграмма имеет вид, аналогичный диаграмме на [рис. 3.32](#).

Итак, напряжение между нейтральными точками не возникает при симметричной нагрузке, а также при наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением.

### Задача 1

К трехпроводной линии с линейным напряжением  $U_{\text{л}} = 346$  В подключен симметричный трехфазный приемник, соединенный звездой. Вычислить показания амперметра в одном из линейных проводов, если  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = (6 + j8)$  Ом. Построить векторно-топографическую диаграмму.

### Решение

При симметричном приемнике напряжения на фазах приемника и генератора одинаковы. Фазное напряжение вычислим по формуле

$$U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{346}{\sqrt{3}} = 200 \text{ В.}$$

Амперметр показывает действующее значение тока, которое можно найти по закону Ома:

$$I_{\text{л}} = I_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{Z_{\phi}} = \frac{U_{\phi}}{\sqrt{R_{\phi}^2 + X_{\phi}^2}} = \frac{200}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{200}{10} = 20 \text{ А.}$$

Векторно-топографическая диаграмма построена на [рис. 3.42](#).

Векторы токов равны по величине и отстают от векторов соответствующих фазных напряжений на угол  $\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{8}{6} = 53^\circ 10'$ .

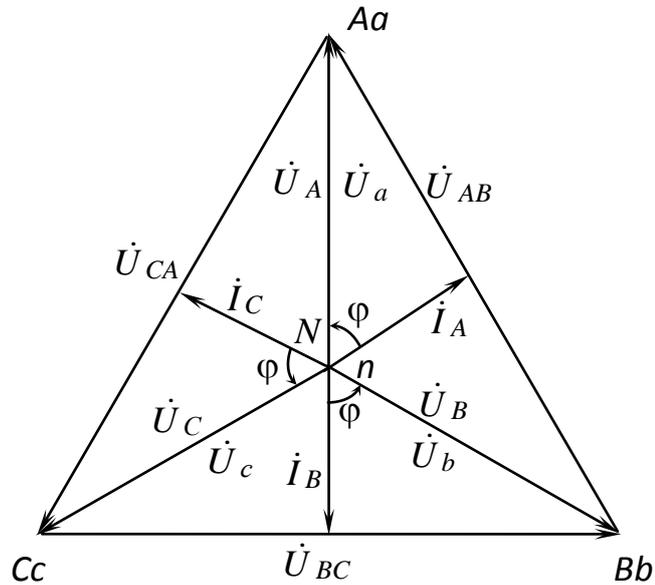


Рис. 3.42

### Задача 2

Найти показания ваттметров в схеме [рис. 3.43](#), если  $U_{\text{л}} = 220$  В, а в номинальном режиме при напряжении  $U_{\text{н}} = 200$  В лампочка потребляет мощность  $P_{\text{лн}} = 50$  Вт.

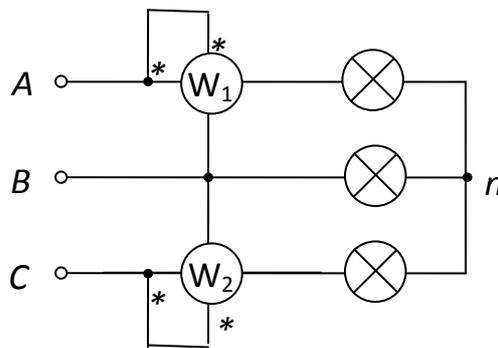


Рис. 3.43

### Решение

1. Вычислим сопротивление лампочки из номинального режима:

$$P_{\text{лн}} = U_{\text{н}} \cdot I_{\text{н}} = U_{\text{н}} \cdot \frac{U_{\text{н}}}{R} = \frac{U_{\text{н}}^2}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{U_{\text{н}}^2}{P_{\text{лн}}} = \frac{200^2}{50} = 800 \text{ Ом.}$$

2. Вычислим напряжение на лампочке. Так как приемник симметричный, фазное напряжение

$$U_{\text{фп}} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В.}$$

3. Вычислим нужные для определения показаний ваттметров токи по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{R} = \frac{127}{800} = 0,159 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 0,159 \cdot e^{j120^\circ} \text{ А.}$$

4. Вычислим показания ваттметров. Если  $\dot{U}_A = 127 \text{ В}$ , то  $\dot{U}_{AB} = 220e^{j30^\circ} \text{ В}$ ,  $\dot{U}_{CB} = 220e^{j90^\circ} \text{ В}$ .

$$\text{Тогда } P_{W_1} = U_{AB} \cdot I_A \cdot \cos(\dot{U}_{AB} \wedge \dot{I}_A) = 220 \cdot 0,159 \cdot \cos 30^\circ = 30,25 \text{ Вт;}$$

$$P_{W_2} = U_{BC} \cdot I_C \cdot \cos(\dot{U}_{CB} \wedge \dot{I}_C) = 220 \cdot 0,159 \cdot \cos 30^\circ = 30,25 \text{ Вт.}$$

$$\text{Проверка: } P_{W_1} + P_{W_2} = 3RI^2;$$

$$30,25 + 30,25 = 3 \cdot 800 \cdot 0,159^2;$$

$$60,5 \text{ Вт} \approx 60,67 \text{ Вт.}$$

### Задача 3

Вычислить комплексные значения всех токов в схеме [рис. 3.44](#), если  $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$ ,  $X_C = 10 \text{ Ом}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 60 \text{ Ом}$ .

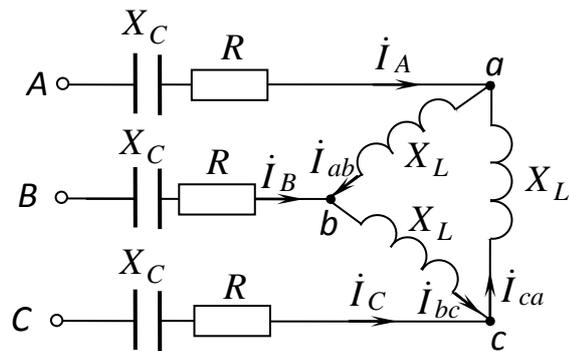


Рис. 3.44

*Решение*

1. Заменяем треугольник сопротивлений на эквивалентную звезду. Приемник симметричный, поэтому

$$X_{LY} = \frac{X_{L\Delta}}{3} = \frac{60}{3} = 20 \text{ Ом.}$$

Схема примет вид, представленный на [рис. 3.45](#).

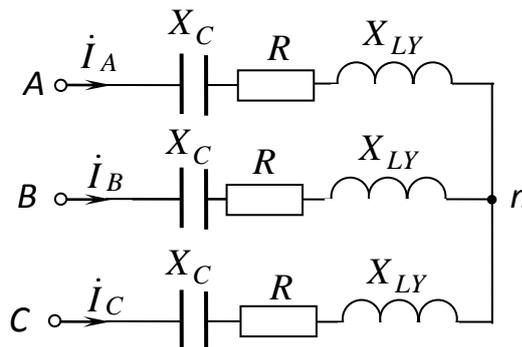


Рис. 3.45

2. Напряжение смещения нейтрали не возникает, поэтому напряжения на фазах приемника равны напряжениям на фазах генератора:

$$U_{\phi} = \frac{U_{л}}{\sqrt{3}} = 57,8 \text{ В.}$$

3. Вычислим линейные токи по закону Ома:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_{\phi}} = \frac{\dot{U}_A}{R + j(X_{LY} - X_C)} = \frac{57,8}{10 + j10} = \frac{57,8}{14,14e^{j45^{\circ}}} = 4,1e^{-j45^{\circ}} \text{ А;}$$

$$\dot{i}_B = \dot{i}_A e^{-j120^{\circ}} = 4,1e^{-j165^{\circ}} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 4,1 e^{j75^\circ} \text{ А.}$$

4. Вычислим токи  $\dot{I}_{ab}$ ,  $\dot{I}_{bc}$  и  $\dot{I}_{ca}$ . У симметричного приемника

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = \frac{4,1}{\sqrt{3}} e^{-j45^\circ} \cdot e^{j30^\circ} = 2,37 e^{-j15^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} e^{-j120^\circ} = 2,37 e^{-j135^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j120^\circ} = 2,37 e^{j105^\circ} \text{ А.}$$

Проверка решения:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = 2,29 - j0,61 + 0,61 - j2,29 = 2,89 - j2,89 = 4,1 e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

#### Задача 4

Вычислить комплексные значения всех токов в схеме [рис. 3.46](#), если  $U_{\text{л}} = 173 \text{ В}$ ,  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 2 \text{ Ом}$ .

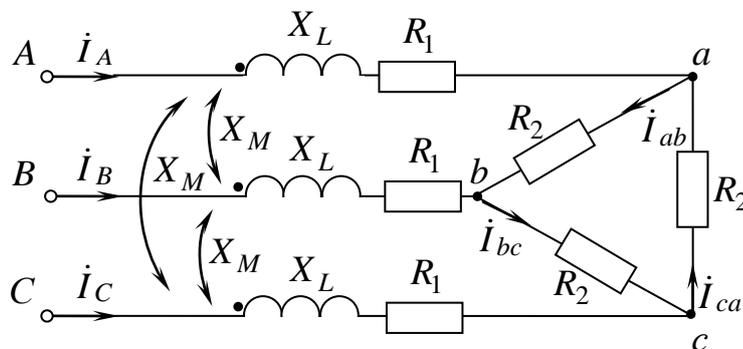


Рис. 3.46

#### Решение

1. Заменяв треугольник сопротивлений эквивалентной звездой и применив правило магнитной развязки для каждой пары индуктивно связанных элементов, получим схему, представленную на [рис. 3.47](#).

2. Приемник симметричный, поэтому

$$U_{\text{фп}} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{173}{\sqrt{3}} = 100 \text{ В.}$$

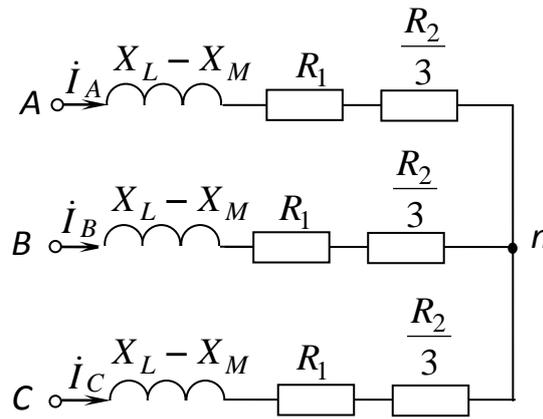


Рис. 3.47

3. Вычислим линейные токи по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_\Phi} = \frac{\dot{U}_A}{R_1 + \frac{R_2}{3} + j(X_L - X_M)} = \frac{100}{6 + j8} = \frac{100}{10e^{j53^\circ}} = 10e^{-j53^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = 10e^{-j173^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 10e^{j67^\circ} \text{ А}.$$

4. Вычислим токи  $\dot{I}_{ab}$ ,  $\dot{I}_{bc}$  и  $\dot{I}_{ca}$ :

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 5,78e^{-j23^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} e^{-j120^\circ} = 5,78e^{-j143^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j120^\circ} = 5,78e^{j97^\circ} \text{ А}.$$

### Задача 5

Вычислить все токи и показания ваттметров в схеме [рис. 3.48](#), если  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ,  $X_a = X_b = X_c = X_{a'b'} = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_{b'c'} = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_{c'a'} = 2 \text{ Ом}$ .

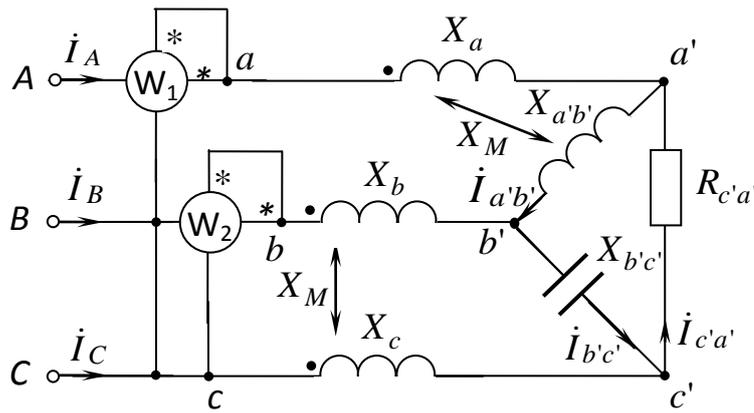


Рис. 3.48

### Решение

1. Сделаем магнитную развязку, воспользовавшись уравнениями на основании законов Кирхгофа. Напряжение

$$\dot{U}_{AB} = -jX_b \dot{I}_B - jX_M \dot{I}_C + jX_{a'b'} \dot{I}_{a'b'} + jX_M \dot{I}_A + jX_a \dot{I}_A + jX_M \dot{I}_{a'b'}.$$

В этой схеме  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ . Отсюда  $\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \dot{U}_{AB} = & -jX_b \dot{I}_B + jX_M \dot{I}_A + jX_M \dot{I}_B + jX_{a'b'} \dot{I}_{a'b'} + jX_M \dot{I}_A + \\ & + jX_a \dot{I}_A + jX_M \dot{I}_{a'b'} = j(X_a + 2X_M) \dot{I}_A + j(X_{a'b'} + X_M) \dot{I}_{a'b'} - \\ & - j(X_b - X_M) \dot{I}_B. \end{aligned}$$

Аналогично получим выражения напряжений  $\dot{U}_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}$ :

$$\dot{U}_{BC} = j(X_b - X_M) \dot{I}_B - jX_{b'c'} \dot{I}_{b'c'} - j(X_c - X_M) \dot{I}_C;$$

$$\dot{U}_{CA} = -j(X_a + 2X_M) \dot{I}_A + (R_{c'a'} - jX_M) \dot{I}_{c'a'} + j(X_c - X_M) \dot{I}_C.$$

Этим уравнениям соответствует эквивалентная схема без магнитных связей, представленная на [рис. 3.49](#). Вершины треугольника имеют иные потенциалы, чем в исходной схеме, поэтому они обозначены буквами с двумя штрихами.

2. Преобразуем треугольник сопротивлений в эквивалентную звезду. Схема, полученная после преобразования, представлена на [рис. 3.50](#).

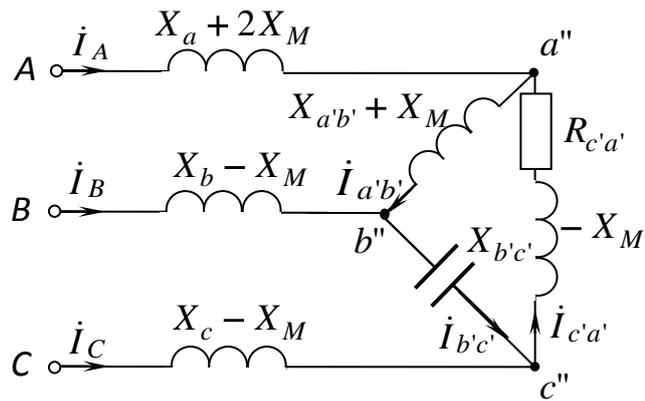


Рис. 3.49

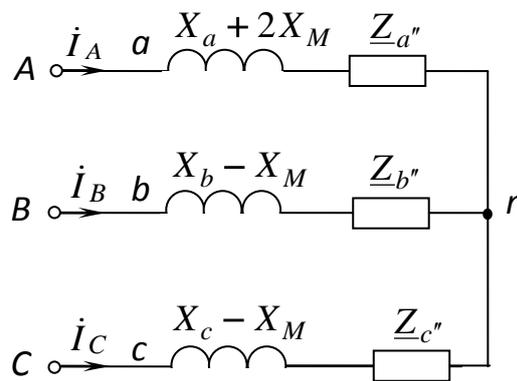


Рис. 3.50

Вычислим сопротивления  $\underline{Z}_{a''}$ ,  $\underline{Z}_{b''}$ ,  $\underline{Z}_{c''}$  по известным формулам:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{a''} &= \frac{\underline{Z}_{a''b''} \cdot \underline{Z}_{c''a''}}{\underline{Z}_{a''b''} + \underline{Z}_{b''c''} + \underline{Z}_{c''a''}} = \\ &= \frac{j(X_{a'b'} + X_M) \cdot (R_{c'a'} - jX_M)}{j(X_{a'b'} + X_M) - jX_{b'c'} + (R_{c'a'} - jX_M)} = j5 \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{b''} &= \frac{\underline{Z}_{b''c''} \cdot \underline{Z}_{a''b''}}{\underline{Z}_{a''b''} + \underline{Z}_{b''c''} + \underline{Z}_{c''a''}} = \\ &= \frac{j(X_{a'b'} + X_M) \cdot (-jX_{b'c'})}{j(X_{a'b'} + X_M) - jX_{b'c'} + (R_{c'a'} - jX_M)} = (6,25 + j6,25) \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{c''} &= \frac{\underline{Z}_{c''a''} \cdot \underline{Z}_{b''c''}}{\underline{Z}_{a''b''} + \underline{Z}_{b''c''} + \underline{Z}_{c''a''}} = \\ &= \frac{(R_{c'a'} - jX_M) \cdot (-jX_{b'c'})}{j(X_{a'b'} + X_M) - jX_{b'c'} + (R_{c'a'} - jX_M)} = -j5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

3. Приемник несимметричный, поэтому возникает напряжение смещения нейтрали, которое вычислим по формуле

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

где  $\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{j(X_a + 2X_M) + \underline{Z}_a''} = -j0,0833 \text{ См},$

$$\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{j(X_b - X_M) + \underline{Z}_b''} = (0,0682 - j0,0792) \text{ См},$$

$$\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{j(X_c - X_M) + \underline{Z}_c''} = j0,25 \text{ См}.$$

Будем считать напряжение  $\dot{U}_{AB}$  действительным числом. Тогда

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 127 e^{-j30^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_B = 127 e^{-j150^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_C = 127 e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

Подставив значения напряжений и проводимостей в формулу напряжения  $\dot{U}_{nN}$  и произведя вычисления, получим:

$$\dot{U}_{nN} = 450 e^{j133,5^\circ} \text{ В}.$$

4. Вычислим линейные токи:

$$\dot{I}_A = \underline{Y}_a (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}) = \underline{Y}_a \dot{U}_a = 47,7 e^{-j132,8^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \underline{Y}_b (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}) = \underline{Y}_b \dot{U}_b = 45,5 e^{-j112,2^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \underline{Y}_c (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}) = \underline{Y}_c \dot{U}_c = 92,3 e^{j57,3^\circ} \text{ А}.$$

Проверка решения:  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0;$

$$-32,4 - j35,8 - 17,2 - j42 + 49,8 + j77,7 = 0,2 - j0,1 \approx 0.$$

Напряжения на фазах приемника  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$  можно было найти и из формул, выведенных из уравнений, составленных по законам Кирхгофа:

$$\dot{U}_a = \frac{\underline{Y}_b \dot{U}_{AB} - \underline{Y}_c \dot{U}_{CA}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c};$$

$$\dot{U}_b = \frac{\underline{Y}_c \dot{U}_{BC} - \underline{Y}_a \dot{U}_{AB}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c};$$

$$\dot{U}_c = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_{CA} - \underline{Y}_b \dot{U}_{BC}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

5. Вычислим токи в ветвях треугольника:

$$\dot{I}_{a'b'} = \frac{\dot{U}_{a''b''}}{j(X_{a'b'} + X_M)} = \frac{-\underline{Z}_b \dot{I}_B + \underline{Z}_a \dot{I}_A}{j(X_{a'b'} + X_M)} = 41,8 e^{-j5,2^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{b'c'} = \frac{\dot{U}_{b''c''}}{-j X_{b'c'}} = \frac{-\underline{Z}_c \dot{I}_C + \underline{Z}_b \dot{I}_B}{-j X_{b'c'}} = 52,2 e^{-j62,3^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{c'a'} = \frac{\dot{U}_{c'a'}}{R_{c'a'} - j X_M} = \frac{-\underline{Z}_a \dot{I}_A + \underline{Z}_c \dot{I}_c}{R_{c'a'} - j X_M} = 81 e^{j22,5^\circ} \text{ А}.$$

6. Найдем показания ваттметров:

$$\begin{aligned} P_{W_1} &= \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{AC} \left( -I_A^* \right) \right] = \operatorname{Re} \left[ \left( -\dot{U}_{CA} \right) \left( -I_A^* \right) \right] = \operatorname{Re} \left( \dot{U}_{CA} I_A^* \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( 220 e^{j120^\circ} \cdot 47,7 e^{j132,8^\circ} \right) = -3120 \text{ Вт}; \end{aligned}$$

$$P_{W_2} = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{BC} \cdot \left( -I_B^* \right) \right] = \operatorname{Re} \left[ -220 e^{-j120^\circ} \cdot 47,7 e^{j132,8^\circ} \right] = -3120 \text{ Вт}.$$

Знаки минус объясняются тем, что верхние зажимы обмоток напряжения ваттметров подключены со стороны приемника, а не генератора.

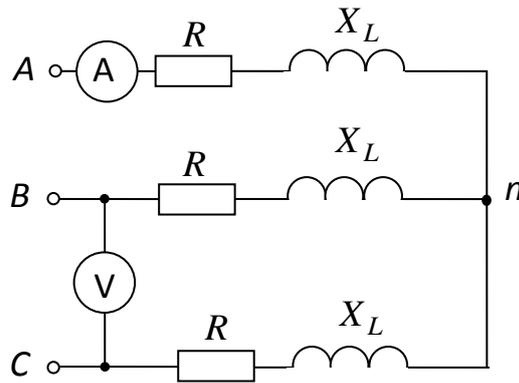


Рис. 3.51

*Проверка решения:*

$$P_{W_1} + P_{W_2} = R_{c'a'} \cdot I_{c'a'}^2;$$

$$13120 \text{ Вт} \approx 13122 \text{ Вт.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 6

Найти показание вольтметра в схеме [рис. 3.51](#), если  $R = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 4 \text{ Ом}$ , а амперметр показывает ток  $I_A = 1,73 \text{ А}$ .

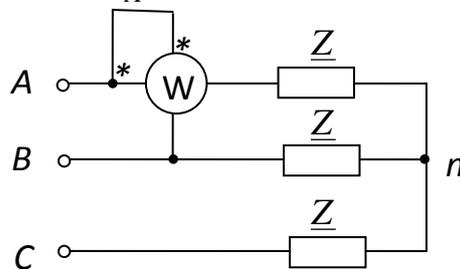


Рис. 3.52

Ответ:  $U_V = 12 \text{ В}$ .

### Задача 7

Вычислить показание ваттметра в схеме [рис. 3.52](#), если  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ,  $\underline{Z} = -j220 \text{ Ом}$ .

Ответ:  $P_W = 190 \text{ Вт}$ .

### Задача 8

Вычислить показания ваттметров в схеме [рис. 3.53](#), если  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ,  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 60 \text{ Ом}$ .

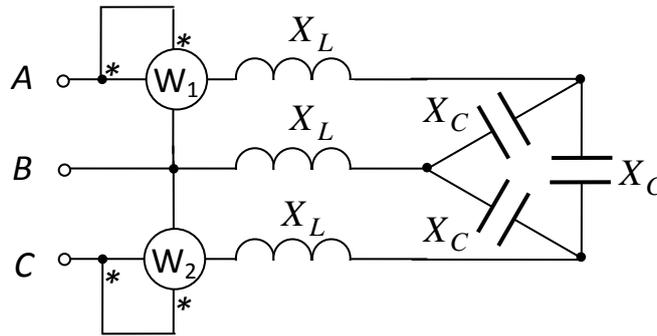


Рис. 3.53

Ответ:  $P_{W_1} = 1397 \text{ Вт}$ ,  $P_{W_2} = -1397 \text{ Вт}$ .

### Задача 9

Найти комплексные значения всех токов в схеме [рис. 3.54](#), если  $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 18 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 1 \text{ Ом}$ .

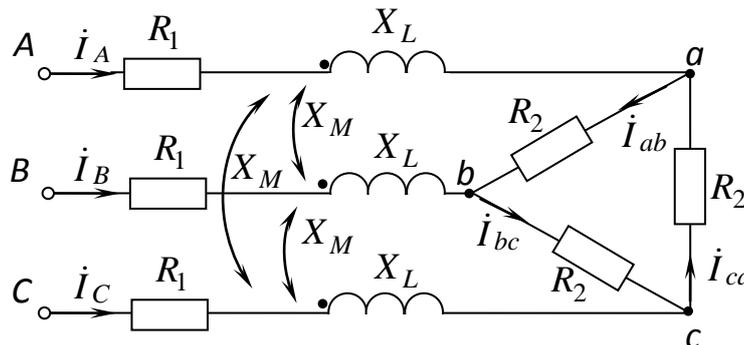


Рис. 3.54

Ответ:  $\dot{I}_A = 22e^{-j37^\circ} \text{ А}$ ,  $\dot{I}_B = 22e^{-j157^\circ} \text{ А}$ ,  $\dot{I}_C = 22e^{j83^\circ} \text{ А}$ ,  $\dot{I}_{ab} = 12,7e^{-j7^\circ} \text{ А}$ ,  $\dot{I}_{bc} = 12,7e^{-j127^\circ} \text{ А}$ ,  $\dot{I}_{ca} = 12,7e^{j113^\circ} \text{ А}$ .

Задачи [10–14](#) решите для самоконтроля.

### Задача 10

Найти показание амперметра в схеме [рис. 3.55](#), если  $\underline{Z} = (8 + j6) \text{ Ом}$ , а вольтметр показывает напряжение  $U_V = 380 \text{ В}$ .

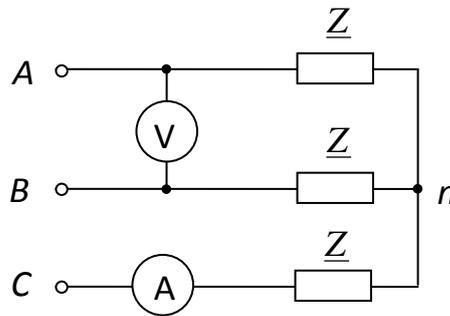


Рис. 3.55

Ответ:  $I_A = 22 \text{ A}$ .

### Задача 11

Вычислить показания ваттметров в схеме [рис. 3.56](#), если  $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$ ,  $X_C = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 60 \text{ Ом}$ .

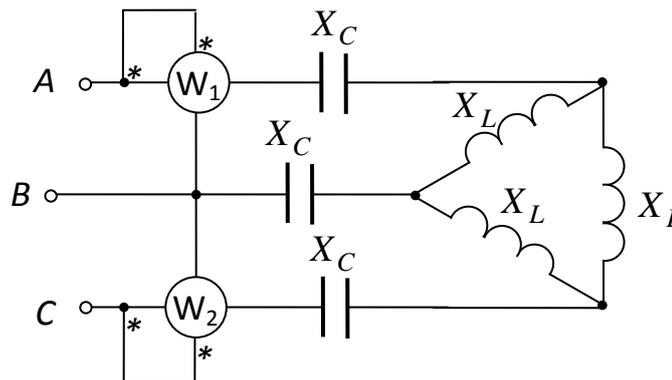


Рис. 3.56

Ответ:  $P_{W_1} = -289 \text{ Вт}$ ,  $P_{W_2} = 289 \text{ Вт}$

### Задача 12

Определить показания всех измерительных приборов в схеме [рис. 3.57](#), если  $U_{\text{л}} = 173 \text{ В}$ ,  $Z_a = Z_b = Z_c = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_A = 0$ ,  $R_V = \infty$ .

Ответ:  $I_{A_1} = I_{A_2} = I_{A_3} = 10 \text{ А}$ ,  $U_{V_1} = U_{V_2} = U_{V_3} = 100 \text{ В}$ ,  $P_{W_1} = P_{W_2} = 1500 \text{ Вт}$ .

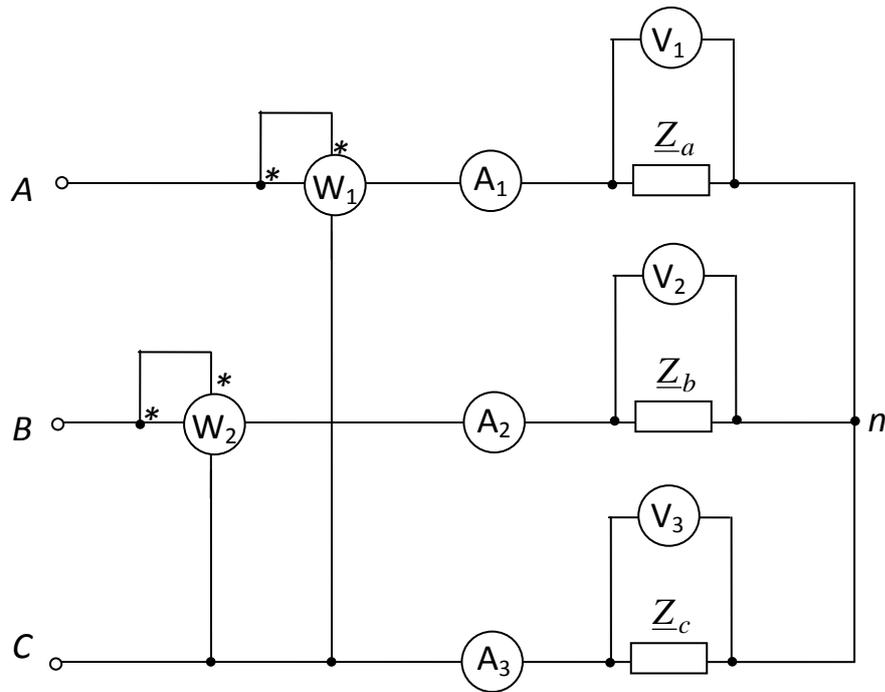


Рис. 3.57

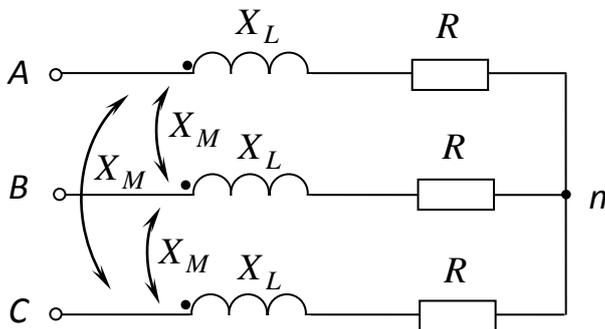


Рис. 3.58

### Задача 13

Вычислить комплексные значения токов в схеме [рис. 3.58](#), если  $U_n = 173$  В,  $R = 6$  Ом,

$X_L = 10$  Ом,  $X_M = 2$  Ом.

Ответ:  $\dot{I}_A = 10e^{-j53^\circ}$  А,  
 $\dot{I}_B = 10e^{-j173^\circ}$  А,  $\dot{I}_C = 10e^{j67^\circ}$  А.

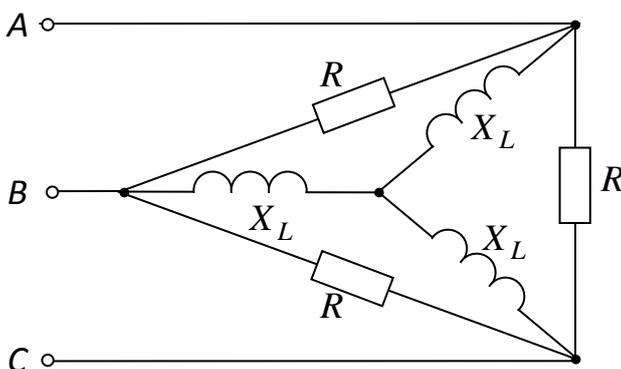


Рис. 3.59

### Задача 14

Найти значение тока в линии схемы [рис. 3.59](#), если модули всех фазных токов равны 1 А.

Ответ:  $I_n = 2$  А.

**Занятие 4**  
**Аварийные режимы в трехфазных цепях**

Цели занятия:

1. Научиться рассчитывать токи и напряжения, строить векторно-топографические диаграммы для режимов холостого хода и короткого замыкания при соединении фаз приемника звездой четырёхпроводной.

2. Научиться рассчитывать токи и напряжения, строить векторно-топографические диаграммы для аварийных режимов при соединении фаз приемника звездой трёхпроводной.

3. Научиться анализировать аварийные режимы в схеме при соединении фаз приёмника треугольником.

Рассмотрим первую целевую задачу занятия.

Холостой ход одной из фаз

Схема замещения трёхфазной цепи при обрыве в фазе *a* приемника изображена на [рис. 3.60](#). Точки *a, b, c, n* приемника коротко соединены соответственно с точками *A, B, C, N* генератора, поэтому потенциалы их одинаковы. Следовательно, напряжения на фазах приемника равны напряжениям на фазах генератора. Ток  $I_A = I_a = 0$ . Токи  $I_B$  и  $I_C$  не изменятся по сравнению с нормальным режимом работы. Их вычисляют по закону Ома:  $\dot{I}_л = \dot{I}_ф = \frac{\dot{U}_ф}{Z_ф}$ . Ток нейтрального провода вычисляют по первому закону Кирхгофа ( $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_B + \dot{I}_C$ ) аналитически или графически.

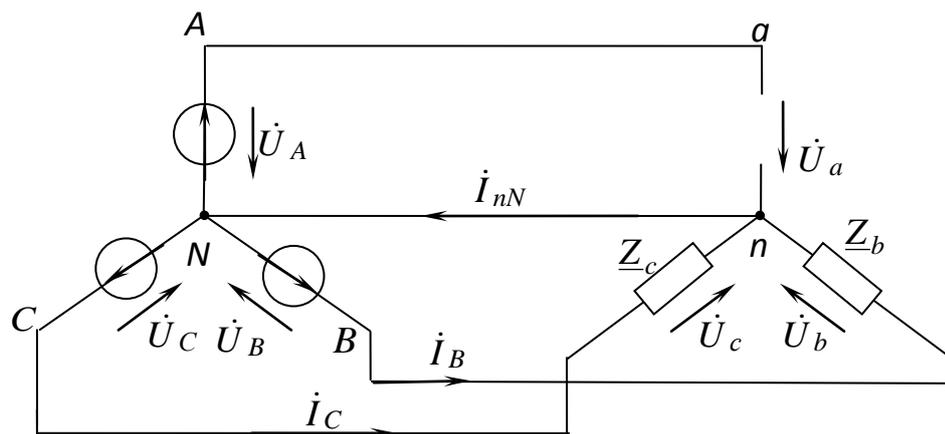


Рис. 3.60

Обрыв линейного провода

Схема замещения трёхфазной цепи при обрыве линейного провода *Aa* изображена на [рис. 3.61](#).

Ток  $I_A = I_a = 0$ , поэтому напряжение на фазе  $a$  приемника  $U_a = Z_a I_a = 0$ . Точки  $b, c, n$  приемника соединены коротко соответственно с точками  $B, C, N$  генератора, т. е.  $\dot{U}_b = \dot{U}_B$ ;  $\dot{U}_c = \dot{U}_C$ .

Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  не изменятся по сравнению с нормальным режимом работы. Ток нейтрального провода равен геометрической сумме токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$ :  $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_B + \dot{I}_C$ .

Топографическая диаграмма приведена на [рис. 3.62](#). Напряжение  $U_a = 0$ , поэтому точка  $a$  на диаграмме совпадает с точкой  $n$ .

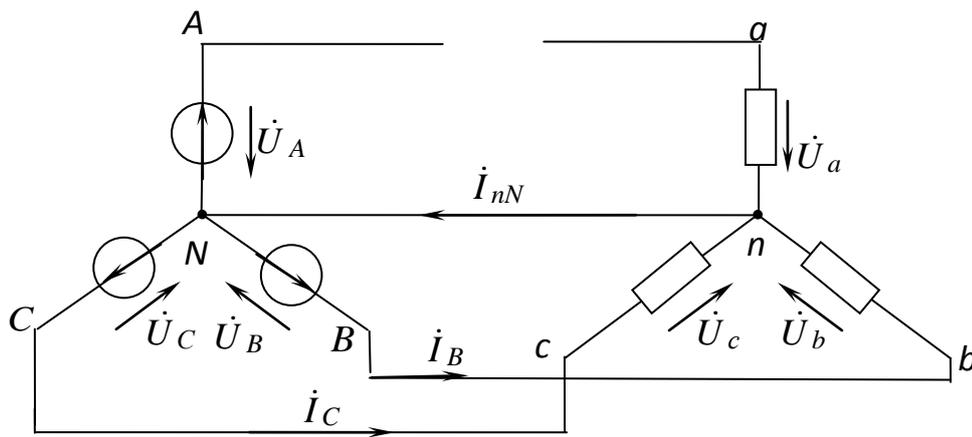


Рис. 3.61

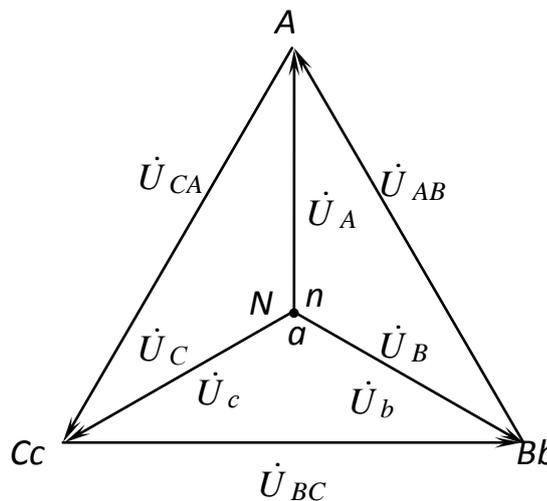


Рис. 3.62

Режим короткого замыкания одной из фаз для случая, когда пренебрегают сопротивлением фаз генератора и проводов, является чисто теоретическим.

Напряжение закороченной фазы становится равным нулю, напряжения на двух других фазах не изменятся.

На практике при возникновении такой аварийной ситуации срабатывает аппаратура защиты.

Перейдём к рассмотрению второй целевой задачи.

### Холостой ход одной из фаз

Схема замещения цепи при обрыве в фазе *a* приемника показана на [рис. 3.63](#).

Построение векторно-топографической диаграммы проводим в три этапа, начиная с топографической диаграммы напряжений генератора. Затем строим топографическую диаграмму напряжений приемника. Точки *a*, *b*, *c* приемника коротко соединены с точками *A*, *B*, *C* генератора, потенциалы их соответственно одинаковы, и эти точки на комплексной плоскости совпадают ([рис. 3.64](#)). Нейтральные точки генератора *N* и приемника *n* не соединены между собой. Так как сопротивление фазы *a* становится при обрыве бесконечно большим, приемник является несимметричным, поэтому возникает напряжение смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN}$ . Соединение звездой при обрыве одной из фаз превращается в последовательное соединение двух других фаз. В схеме [рис. 3.63](#) фазы *b* и *c* подключены под линейное напряжение  $U_{BC}$ . Если сопротивления фаз *b* и *c* одинаковы, напряжение  $U_b = U_c = \frac{U_{BC}}{2}$ , следовательно, точка *n* на диаграмме находится в середине вектора  $\dot{U}_{BC}$ . Соединив точки *n* и *N*, получим вектор напряжения смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN}$ . Соединив точки, соответствующие началам и концам фаз приемника, получим векторы фазных напряжений  $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$ .

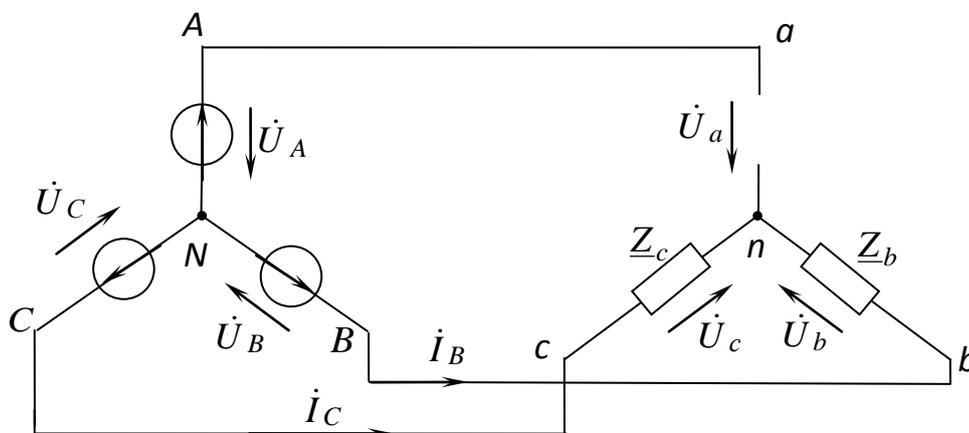


Рис. 3.63

Напряжение на фазе  $a$  возрастает по сравнению с симметричным режимом работы и становится равным  $U_a = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{Л}$ .

Напряжения на фазах  $b$  и  $c$  находятся в противофазах. Направления векторов токов определяются характером нагрузки. Ток в фазе  $a$  равен нулю. Токи в фазах  $b$  и  $c$  одинаковы по величине. С учётом направлений на схеме [рис. 3.63](#) их можно вычислить по закону Ома:

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_c}.$$

На диаграмме [рис. 3.64](#) векторы токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  построены для случая активно-емкостной нагрузки.

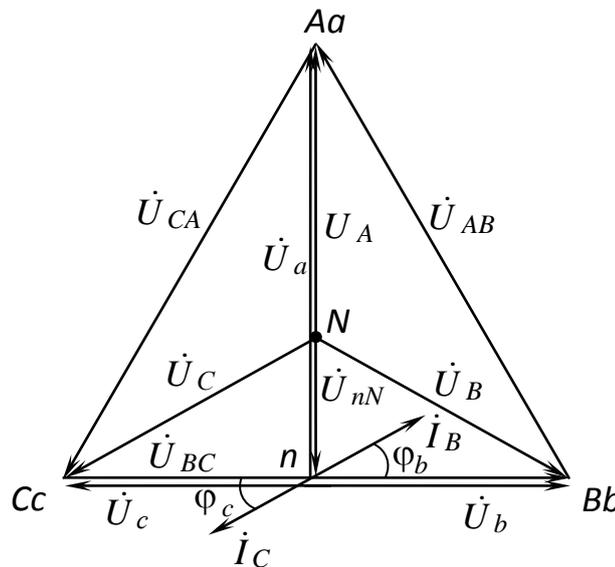


Рис. 3.64

### *Обрыв линейного провода*

Схема замещения цепи при обрыве линейного провода  $Aa$  приведена на [рис. 3.65](#).

Ток  $I_A = I_a = 0$ . Поэтому напряжение на фазе  $a$   $U_a = Z_a I_a = 0$ . Потенциалы точек  $a$  и  $n$  одинаковы. Схема на рис. 3.65 представляет собой последовательное соединение фаз  $b$  и  $c$ , подключенных под напряжение  $U_{bc}$ . Расчет токов не отличается от расчета для режима холостого хода фазы.

При обрыве в фазе приемника напряжение на ней возрастает по сравнению с нормальным режимом работы, при обрыве в линии – становится

равным нулю. Это дает возможность определить место аварии при отсутствии тока в фазе.

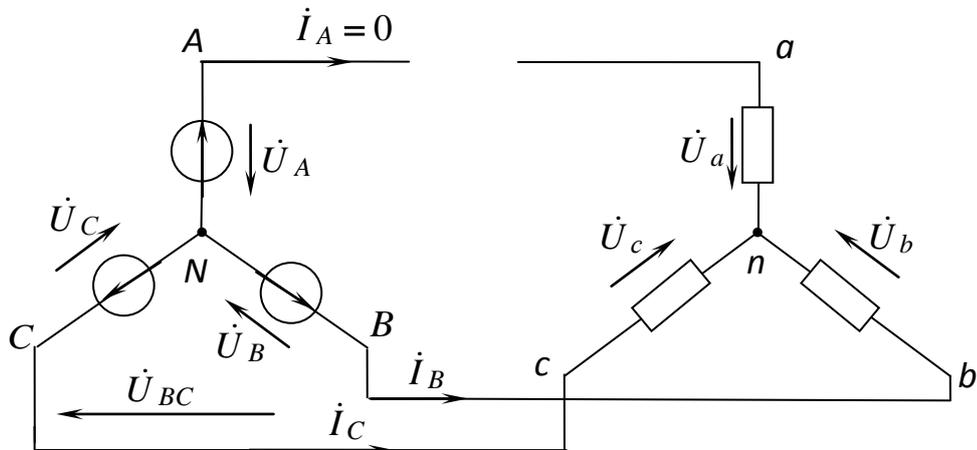


Рис. 3.65

Векторно-топографическая диаграмма для случая, когда сопротивления фаз  $b$  и  $c$  одинаковы и имеют активно-емкостной характер, показана на [рис. 3.66](#).

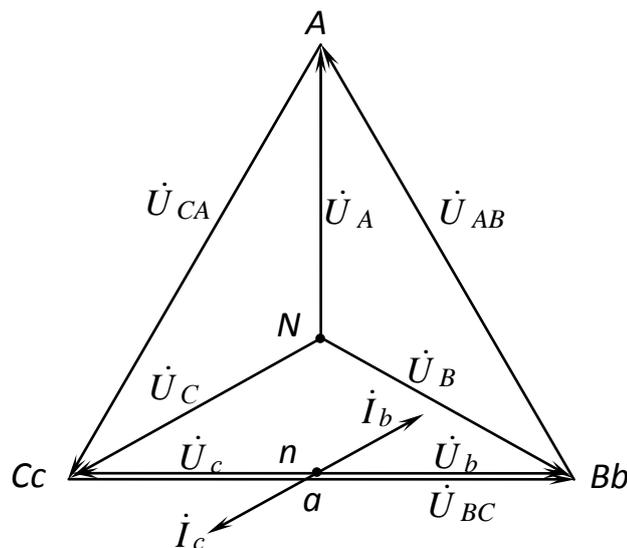


Рис. 3.66

Векторно-топографическую диаграмму можно строить только для приемника, рассматривая его как однофазную цепь.

#### *Короткое замыкание одной из фаз*

Схема замещения цепи при коротком замыкании фазы  $a$  изображена на [рис. 3.67](#).

Сопротивление фазы  $a$   $Z_a = 0$ , поэтому напряжение  $U_a = Z_a I_a = 0$ . Построение топографической диаграммы ([рис. 3.68](#)) проведем в два этапа. Начнем с построения топографической диаграммы напряжений генератора.

Потенциалы точек  $a$  и  $A$ ,  $b$  и  $B$ ,  $c$  и  $C$  (см. [рис. 3.67](#)) одинаковы, поэтому эти точки на диаграмме совпадают. Приемник несимметричный, поэтому между нейтральными точками генератора и приемника возникает напряжение. Точка  $n$  на диаграмме смещается относительно точки  $N$ . Так как точки  $a$  и  $n$  коротко соединены между собой, потенциалы их одинаковы и точка  $n$  на диаграмме совпадает с точкой  $a$ . Чтобы построить векторы напряжений на фазах приемника  $b$  и  $c$ , нужно соединить точки, соответствующие началам и концам фаз. Напряжение  $\dot{U}_{nN} = \dot{U}_A$ .

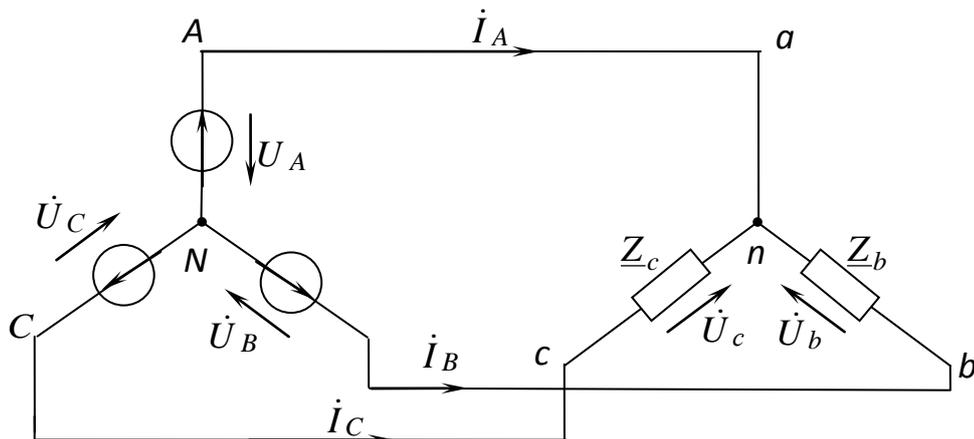


Рис. 3.67

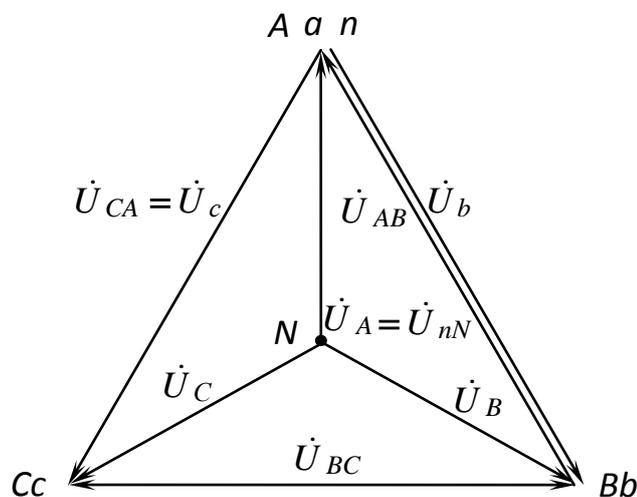


Рис. 3.68

Из диаграммы видим, что напряжения на фазах  $b$  и  $c$  возрастают и становятся равными по величине линейным.

Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  вычисляем по закону Ома:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{-\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_b};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_c}.$$

Сопротивления в фазах  $b$  и  $c$  не изменяются по сравнению с нормальным режимом работы, поэтому эти токи по величине изменяются так же, как напряжения, т. е. увеличиваются в  $\sqrt{3}$  раз.

Ток  $\dot{I}_A$  вычисляют, пользуясь первым законом Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Отсюда  $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C)$ .

Направления векторов токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  зависят от нагрузки в этих фазах. Перейдем к рассмотрению третьей целевой задачи.

#### *Режим холостого хода одной фазы*

Схема замещения трехфазной цепи при обрыве в фазе  $ab$  изображена на [рис. 3.69](#).

Ток  $I_{ab} = 0$ . Точки  $a$ ,  $b$  и  $c$  приемника коротко соединены с точками  $A$ ,  $B$  и  $C$  генератора, поэтому их потенциалы при обрыве фазы не изменяются. Следовательно, напряжения на фазах приемника тоже не меняются по сравнению с нормальным режимом работы. Сохраняют свои значения и токи двух других фаз:

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}.$$

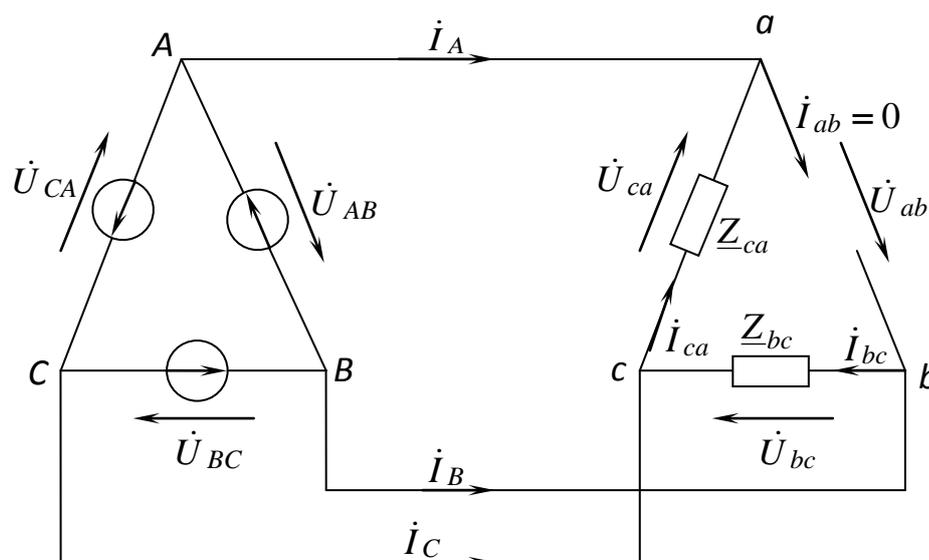


Рис. 3.69

Линейные токи  $I_A$  и  $I_B$ , как видно из [рис. 3.69](#), становятся равными по величине соответственно фазным токам  $I_{ca}$  и  $I_{bc}$ . С учетом указанных на схеме направлений токов можно записать:  $\dot{I}_A = -\dot{I}_{ca}$ ;  $\dot{I}_B = \dot{I}_{bc}$ . Ток  $\dot{I}_C$  вычисляют по первому закону Кирхгофа:  $\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}$ .

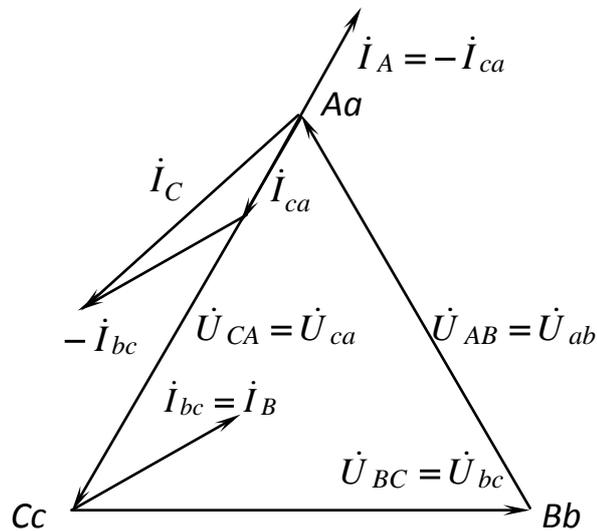


Рис. 3.70

На [рис. 3.70](#) приведены топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов для приемника, у которого нагрузка фазы  $bc$  имеет активно-емкостный характер, фазы  $ca$  – активный.

#### Обрыв линейного провода

Схема замещения трехфазной цепи при обрыве линейного провода  $Aa$  изображена на [рис. 3.71](#).

Соединение фаз приемника треугольником при обрыве линейного провода превращается в смешанное. Фазы  $ab$  и  $ca$  соединены между собой последовательно в ветви, концы которой подключены к точкам  $b$  и  $c$ . Фаза  $bc$  соединена с этой ветвью параллельно.

Токи  $\dot{I}_{ab}$  и  $\dot{I}_{ca}$  равны между собой. Их вычисляют по закону Ома:

$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{ca} = -\frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ca}}.$$

Напряжения на фазах  $ab$  и  $ca$  распределяются пропорционально их сопротивлениям:  $\dot{U}_{ab} = \underline{Z}_{ab} \dot{I}_{ab}$ ;  $\dot{U}_{ca} = \underline{Z}_{ca} \dot{I}_{ca}$ .

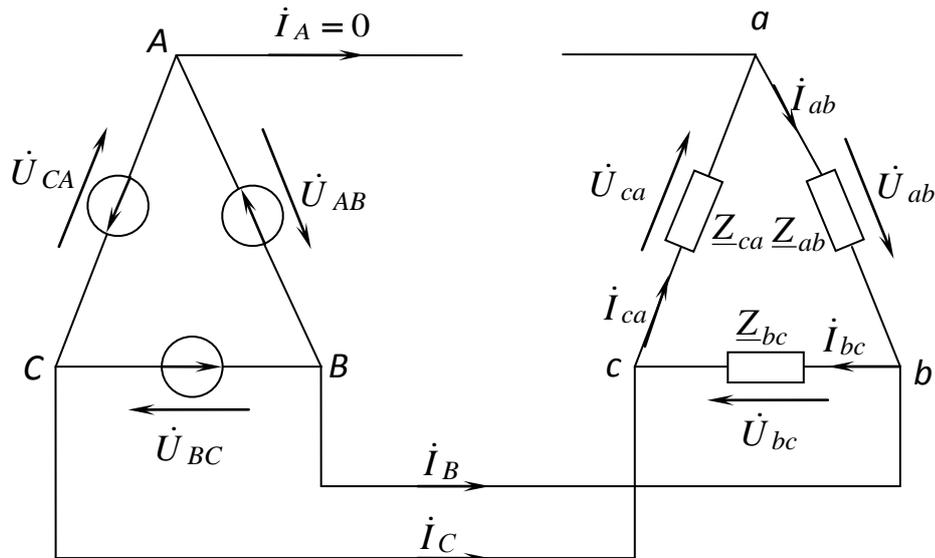


Рис. 3.71

Ток фазы  $bc$  не меняется по сравнению с нормальным режимом:

$$\dot{i}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}.$$

Токи  $\dot{i}_B$  и  $\dot{i}_C$  равны между собой по величине. Они могут быть вычислены по первому закону Кирхгофа с учетом указанных на схеме рис. 3.71 направлений:  $\dot{i}_B = -\dot{i}_C = \dot{i}_{bc} - \dot{i}_{ab}$ .

Линейные токи можно определить графически с помощью векторно-топографической диаграммы, построение которой проводят так же, как и для однофазной цепи со смешанным соединением приемников.

Режим короткого замыкания одной из фаз для случая, когда пренебрегают сопротивлением фаз генератора и проводов, является чисто теоретическим.

Напряжение на закороченной фазе становится равным нулю, напряжения на двух других фазах не изменяются.

На практике при возникновении такой аварийной ситуации срабатывает аппаратура защиты.

Рассмотрим целевые задачи на конкретных примерах.

### Задача 1

Вычислить токи в линейных и нейтральном проводах в схеме [рис. 3.72](#), если  $U_{\text{фг}} = 127 \text{ В}$ ,  $\underline{Z}_b = (3 - j2) \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_c = (3 + j5) \text{ Ом}$ .

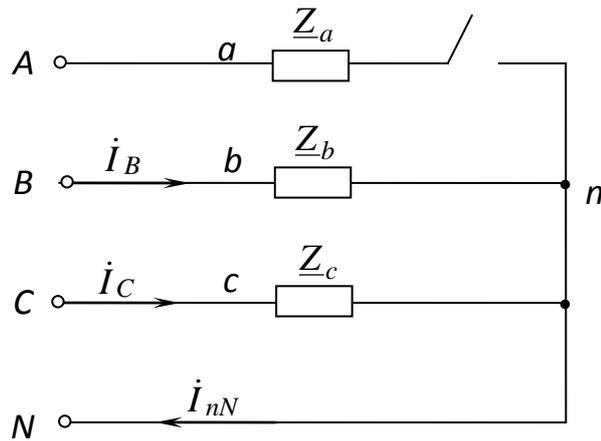


Рис. 3.72

*Решение*

Ток  $\dot{I}_A = \dot{I}_a = 0$ . Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  вычислим по закону Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_B = \dot{I}_b &= \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{127e^{-j120^\circ}}{3-j2} = \\ &= \frac{127e^{-j120^\circ}}{3,6e^{-j34^\circ}} = 35,2e^{-j86^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{127e^{j120^\circ}}{3+j5} = \frac{127e^{j120^\circ}}{5,8e^{j59^\circ}} = 21,9e^{j61^\circ} \text{ А}.$$

Ток в нейтральном проводе

$$\begin{aligned} \dot{I}_{nN} = \dot{I}_b + \dot{I}_c &= 35,2e^{-j86^\circ} + 21,9e^{j61^\circ} = 2,25 - j35,2 + 10,18 + j19,15 = \\ &= 12,43 - j16 = 20,3e^{-j52^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Векторно-топографическая диаграмма построена на [рис. 3.73](#) (линейные напряжения не показаны).

Вектор тока  $\dot{I}_B$  опережает вектор напряжения  $\dot{U}_b$  на угол  $\varphi_b = 34^\circ$ , являющийся аргументом комплексного сопротивления  $\underline{Z}_b$ . Вектор тока  $\dot{I}_C$  отстает от вектора  $\dot{U}_c$  на угол  $\varphi_c = 59^\circ$ . Вектор тока  $\dot{I}_{nN}$  есть геометрическая сумма векторов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$ .

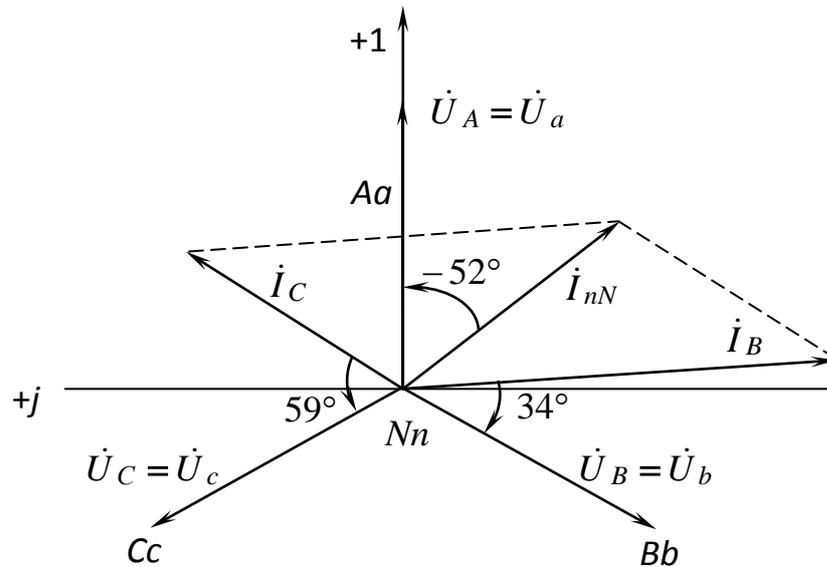


Рис. 3.73

### Задача 2

Найти ток  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.74](#), если  $U_{\text{л}} = 220$  В,  $X_C = 22$  Ом,  
 $R = \frac{22}{\sqrt{3}}$  Ом.

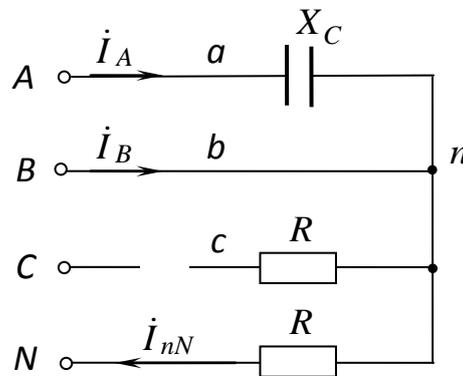


Рис. 3.74

### Решение

Построим векторно-топографическую диаграмму, представленную на [рис. 3.75](#).

Сначала построим топографическую диаграмму напряжений на фазах генератора. Потенциалы точек  $a$  и  $A$ ,  $b$  и  $B$  совпадают. Потенциал точки  $n$  равен потенциалу точки  $B$ , поэтому на диаграмме эти точки совпадают.

Тогда напряжение на фазе приемника  $\dot{U}_a = \dot{U}_{AB}$ , а напряжение смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN} = \dot{U}_B$ .

Вектор тока  $\dot{I}_{nN}$  совпадает по направлению с вектором напряжения  $\dot{U}_{nN}$ , так как нагрузка в нейтральном проводе чисто активная. Вектор тока  $\dot{I}_a = \dot{I}_A$  опережает вектор напряжения  $\dot{U}_a$  на  $90^\circ$ , так как нагрузка в фазе  $a$  чисто емкостная.

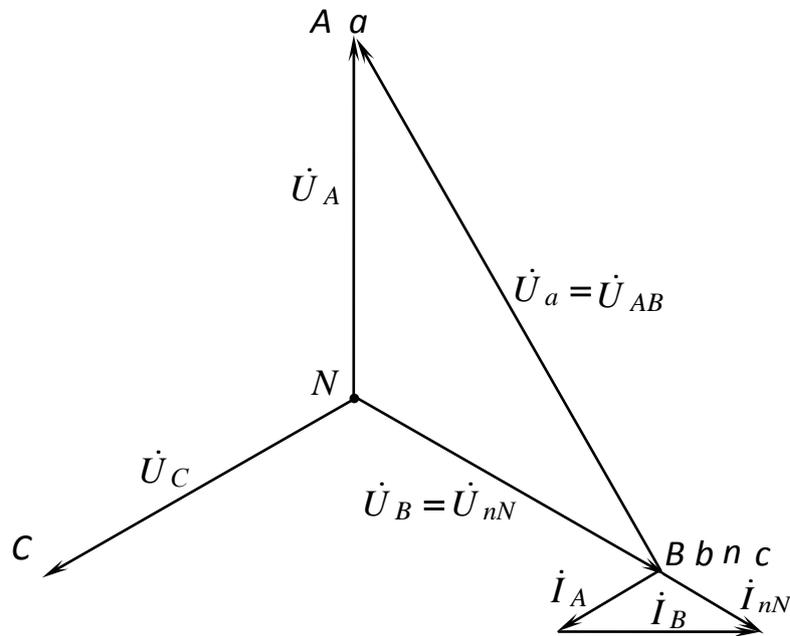


Рис. 3.75

Вычислим токи  $\dot{I}_{nN}$  и  $\dot{I}_A$  по закону Ома:

$$\dot{I}_{nN} = \frac{\dot{U}_{nN}}{R} = \frac{\dot{U}_B}{R} = \frac{220e^{-j120^\circ} \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 22} = 10e^{-j120^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{Z_a} = \frac{\dot{U}_{AB}}{-jX_C} = \frac{220e^{j30^\circ}}{22e^{-j90^\circ}} = 10e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

Вычислим ток  $\dot{I}_B$  по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B - \dot{I}_{nN} = 0.$$

Отсюда

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{nN} - \dot{I}_A = 10e^{-j120^\circ} - 10e^{j120^\circ} = -5 - j8,66 + 5 - j8,66 = -j19,3 \text{ А}.$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 3

Найти показание амперметра в схеме [рис. 3.76](#), если  $U_{\text{фг}} = 100 \text{ В}$ ,  $X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

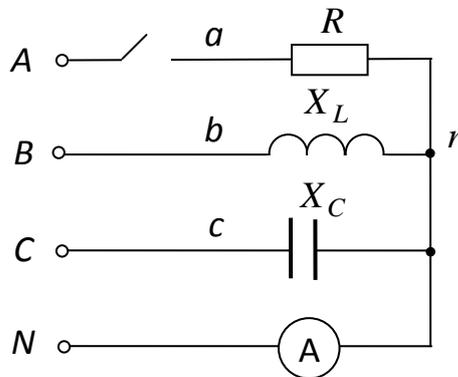


Рис. 3.76

Ответ:  $I_A = 17,3 \text{ А}$ .

### Задача 4

Определить ток  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.77](#), если  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ ,  $R_{nN} = \frac{22}{\sqrt{3}} \text{ Ом}$ ,  $R_a = 22 \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

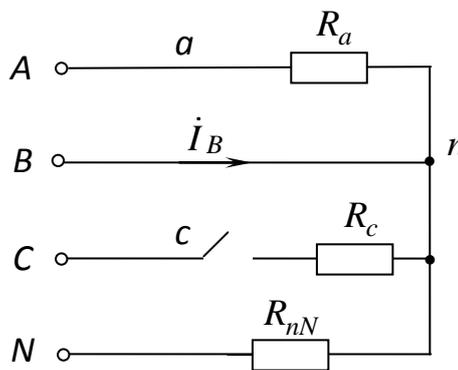


Рис. 3.77

Ответ:  $\dot{I}_B = 19,3e^{-j135^\circ} \text{ А}$ .

[Задачи 5–7](#) решите для самоконтроля.

### Задача 5

Найти показание амперметра в схеме [рис. 3.78](#), если  $U_{\text{фг}} = 100 \text{ В}$ ,  $R = X_C = 10 \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

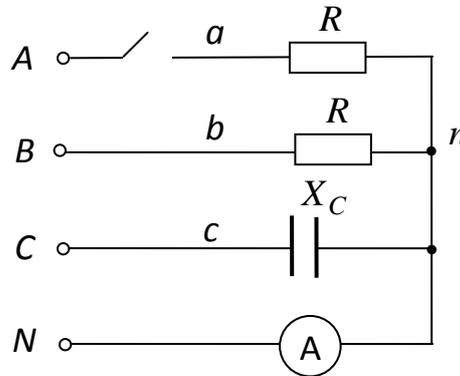


Рис. 3.78

Ответ:  $I_A = 19,3 \text{ А}$ .

### Задача 6

Вычислить ток  $\dot{I}_c$  в схеме [рис. 3.79](#), если  $\dot{U}_A = 127 \text{ В}$ ,  $R = 22 \text{ Ом}$ ,  $X_L = \frac{22}{\sqrt{3}} \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

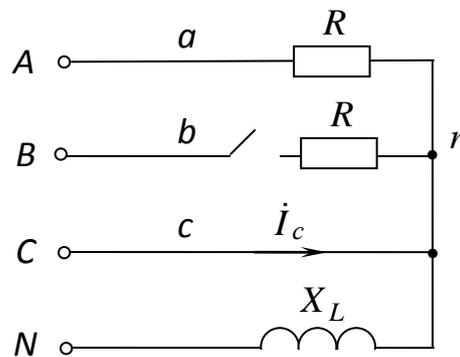


Рис. 3.79

Ответ:  $\dot{I}_c = j10 \text{ А}$ .

### Задача 7

Найти показания ваттметров в схеме [рис. 3.80](#), если  $U_{\phi} = 100 \text{ В}$ ,  $X_L = R = 10 \text{ Ом}$ .

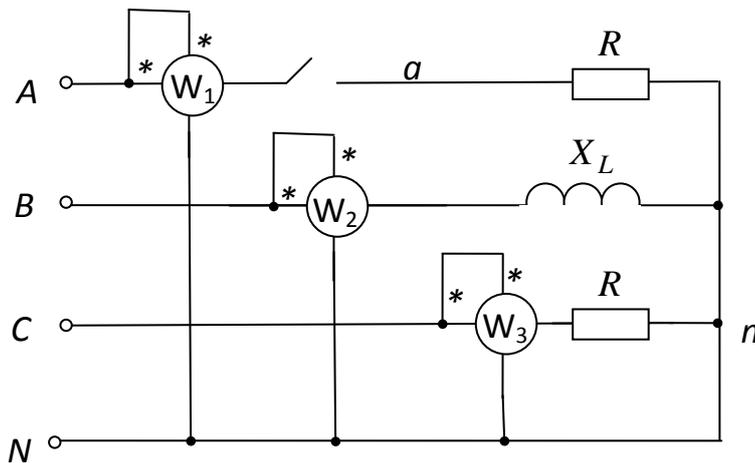


Рис. 3.80

Ответ:  $P_1 = P_2 = 0$ ,  $P_3 = 1$  кВт.

### Задача 8

Определить показания амперметров в схеме [рис. 3.81](#), если  $U_{\text{л}} = 60$  В,  $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = (4 - j3)$  Ом. Построить векторно-топографическую диаграмму.

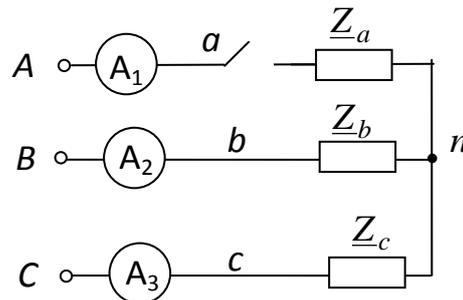


Рис. 3.81

### Решение

Амперметры показывают действующие значения токов. Ток  $I_A = 0$ . Токи  $I_B$  и  $I_C$  равны по величине. Их можно вычислить по закону Ома:

$$I_B = I_C = \frac{U_{BC}}{Z_{bc}},$$

где  $Z_{bc}$  – полное сопротивление двух последовательно соединенных фаз  $b$  и  $c$ . Оно является гипотенузой суммарного треугольника сопротивлений с катетами  $(R_b + R_c)$  и  $(X_b + X_c)$ , поэтому

$$Z_{bc} = \sqrt{(R_b + R_c)^2 + (X_b + X_c)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ Ом.}$$

Тогда  $I_B = I_C = \frac{60}{10} = 6 \text{ А}$ .

Векторно-топографическая диаграмма имеет такой же вид, что и на [рис. 3.64](#).

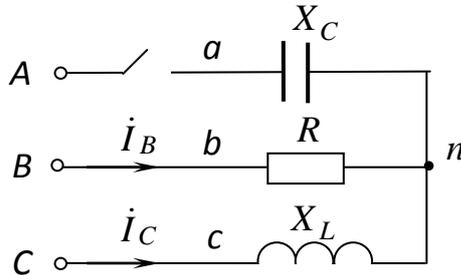


Рис. 3.82

### Задача 9

Вычислить комплексные значения токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  в схеме [рис. 3.82](#), если  $U_{\text{л}} = 200 \text{ В}$ ,  $X_L = X_C = R = 20 \text{ Ом}$ .

#### Решение

Будем считать напряжение фазы *A* генератора действительным числом. Тогда

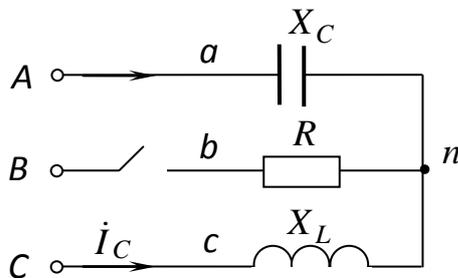


Рис. 3.83

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{BC}}{R + jX_L} = \frac{200e^{-j90^\circ}}{20 + j20} = \frac{200e^{-j90^\circ}}{28e^{j45^\circ}} = 7,14e^{-j135^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = 7,14e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

### Задача 10

Построить топографическую диаграмму напряжений для схемы на [рис. 3.83](#), если  $X_L = 2X_C$ .

*Решение*

На первом этапе строим топографическую диаграмму напряжений генератора ([рис. 3.84](#)).

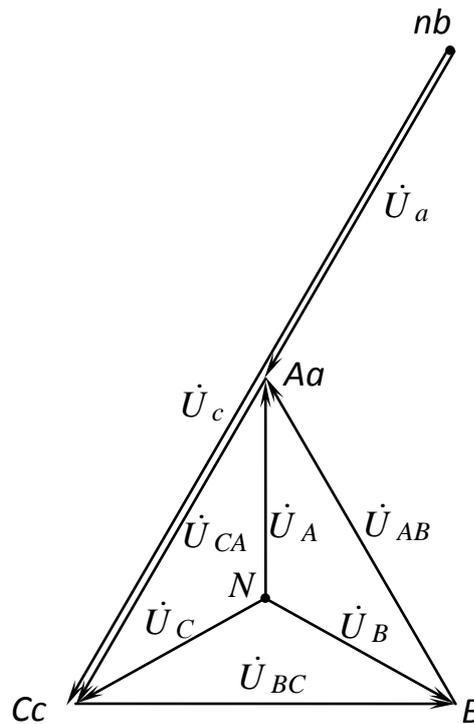


Рис. 3.84

$$\text{Ток } \dot{I}_A = -\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{AC}}{j(X_L - X_C)}.$$

Если считать напряжение  $\dot{U}_A$  действительным числом, то  $\dot{U}_{AC} = U_{\text{л}} e^{-j30^\circ}$ . Тогда

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_C = \frac{U_{\text{л}} e^{-j30^\circ}}{j(2X_C - X_C)} = \frac{U_{\text{л}}}{X_C} e^{-j120^\circ}.$$

Напряжение на фазе приемника

$$\dot{U}_a = -jX_C \dot{I}_A = -jX_C \frac{U_{\text{л}}}{X_C} e^{-j120^\circ} = U_{\text{л}} e^{-j210^\circ} = U_{\text{л}} e^{j150^\circ}.$$

$$\begin{aligned} \text{Напряжение } \dot{U}_c &= jX_L \dot{I}_C = -jX_L \dot{I}_A = -j2X_C \frac{U_{\text{л}}}{X_C} e^{-j120^\circ} = \\ &= 2U_{\text{л}} e^{-j210^\circ} = 2U_{\text{л}} e^{j150^\circ}. \end{aligned}$$

Используя значения  $\dot{U}_a$  и  $\dot{U}_c$ , можно найти положение точки  $n$  на комплексной плоскости (рис. 3.84). Точка  $b$  совпадает с точкой  $n$ . Точки  $a$  и  $c$  совпадают соответственно с точками  $A$  и  $C$ . Подробный анализ для определения смещения нейтрали проведен в [3].

### Задача 11

Найти показание вольтметра и построить топографическую диаграмму для схемы на рис. 3.85, если  $U_{\text{л}} = 100$  В,  $R = X_L = 10$  Ом.

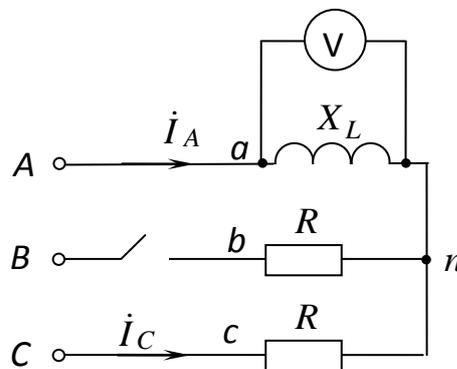


Рис. 3.85

### Решение

Подробный анализ решения подобной задачи проведен в [3].

$$\text{Ток } \dot{I}_A = -\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{AC}}{R + jX_L}.$$

Если напряжение  $\dot{U}_A = U_A$ , то  $\dot{U}_{AC} = 100e^{-j30^\circ}$  В.

Тогда

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_C = \frac{100e^{-j30^\circ}}{10 + j10} = \frac{100e^{-j30^\circ}}{14,14e^{j45^\circ}} = 7,07e^{-j75^\circ} \text{ А}; \quad \dot{I}_C = 7,07e^{j105^\circ} \text{ А}.$$

Напряжения на фазах приемника найдем по закону Ома:

$$\dot{U}_a = jX_L \dot{I}_A = 10e^{j90^\circ} \cdot 7,07e^{-j75^\circ} = 70,7e^{j15^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = R \cdot \dot{I}_C = 10 \cdot 7,07e^{j105^\circ} = 70,7e^{j105^\circ} \text{ В}.$$

Вольтметр показывает напряжение  $U_V = 70,7 \text{ В}$ .

Топографическая диаграмма приведена на [рис. 3.86](#). В [3] установлено, что в данном случае  $U_{nN} = \frac{U_{\text{фг}}}{2,732} = \frac{100}{\sqrt{3} \cdot 2,732} = 21,16 \text{ В}$ . Это следует из

равенства  $U_{nN} = \frac{U_{\text{л}}}{2} - \frac{U_{\text{ф}}}{2}$ .

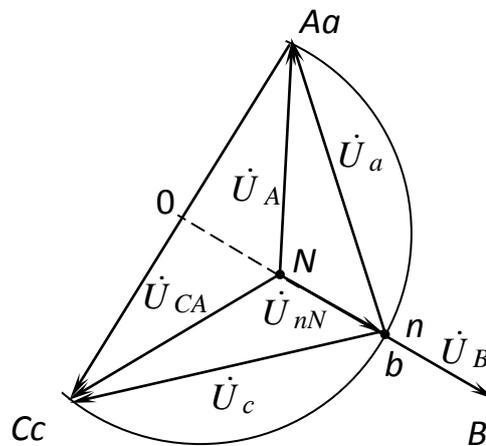


Рис. 3.86

### Задача 12

Найти показание вольтметра и построить топографическую диаграмму для схемы [рис. 3.87](#), если  $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$ ,  $R = X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_V \rightarrow \infty$ .

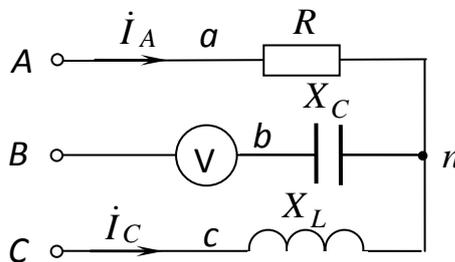


Рис. 3.87

### Решение

Подробный анализ приведен в [3]. Ток

$$\begin{aligned} \dot{I}_A = -\dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_{AC}}{R + jX_L} = \frac{100e^{-j30^\circ}}{14,14e^{j45^\circ}} = \\ &= 7,07e^{-j75^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Ток  $\dot{I}_C = 7,07e^{j105^\circ}$  А.

Напряжения на фазах приемника:

$$\dot{U}_a = R \cdot \dot{I}_A = 70,7e^{-j75^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_c = jX_L \cdot \dot{I}_C = 70,7e^{j195^\circ} \text{ В.}$$

Топографическая диаграмма напряжений приведена на [рис. 3.88](#).

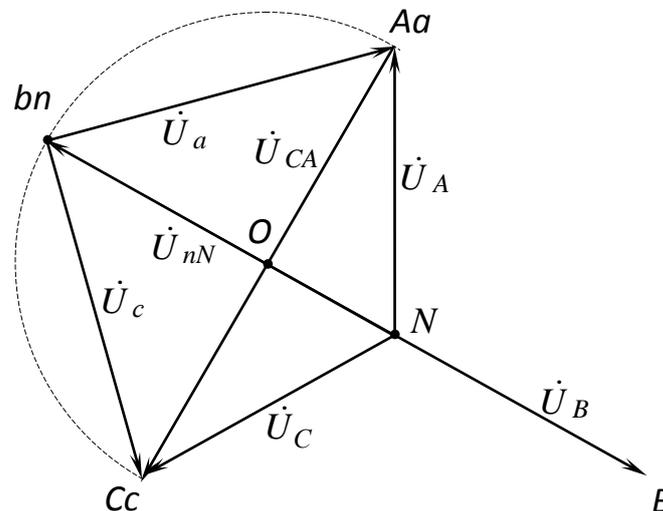


Рис. 3.88

Показание вольтметра  $U_V = U_{Bb} = U_{Bn} = U_{nN} + U_B$ . В этом случае

$$U_{nN} = \frac{U_{\pi}}{2} + \frac{U_{\phi}}{2} = \frac{U_{\phi}}{0,732} \approx 79 \text{ В.}$$

Напряжение

$$U_B = \frac{U_{\pi}}{\sqrt{3}} = 57,8 \text{ В.}$$

Тогда  $U_V = 79 + 57,8 = 136,8 \text{ В.}$

**Задача 13**

Вычислить токи в линейных проводах цепи, схема замещения которой изображена на [рис. 3.89](#), если  $U_{\text{фг}} = 127 \text{ В}$ ,  $R_b = 40 \text{ Ом}$ ,  $X_b = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_c = 70 \text{ Ом}$ .

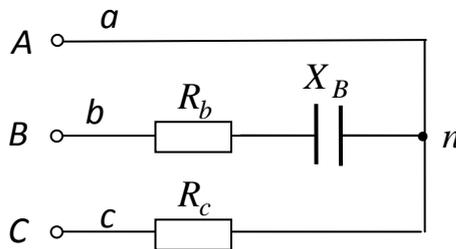


Рис. 3.89

*Решение*

Напряжения на фазах  $b$  и  $c$  приемника возросли и стали равны линейному напряжению генератора  $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}} = 220 \text{ В}$ .

Комплексы фазных напряжений приемника можно записать, используя векторно-топографическую диаграмму [рис. 3.90](#), следующим образом:

$$\dot{U}_b = 220e^{-j150^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_c = 220e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

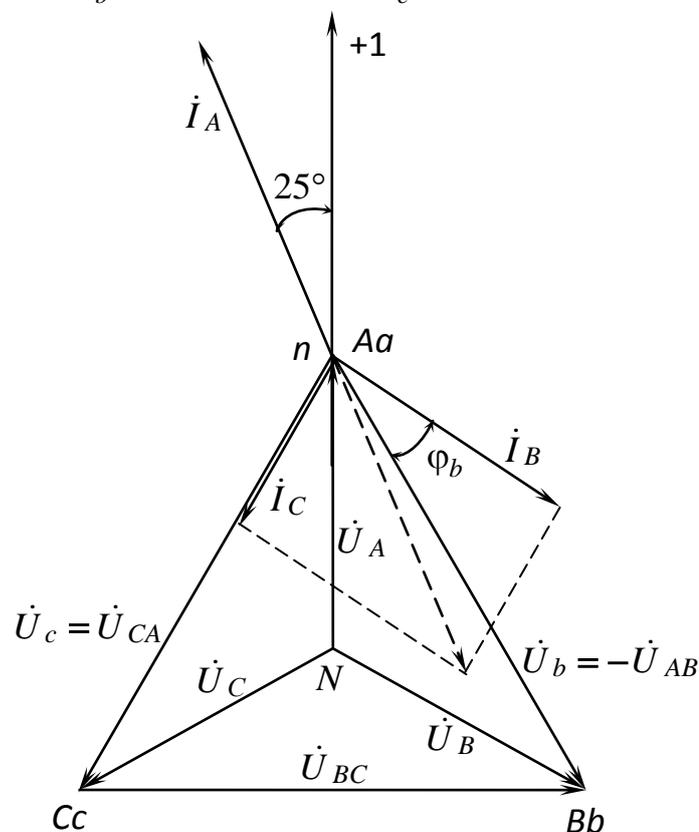


Рис. 3.90

Вычислим токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  по закону Ома:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = \frac{220 e^{-j150^\circ}}{40 - j20} = \frac{220 e^{-j150^\circ}}{44,7 e^{-j26,5^\circ}} = 4,9 e^{-j123,5^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = \frac{220 e^{j150^\circ}}{70} = 3,14 e^{j150^\circ} \text{ А}.$$

Ток  $\dot{I}_A$  вычислим, воспользовавшись первым законом Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C) = -(4,9 e^{-j123,5^\circ} + 3,14 e^{j150^\circ}) =$$

$$= -(-2,70 - j4,09 - 2,72 + j1,57) = 5,42 + j2,52 = 5,98 e^{j25^\circ} \text{ А}.$$

Действующие значения линейных токов  $I_A = 5,98 \text{ А}$ ;  $I_B = 4,9 \text{ А}$ ;  $I_C = 3,14 \text{ А}$ .

Векторно-топографическая диаграмма приведена на рис. 3.90. Топографическая диаграмма напряжений имеет тот же вид, что и на рис. 3.68.

Вектор тока  $\dot{I}_B$  опережает вектор напряжения  $\dot{U}_b$  на угол  $\varphi_b = 26,5^\circ$ .

Вектор тока  $\dot{I}_C$  совпадает с вектором напряжения  $\dot{U}_c$  по фазе. Строим вектор, равный геометрической сумме векторов  $(\dot{I}_B + \dot{I}_C)$ . Равный и противоположно направленный ему вектор – вектор тока  $\dot{I}_A$ .

### Задача 14

Вычислить значение тока  $\dot{I}_C$  в схеме [рис. 3.91](#), если  $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$ ,  $X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

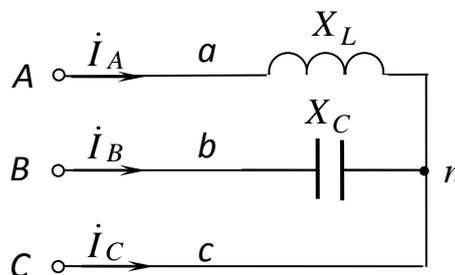


Рис. 3.91

### Решение

Вычислим токи  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_B$  по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{jX_L} = \frac{-\dot{U}_{CA}}{jX_L} = \frac{100 e^{-j30^\circ}}{10 e^{j90^\circ}} = 10 e^{-j120^\circ} \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B = \dot{I}_b &= \frac{\dot{U}_b}{-jX_C} = \frac{\dot{U}_{BC}}{-jX_C} = \\ &= \frac{100 e^{-j90^\circ}}{10 e^{-j90^\circ}} = 10 \text{ А}. \end{aligned}$$

Ток  $\dot{I}_C$  вычислим с помощью первого закона Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_C &= -\dot{I}_A - \dot{I}_B = -10 e^{-j120^\circ} - 10 = 5 + j8,66 - 10 = \\ &= -5 + j8,66 = 10 e^{j120^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Векторно-топографическая диаграмма приведена на [рис. 3.92](#).

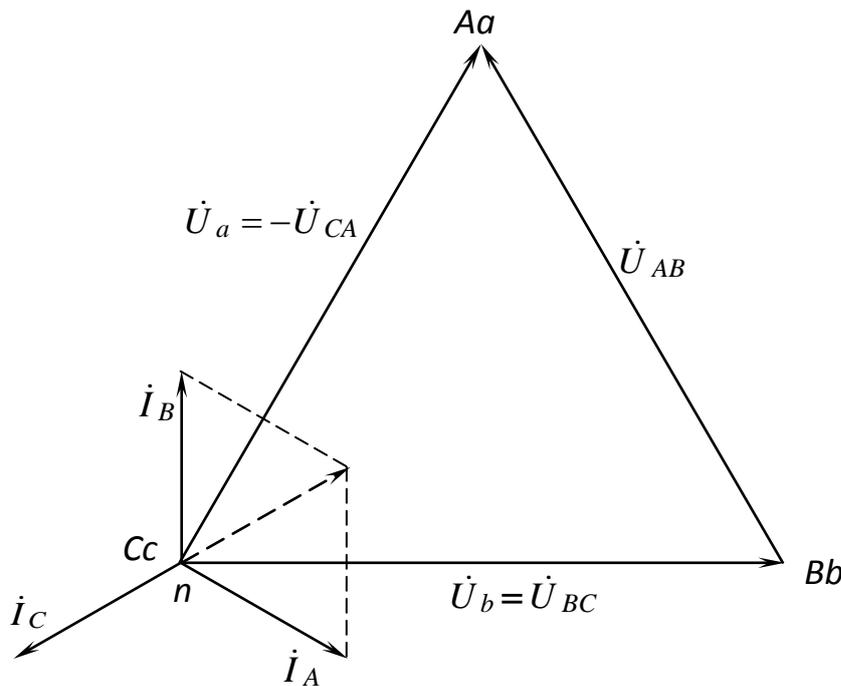


Рис. 3.92

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 15

Вычислить значения токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  в схеме [рис. 3.93](#), если  $U_{л} = 200 \text{ В}$ ,  $X_C = R = 20 \text{ Ом}$ .

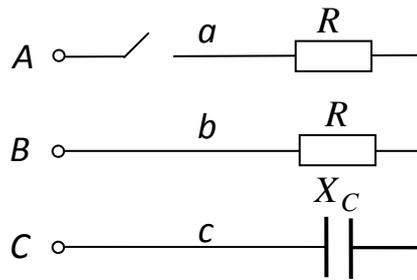


Рис. 3.93

Ответ: При  $\dot{U}_A = U_A$

$$\dot{I}_B = 7,14 e^{-j45^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_C = 7,14 e^{+j135^\circ} \text{ А}.$$

### Задача 16

Вычислить показание вольтметра в схеме [рис. 3.94](#), если  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$ .  
 Построить топографическую диаграмму.

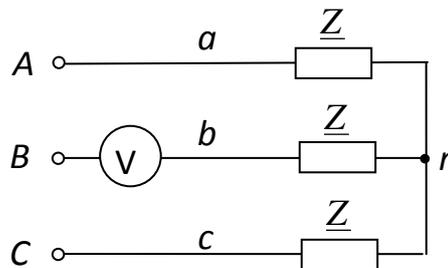


Рис. 3.94

Ответ:  $U_V = 190,5 \text{ В}$ .

### Задача 17

Вычислить ток  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.95](#), если  $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ .  
 Построить векторно-топографическую диаграмму.

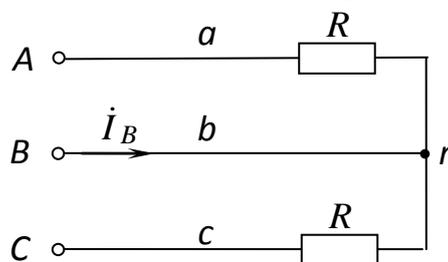


Рис. 3.95

Ответ:  $\dot{I}_B = 17,3 e^{-j120^\circ} \text{ А}$ .

Задачи 18–22 решите для самоконтроля.

### Задача 18

Найти значения токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  в схеме на [рис. 3.96](#), если  $U_{\text{л}} = 200$  В,  $X_L = 50$  Ом,  $R = 20$  Ом,  $X_C = 30$  Ом.

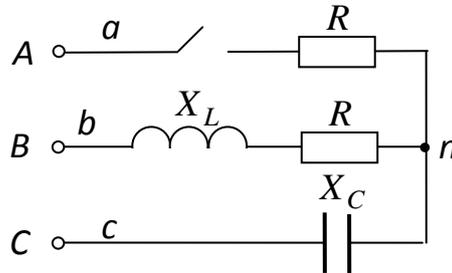


Рис. 3.96

Ответ:  $\dot{I}_B = 7,14 e^{-j135^\circ}$  А,  
 $\dot{I}_C = 7,14 e^{j45^\circ}$  А.

### Задача 19

Определить показание вольтметра в схеме [рис. 3.97](#), если  $U_{\text{л}} = 380$  В.

Ответ:  $U_V = 190$  В.

### Задача 20

Определить показание вольтметра в схеме [рис. 3.98](#), если известно  $U_{\text{л}}$ .

Ответ:  $U_V = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{\text{л}}$

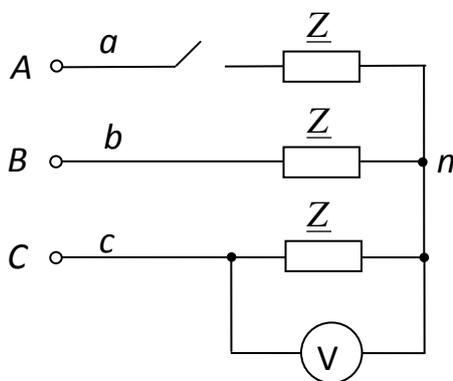


Рис. 3.97

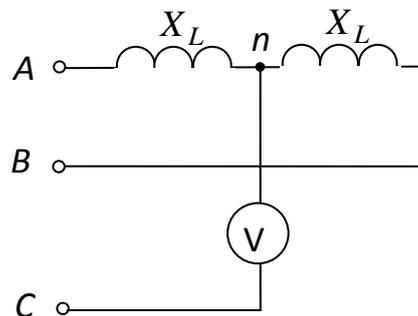


Рис. 3.98

### Задача 21

Найти показание ваттметра в схеме на [рис. 3.99](#), если  $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 40 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 30 \text{ Ом}$ .

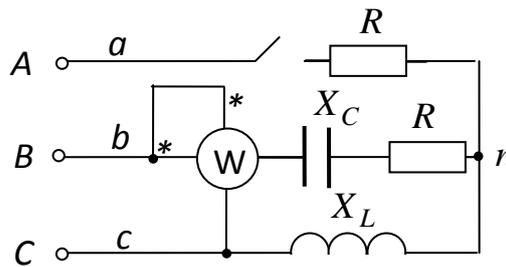


Рис. 3.99

Ответ:  $P_W = 500 \text{ Вт}$ .

### Задача 22

Вычислить значение тока  $\dot{I}_C$  в схеме на [рис. 3.100](#), если  $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$ ,  $R = X_L = 10 \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

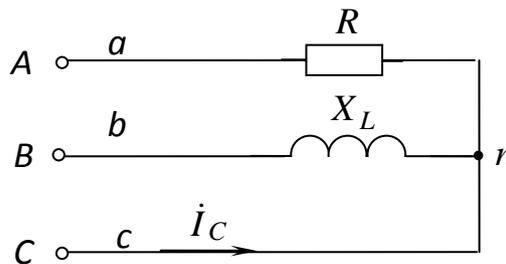


Рис. 3.100

Ответ:  $\dot{I}_C = 5,18e^{j75^\circ} \text{ А}$ .

### Задача 23

Определить значение тока  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.101](#), если  $\dot{U}_{AB} = 100 \text{ В}$ ,  $X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

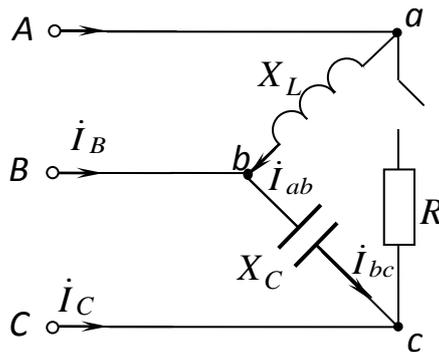


Рис. 3.101

*Решение*

В схеме наблюдается режим холостого хода фазы *ca*. Ток  $I_{ca} = 0$ .  
 Как видно из схемы, ток

$$i_A = i_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{jX_L} = \frac{100}{j10} = -j10 \text{ A};$$

ТОК 
$$i_{bc} = -i_C = \frac{\dot{U}_{BC}}{-jX_C} = \frac{100e^{-j120^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 10e^{-j30^\circ} \text{ A}.$$

Ток  $i_B$  найдем по первому закону Кирхгофа:

$$i_B = i_{bc} - i_{ab} = 10e^{-j30^\circ} + j10 = 8,66 - j5 + j10 = 8,66 + j5 = 10e^{j30^\circ} \text{ A}.$$

Векторно-топографическая диаграмма приведена на [рис. 3.102](#).

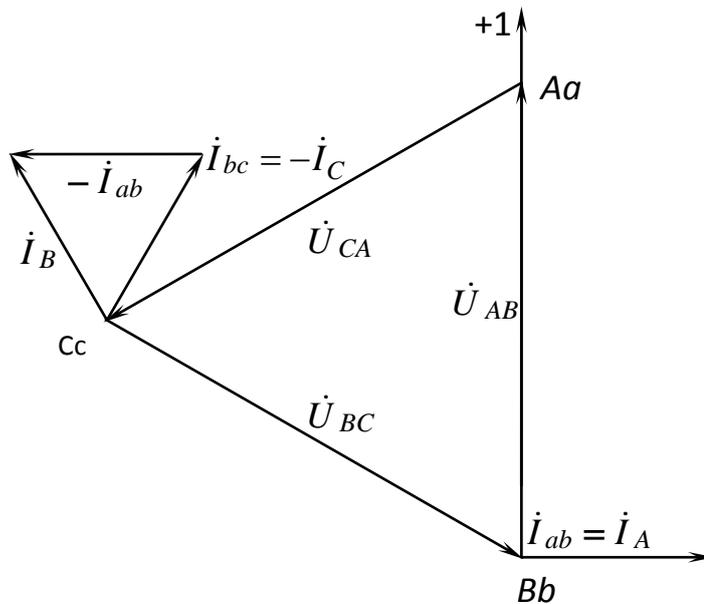


Рис. 3.102

### Задача 24

Вычислить значения токов  $I_A$  и  $I_C$  в схеме на [рис. 3.103](#), если  $\dot{U}_{AB} = 100 \text{ В}$ ,  $R = X_L = 10 \text{ Ом}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

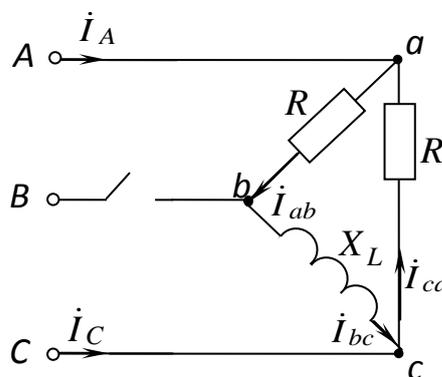


Рис. 3.103

### Решение

В схеме наблюдается режим холостого хода линейного провода  $B$ . Ток  $I_B = 0$ . Схема превращается в смешанное соединение, подключенное к точкам  $a$  и  $c$ . Фазы приемника  $ab$  и  $bc$  соединены между собой последовательно, параллельно к ним подключена фаза  $ca$ .

Напряжение  $\dot{U}_{CA} = 100e^{j120^\circ} \text{ В}$ .

Напряжение  $\dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA} = 100e^{-j60^\circ} \text{ В}$ .

Фазные токи находим по закону Ома:

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{R} = \frac{100e^{j120^\circ}}{10} = 10e^{j120^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{AC}}{R + jX_L} = \frac{100e^{-j60^\circ}}{10 + j10} = \frac{100e^{-j60^\circ}}{14,14e^{j45^\circ}} = 7,07e^{-j105^\circ} \text{ A}.$$

Линейные токи найдем по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} &= 7,07e^{-j105^\circ} - 10e^{j120^\circ} = -1,83 - j6,83 + 5 - j8,66 = \\ &= 3,17 - j15,49 = 15,8e^{-j78,5^\circ} \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = 15,8e^{j101,5^\circ} \text{ A} = -\dot{I}_A.$$

Векторно-топографическая диаграмма приведена на [рис. 3.104](#).  
Напряжение

$$\dot{U}_{ab} = R \cdot \dot{I}_{ab} = 70,7e^{-j105^\circ} \text{ В},$$

напряжение

$$\dot{U}_{bc} = jX_L \cdot \dot{I}_{bc} = 70,7e^{-j15^\circ} \text{ В}. \quad \dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{ac}.$$

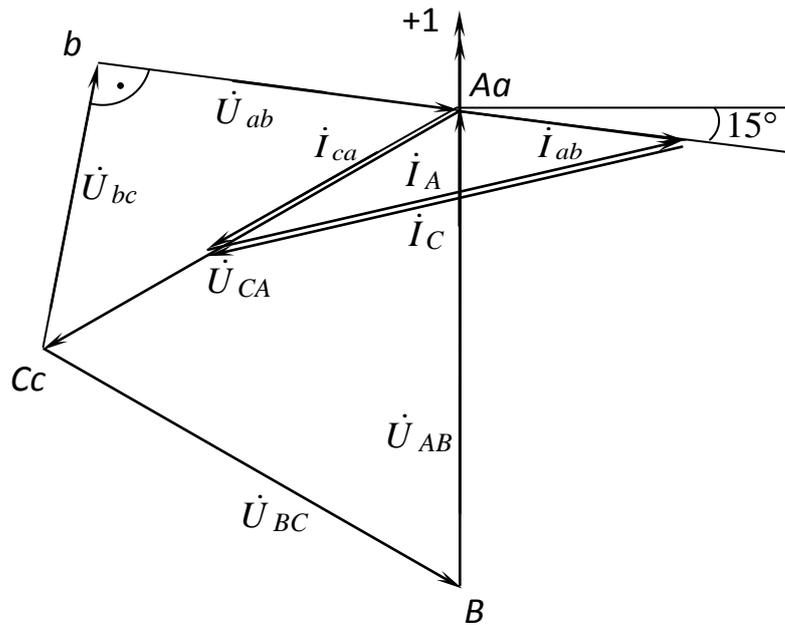


Рис. 3.104

### Задача 25

Вычислить значение тока  $i_A$  в схеме [рис. 3.105](#), если  $U_{AB} = 100$  В,  $R = 10$  Ом,  $R_1 = 5$  Ом.

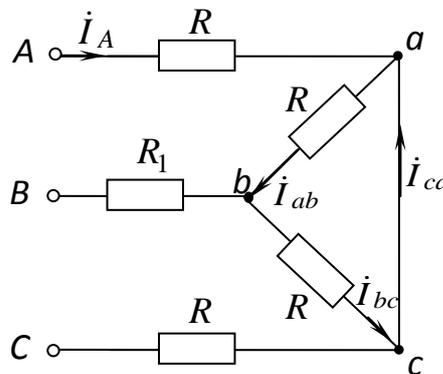


Рис. 3.105

### Решение

В схеме наблюдается режим короткого замыкания фазы  $ca$ . Фазы  $ab$  и  $bc$  оказались соединенными параллельно. Их эквивалентное сопротивление  $R_3 = \frac{R}{2} = 5$  Ом. Схему можно заменить эквивалентной, представленной на [рис. 3.106](#).

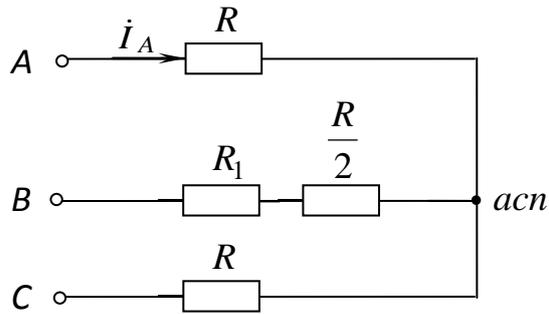


Рис. 3.106

Фазы симметричного приемника соединены звездой трехпроводной. Напряжения на фазах приемника равны напряжениям на фазах генератора. Ток  $\dot{I}_A$  найдем по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{R}.$$

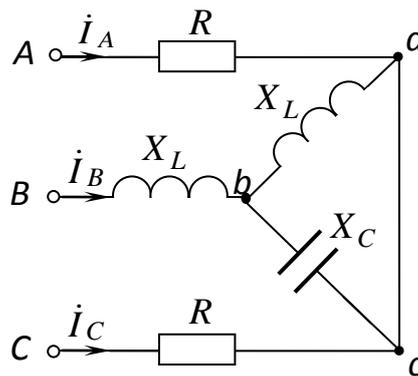


Рис. 3.107

$$\begin{aligned} \text{Напряжение } \dot{U}_A &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \\ &= \frac{100}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 57,8 e^{-j30^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{I}_A = \frac{57,8 e^{-j30^\circ}}{10} = 5,78 e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

### Задача 26

Вычислить ток  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.107](#), если  $R = X_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 5 \text{ Ом}$ ,  $\dot{U}_{AB} = 100 \text{ В}$ . Построить векторно-топографическую диаграмму.

*Решение*

Вычислим эквивалентное сопротивление параллельно соединенных фаз  $ab$  и  $bc$ :

$$\underline{Z}_3 = \frac{X_L e^{j90^\circ} \cdot X_C e^{-j90^\circ}}{j(X_L - X_C)} = 10e^{-j90^\circ} \text{ Ом.}$$

Эквивалентное сопротивление

$$\underline{Z}_b = jX_L + \underline{Z}_3 = j10 - j10 = 0.$$

Эквивалентная схема замещения представлена на [рис. 3.108](#). Она представляет собой соединение звездой трехпроводной с режимом КЗ в фазе  $b$ .

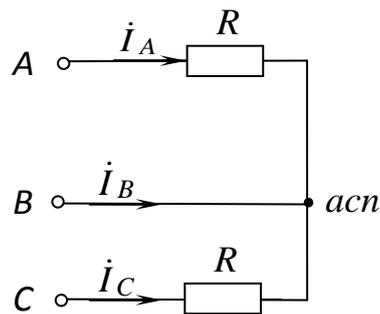


Рис. 3.108

Векторно-топографическая диаграмма представлена на [рис. 3.109](#).

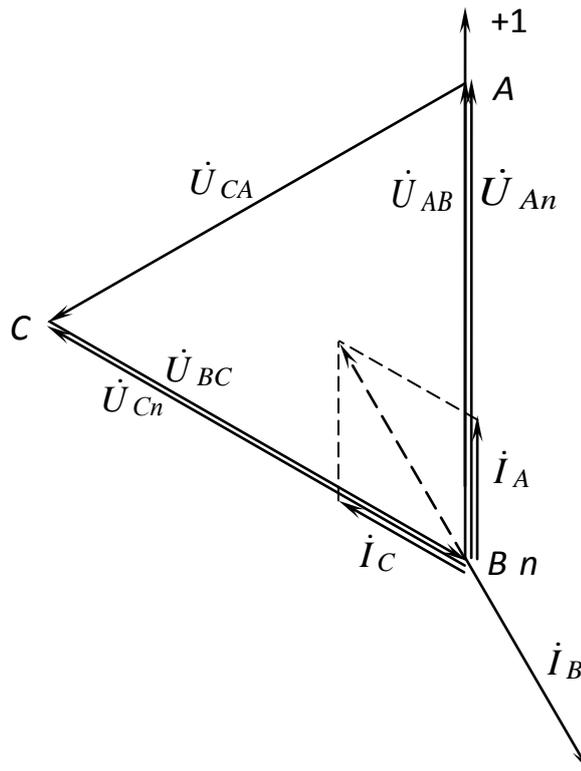


Рис. 3.109

Вычислим токи  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_C$  по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{An}}{R} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{Cn}}{R} = \frac{-\dot{U}_{BC}}{R} = \frac{100e^{j60^\circ}}{10} = 10e^{j60^\circ} \text{ A}.$$

Найдем ток  $\dot{I}_B$  по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= -\dot{I}_A - \dot{I}_C = -10 - 10e^{j60^\circ} = \\ &= -10 - 5 - j8,66 = -15 - j8,66 = 17,3e^{-j150^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

### Задача 27

Вычислить все токи и показания ваттметров в схеме [рис. 3.110](#) при  $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$  и известных сопротивлений.

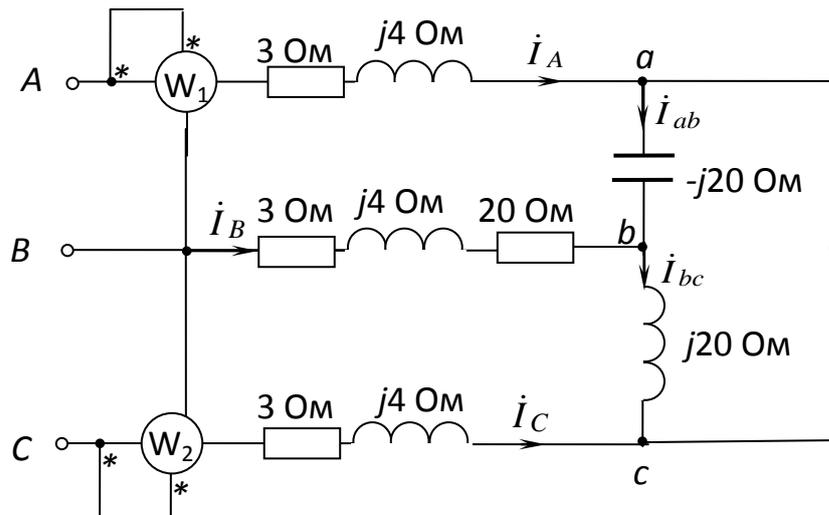


Рис. 3.110

### Решение

Точки  $a$  и  $c$  соединены коротко между собой. Фазы  $ab$  и  $bc$  образуют параллельный идеальный контур из-за равенства сопротивлений  $X_L$  и  $X_C$  – «пробку» для резонансной частоты. Поэтому ток в неразветвленной части цепи с этим контуром  $I_B = 0$ . Схему можно рассматривать как соединение звездой трехпроводной при режиме холостого хода фазы  $b$ . Фазы  $a$  и  $c$  соединены последовательно и подключены под линейное напряжение  $\dot{U}_{CA}$ . Вычислим ток  $\dot{I}_C$  по закону Ома:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_C} = \frac{220e^{j120^\circ}}{6 + j8} = 22e^{j67^\circ} \text{ А.}$$

Ток  $\dot{I}_A = -\dot{I}_C = 22e^{-j113^\circ} \text{ А.}$

Ток  $\dot{I}_{ab} = -\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{ab}}{jX_L}$ .

Напряжение

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_{cb} = -\dot{U}_{BC} - \dot{U}_{Cc} = -\dot{U}_{BC} - \underline{Z}_C \cdot \dot{I}_C = \\ &= -220e^{-j120^\circ} - 5e^{j53^\circ} \cdot 22e^{j67^\circ} = 110 + j190 - 110e^{j120^\circ} = \\ &= 110 + j190 + 55 - j95 = 165 + j95 = 190 e^{j30^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда  $\dot{I}_{ab} = \frac{190e^{j30^\circ}}{20e^{j90^\circ}} = 9,5e^{-j60^\circ} \text{ А}$ ,  $\dot{I}_{bc} = -\dot{I}_{ab} = 9,5e^{j120^\circ} \text{ А}$ .

Ток  $\dot{I}_{ca}$  найдем по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{ca} &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_A = 9,5e^{-j60^\circ} - 22e^{-j113^\circ} = \\ &= 4,75 - j8,23 + 8,6 + j20,25 = 13,35 + j12 = 17,95e^{j42^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Вычислим показания ваттметров:

$$P_{W_1} = \operatorname{Re}(\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^*) = \operatorname{Re}(220 \cdot 22e^{j113^\circ}) = -1891 \text{ Вт},$$

$$\begin{aligned} P_{W_2} &= \operatorname{Re}(\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*) = \operatorname{Re}(220e^{j60^\circ} \cdot 22e^{-j67^\circ}) = \\ &= \operatorname{Re}(4840e^{-j7^\circ}) = 4804 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 28

Вычислить ток  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.111](#), если  $\dot{U}_{AB} = 100 \text{ В}$ ,  $X_L = R = 10 \text{ Ом}$ .

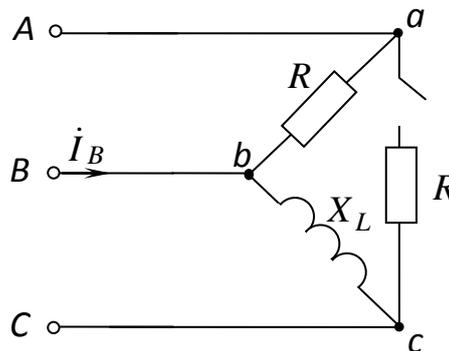


Рис. 3.111

Ответ:  $\dot{I}_B = 19,3e^{j165^\circ} \text{ А}$ .

**Задача 29**

Вычислить токи  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.112](#), если  $\dot{U}_{AB} = 100$  В,  $X_L = 20$  Ом,  $R = 10$  Ом.

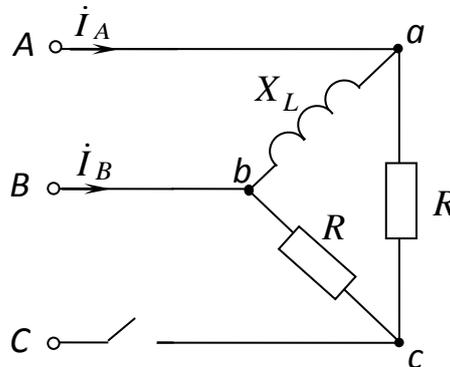


Рис. 3.112

Ответ:  $\dot{I}_A = 7,07 e^{-j45^\circ}$  А,  $\dot{I}_B = 7,07 e^{j135^\circ}$  А.

**Задача 30**

Найти значения тока  $\dot{I}_B$  в схеме [рис. 3.113](#), если  $\dot{U}_{AB} = 100$  В,  $R = X_C = 10$  Ом,  $X_L = 5$  Ом.

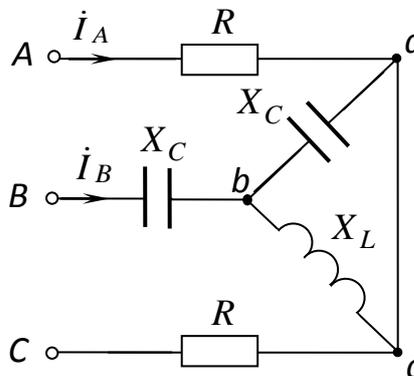


Рис. 3.113

Ответ:  $\dot{I}_B = 17,3 e^{-j150^\circ}$  А.

[Задачи 31–33](#) решите для самоконтроля.

**Задача 31**

Вычислить линейные токи в схеме [рис. 3.114](#), если  $\dot{U}_{AB} = 220$  В,  $R = X_L = 10$  Ом. Построить векторно-топографическую диаграмму.

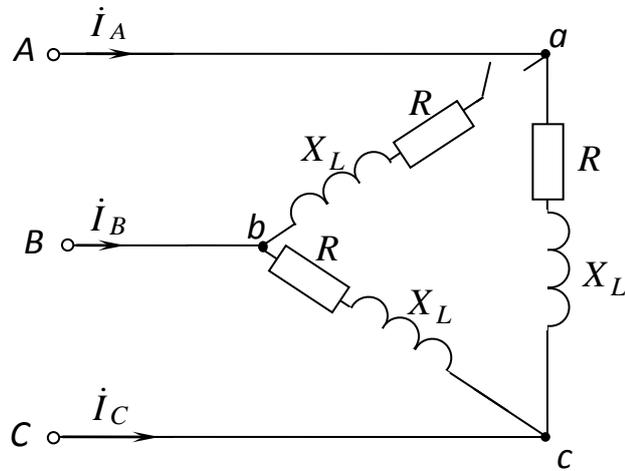


Рис. 3.114

Ответ:  $I_A = 15,6e^{-j105^\circ}$  А,  $I_B = 15,6e^{-j165^\circ}$  А,  $I_C = 26,9e^{j45^\circ}$  А.

### Задача 32

Определить значения токов  $I_A$  и  $I_B$  в схеме [рис. 3.115](#), если  $\dot{U}_{AB} = 100$  В,  $X_C = 20$  Ом,  $R = 10$  Ом. Построить векторно-топографическую диаграмму.

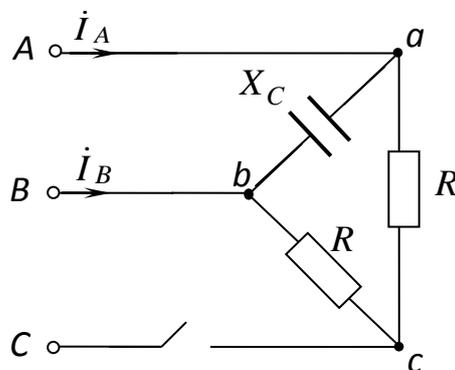


Рис. 3.115

Ответ:  $I_A = 7,07e^{j45^\circ}$  А,  $I_B = 7,07e^{-j135^\circ}$  А.

### Задача 33

Вычислить ток  $I_C$  в схеме [рис. 3.116](#), если  $\dot{U}_{BC} = 100$  В,  $X_L = 10$  Ом,  $R = 20$  Ом. Построить векторно-топографическую диаграмму.

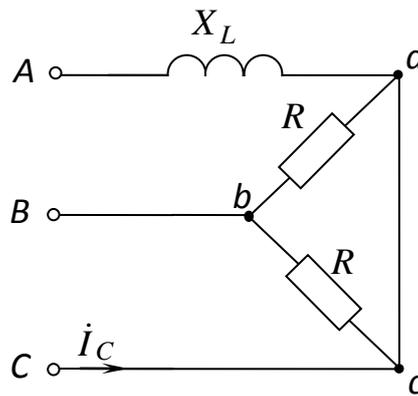


Рис. 3.116

Ответ:  $\dot{I}_C = 19,3e^{j165^\circ}$  А.

## Тема 2 Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС

**При статической нагрузке (отсутствии электродвигателей) расчет ничего принципиально нового не содержит.**

Потребителю доступны для измерения линейные напряжения. Однако известные из предыдущей темы соотношения между линейными и фазными напряжениями генератора не выполняются.

Если фазы приемника соединены треугольником, алгоритм расчета тот же, что и при действии симметричной системы ЭДС.

При соединении фаз приемника звездой метод напряжения между двумя узлами не пригоден, если фазные напряжения генератора не заданы. При расчете нужно использовать законы Ома и Кирхгофа.

Для расчета цепей, содержащих трехфазные электродвигатели, используют метод симметричных составляющих.

Занятие 1

Цели занятия:

1. Научиться раскладывать несимметричную систему трех векторов на симметричные составляющие.
2. Ознакомиться с основными свойствами трехфазных цепей в отношении симметричных составляющих.
3. Научиться рассчитывать цепи методом симметричных составляющих.

Метод основан на представлении любой многофазной несимметричной системы в виде суммы симметричных систем величин, число которых равно числу фаз. Эти симметричные системы называют симметричными составляющими. Они отличаются друг от друга порядком чередования фаз. В симметричных системах величины равны по модулю.

Трехфазную несимметричную систему векторов можно разложить на три симметричные составляющие: прямой (рис. 3.117, а), обратной (рис. 3.117, б) и нулевой (рис. 3.117, в) последовательности чередования фаз.

При прямой последовательности чередования фаз  $\dot{B}_1 = a^2 \dot{A}_1$ ,  $\dot{C}_1 = a \dot{A}_1$ .

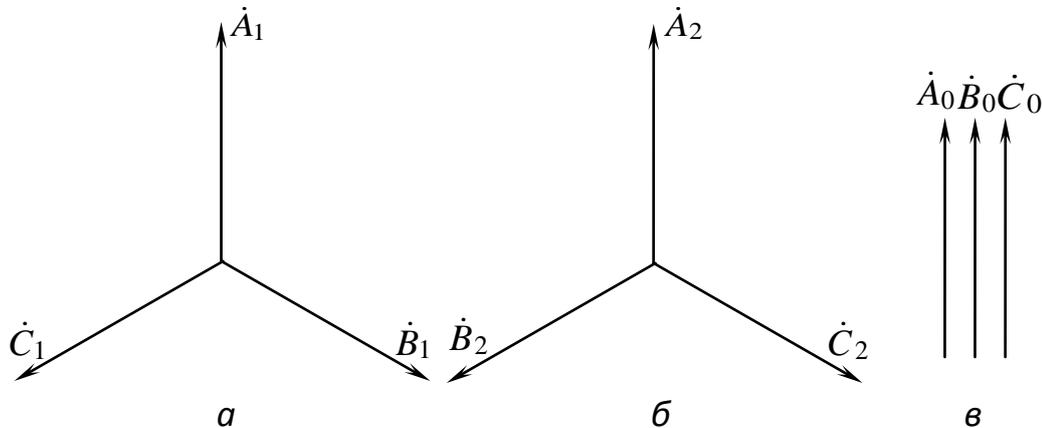


Рис. 3.117

При обратной последовательности чередования фаз  $\dot{B}_2 = a \dot{A}_2$ ,  $\dot{C}_2 = a^2 \dot{A}_2$ .

При нулевой последовательности чередования фаз  $\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0$ .

Результирующая несимметричная составляющая векторов определяется суммой соответствующих векторов симметричных составляющих:

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0;$$

$$\dot{B} = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0 = a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2 + \dot{A}_0;$$

$$\dot{C} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0 = a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2 + \dot{A}_0.$$

Очевидно, что для разложения несимметричной системы трех векторов на симметричные составляющие достаточно найти векторы  $\dot{A}_1$ ,  $\dot{A}_2$  и  $\dot{A}_0$ . Их определяют по формулам:

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a \dot{B} + a^2 \dot{C});$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a^2 \dot{B} + a \dot{C});$$

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}).$$

Принципиальные особенности расчета цепей с несимметричной системой ЭДС связаны с нулевой последовательностью чередования фаз и заключаются в следующем:

1. Линейные напряжения не содержат нулевой последовательности чередования фаз.
2. При соединении звездой четырехпроводной ток в нейтральном проводе образуют составляющие нулевой последовательности чередования фаз.
3. При соединении фаз обмоток генератора треугольником в контуре возникает ток за счет составляющих нулевой последовательности чередования фаз.
4. При соединении фаз приемника звездой трехпроводной линейные токи не содержат составляющих нулевой последовательности чередования фаз.
5. При соединении фаз приемника звездой трехпроводной и симметричном приемнике фазные напряжения не содержат составляющих нулевой последовательности чередования фаз.
6. При соединении фаз приемника звездой трехпроводной при симметричной нагрузке возникает напряжение смещения нейтрали за счет составляющих нулевой последовательности чередования фаз.

Кроме того, следует отметить, что у электродвигателей сопротивления токам разных последовательностей чередования фаз существенно отличаются друг от друга.

Трехфазные двигатели являются симметричными приемниками.

Расчет при действии несимметричной системы ЭДС проводят методом наложения.

При соединении фаз звездой четырехпроводной схему делят на три подсхемы, в которых действуют симметричные составляющие ЭДС прямой, обратной и нулевой последовательностей чередования фаз.

При симметричном приемнике напряжение смещения нейтрали в первой и второй подсхемах не возникает, напряжения на фазах приемника равны соответственно напряжениям на фазах генератора.

В первой подсхеме с прямой последовательностью чередования фаз токи по величине равны.

С учетом фазовых соотношений можно записать следующее:

$$\dot{I}_{A_1} = \frac{\dot{U}_{A_1}}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_{B_1} = a^2 \dot{I}_{A_1}; \quad \dot{I}_{C_1} = a \dot{I}_{A_1};$$

$$\dot{I}_{nN_1} = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{C_1} = (1 + a^2 + a)\dot{I}_{A_1} = 0.$$

Сопротивление токам прямой последовательности чередования фаз

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}_{A_1}}{\dot{I}_{A_1}} = \frac{\dot{U}_{B_1}}{\dot{I}_{B_1}} = \frac{\dot{U}_{C_1}}{\dot{I}_{C_1}}.$$

В подсхеме с обратной последовательностью чередования фаз расчет токов производят по формулам:

$$\dot{I}_{A_2} = \frac{\dot{U}_{A_2}}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_{B_2} = a \dot{I}_{A_2}; \quad \dot{I}_{C_2} = a^2 \dot{I}_{A_2};$$

$$\dot{I}_{nN_2} = \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{B_2} + \dot{I}_{C_2} = (1 + a + a^2) \dot{I}_{A_2} = 0.$$

Сопротивление токам обратной последовательности чередования фаз

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_{A_2}}{\dot{I}_{A_2}} = \frac{\dot{U}_{B_2}}{\dot{I}_{B_2}} = \frac{\dot{U}_{C_2}}{\dot{I}_{C_2}}.$$

При статической нагрузке  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}$ . При динамической нагрузке обычно  $\underline{Z}_2 < \underline{Z}_1$ .

В третьей подсхеме действует система ЭДС нулевой последовательности чередования фаз. Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{nN_0} = \dot{I}_{A_0} + \dot{I}_{B_0} + \dot{I}_{C_0} = 3\dot{I}_{A_0}.$$

Если сопротивлением нейтрального провода не пренебрегают, то напряжение  $\dot{U}_{A_0} = \underline{Z}_{nN} \cdot 3\dot{I}_{A_0} + \underline{Z}_a \dot{I}_{A_0}$ .

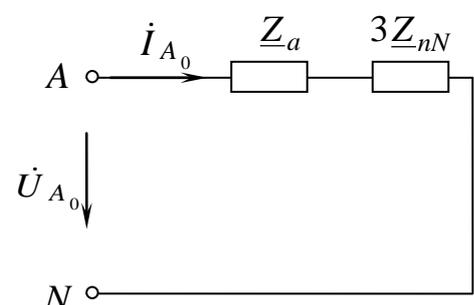
Отсюда ток  $\dot{I}_{A_0} = \frac{\dot{U}_{A_0}}{3\underline{Z}_{nN} + \underline{Z}_a}$ .

Сопротивление токам нулевой последовательности чередования фаз

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_a + 3\underline{Z}_{nN}.$$

Этим формулам соответствует схема однофазного эквивалента, представленная на рис. 3.118.

Токи в исходной схеме находят суммированием токов подсхем:



$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{B_2} + \dot{I}_{B_0}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{C_1} + \dot{I}_{C_2} + \dot{I}_{C_0}. \end{aligned}$$

При соединении фаз звездой трехпроводной токи нулевой последовательности чередования фаз отсутствуют, поэтому в расчете участвуют только подсистемы с прямой и обратной последовательностями чередования фаз.

Рассмотрим целевые задачи на конкретных примерах.

#### *Задача 1*

Разложить несимметричную систему фазных напряжений  $\dot{U}_A = 100e^{-j30^\circ}$  В,  $\dot{U}_B = -150$  В,  $\dot{U}_C = 75e^{j60^\circ}$  В на симметричные составляющие. Найти симметричные составляющие линейных напряжений.

#### *Решение*

1. Вычислим составляющую напряжения  $\dot{U}_{A_1}$  прямой последовательности чередования фаз:

$$\dot{U}_{A_1} = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) =$$

$$= \frac{1}{3}(100e^{-j30^\circ} - e^{j120^\circ} \cdot 150 + e^{-j120^\circ} \cdot 75e^{j60^\circ}) = 105e^{-j51^\circ} \text{ В.}$$

Тогда  $\dot{U}_{B_1} = a^2\dot{U}_{A_1} = 105e^{-j171^\circ}$  В;  $\dot{U}_{C_1} = a\dot{U}_{A_1} = 105e^{j69^\circ}$  В.

Топографическая диаграмма приведена на рис. 3.119.

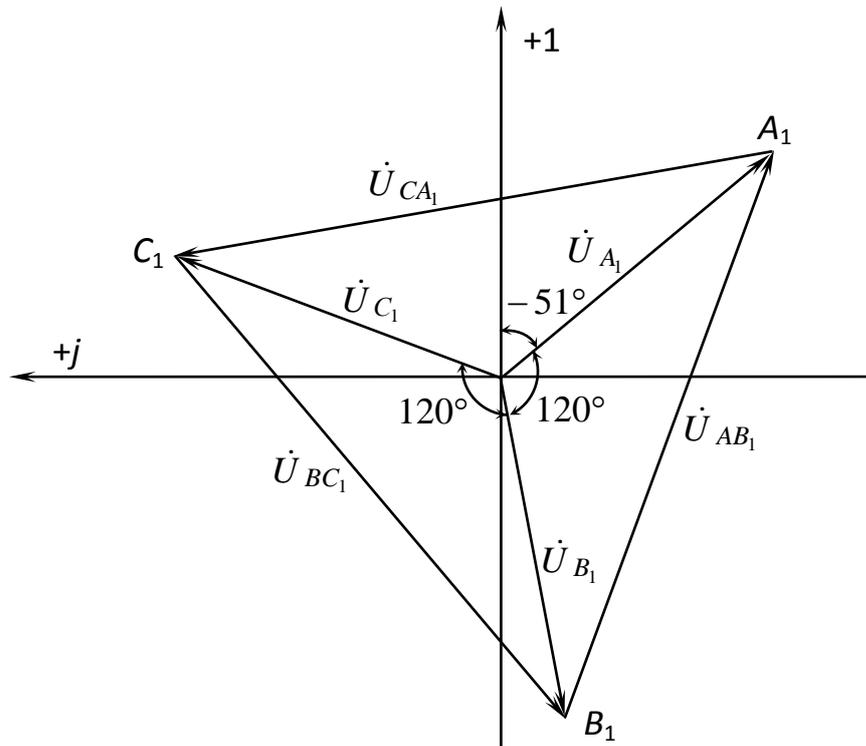


Рис. 3.119

Симметричная составляющая линейного напряжения

$$\dot{U}_{AB_1} = \sqrt{3}\dot{U}_{A_1} e^{j30^\circ} = 105\sqrt{3}e^{-j21^\circ} = 182e^{-j21^\circ} \text{ В.}$$

Очевидно, что  $\dot{U}_{BC_1} = a^2\dot{U}_{AB_1} = 182e^{-j141^\circ}$  В, а  $\dot{U}_{CA_1} = a\dot{U}_{AB_1} = 182e^{j99^\circ}$  В.

2. Определим составляющую напряжения  $\dot{U}_{A_2}$  обратной последовательности чередования фаз:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A_2} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3}(100e^{-j30^\circ} - e^{-j120^\circ} \cdot 150 + e^{j120^\circ} \cdot 75e^{j60^\circ}) = 39e^{j43^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда  $\dot{U}_{B_2} = a\dot{U}_{A_2} = 39e^{j163^\circ}$  В,

$$\dot{U}_{C_2} = a^2\dot{U}_{A_2} = 39e^{-j77^\circ} \text{ В.}$$

Топографическая диаграмма приведена на рис. 3.120.

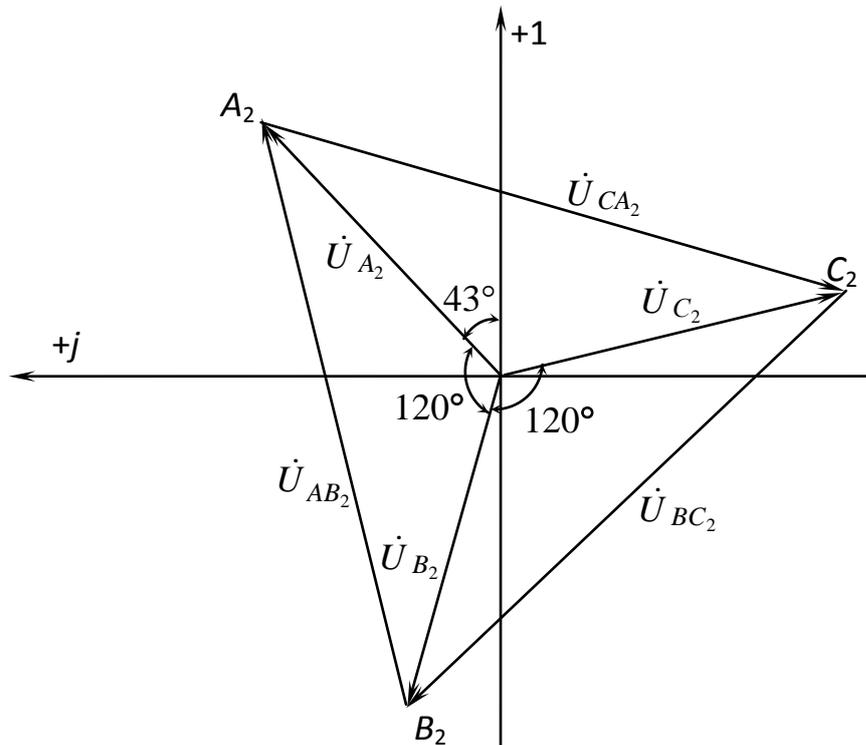


Рис. 3.120

Как видно из диаграммы, составляющая линейного напряжения обратной последовательности чередования фаз  $\dot{U}_{AB_2} = \sqrt{3}\dot{U}_{A_2} e^{-j30^\circ} =$   
 $= \sqrt{3} \cdot 39 e^{j43^\circ} \cdot e^{-j30^\circ} = 67,5 e^{j13^\circ} \text{ В.}$

Тогда  $\dot{U}_{BC_2} = a\dot{U}_{AB_2} = 67,5 e^{j133^\circ} \text{ В; } \dot{U}_{CA_2} = a^2\dot{U}_{AB_2} = 67,5 e^{-j107^\circ} \text{ В.}$

3. Найдем симметричную составляющую фазного напряжения нулевой последовательности чередования фаз:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A_0} = \dot{U}_{B_0} = \dot{U}_{C_0} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = \frac{1}{3}(100e^{-j30^\circ} - 150 + 75e^{j60^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}(86,5 - j50 - 150 + 37,5 + j65) = \frac{1}{3}(-26 + j15) = \frac{1}{3} \cdot 30e^{j150^\circ} = 10e^{j150^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Очевидно, что составляющая линейного напряжения нулевой последовательности чередования фаз равна нулю, так как линейное напряжение равно геометрической разности фазных напряжений.

*Задача 2*

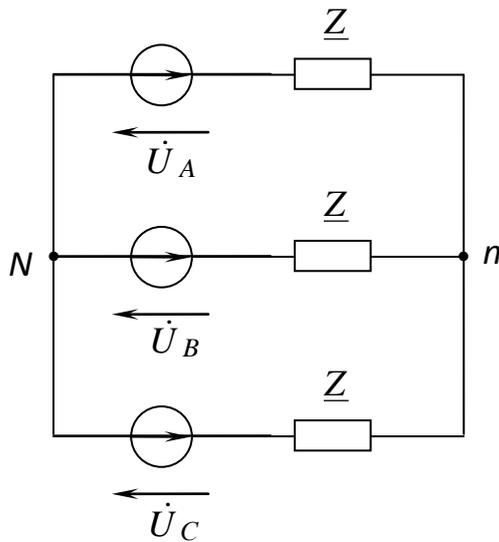


Рис. 3.121

Вычислить токи в фазах асинхронного двигателя при действии несимметричной системы ЭДС (рис. 3.121), если  $\dot{U}_A = 330$  В,  $\dot{U}_B = -j156$  В,  $\dot{U}_C = j156$  В,  $\underline{Z}_1 = (3,6 + j3,6)$  Ом,  $\underline{Z}_2 = (0,15 + j0,5)$  Ом.

**Решение**

1. Разложим систему несимметричных ЭДС на симметричные составляющие. Схема представляет собой соединение звездой трехпроводной, поэтому токи не содержат нулевой составляющей.

Следовательно, и составляющие нулевой последовательности чередования фаз напряжения при расчете не требуются.

Симметричная составляющая напряжения прямой последовательности чередования фаз

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A_1} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3}[330 + e^{j120^\circ} \cdot (-j156) + e^{-j120^\circ} (j156)] = \\ &= \frac{1}{3}(330 + 270) = 200 \text{ В.} \end{aligned}$$

Симметричная составляющая напряжения обратной последовательности чередования фаз

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A_2} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \frac{1}{3}[330 + e^{-j120^\circ} (-j156) + e^{j120^\circ} (j156)] = \\ &= \frac{1}{3}(330 - 270) = 20 \text{ В.} \end{aligned}$$

2. Решим задачу методом наложения. Разделим схему на две подсхемы: с прямой и обратной последовательностями чередования фаз. Приемник является симметричным, поэтому напряжение смещения нейтрали

в подсхемах не возникает и напряжения на фазах приемника равны соответствующим напряжениям на фазах генератора.

Составляющие токов симметричных составляющих вычислим по закону Ома:

$$\dot{i}_{A_1} = \frac{\dot{U}_{A_1}}{\underline{Z}_1} = \frac{200}{3,6 + j3,6} = \frac{200}{5,05e^{j45^\circ}} = 39,3e^{-j45^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_{A_2} = \frac{\dot{U}_{A_2}}{\underline{Z}_2} = \frac{20}{0,15 + j0,5} = \frac{20}{0,52e^{j73^\circ}} = 38,3e^{-j73^\circ} \text{ А}.$$

3. Найдем комплексные значения токов в исходной схеме:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} = 39,3e^{-j45^\circ} + 38,3e^{-j73^\circ} = 75,5e^{-j59^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{B_2} = a^2 \dot{I}_{A_1} + a \dot{I}_{A_2} = 21,2e^{j123^\circ 30'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C_1} + \dot{I}_{C_2} = a \dot{I}_{A_1} + a^2 \dot{I}_{A_2} = 54,1e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

Токи в фазах:  $I_A = 75,5 \text{ А}$ ;  $I_B = 21,2 \text{ А}$ ;  $I_C = 54,1 \text{ А}$ .

Следующие задачи решите самостоятельно.

#### Задача 3

Вычислить комплексное значение тока  $\dot{I}_C$ , если симметричные составляющие тока фазы А:  $\dot{I}_{A_1} = -j10 \text{ А}$ ,  $\dot{I}_{A_2} = 5e^{-j30^\circ} \text{ А}$ ,  $\dot{I}_{A_0} = j5 \text{ А}$ .

*Ответ:*  $\dot{I}_C = 8,7e^{j62^\circ} \text{ А}$ .

#### Задача 4

Вычислить комплексное значение сопротивления токам обратной последовательности чередования фаз  $\underline{Z}_2$ , если  $\dot{U}_{C_2} = 100e^{-j50^\circ} \text{ В}$ ,  $\dot{I}_{A_2} = 14,1e^{j40^\circ} \text{ А}$ .

*Ответ:*  $\underline{Z}_2 = 7,1e^{j30^\circ} \text{ Ом}$ .

#### Задача 5

Вычислить симметричную составляющую тока нулевой последовательности чередования фаз  $I_{A_0}$ , если ток в нейтральном проводе  $I_{nN} = 6 \text{ А}$ .

*Ответ:*  $I_{A_0} = 2 \text{ А}$ .

# ГЛАВА 4

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### Тема 1

#### Однофазные цепи несинусоидального тока

##### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться рассчитывать мгновенные значения токов и напряжений.
2. Научиться определять показания электроизмерительных приборов.

Несинусоидальную периодическую функцию, подчиняющуюся условию Дирихле, можно разложить в ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots,$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая ряда;  $A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$  – гармоническая составляющая, меняющаяся с частотой  $k\omega$ .

Источник несинусоидальной ЭДС представляют как ряд последовательно соединенных источников ЭДС, источник несинусоидального тока – как ряд параллельно соединенных источников тока с разной частотой.

При расчете применяют метод наложения. Рационально разбить схему на столько подсхем, сколько частот получается при разложении в ряд Фурье несинусоидальных ЭДС и токов. Подсхемы отличаются друг от друга не только источниками энергии, но и величинами реактивных сопротивлений, которые зависят от частоты:

$$X_{kL} = kL\omega \text{ и } X_{kC} = \frac{1}{kC\omega}.$$

Мгновенные значения токов и напряжений в схеме получают суммированием соответствующих мгновенных значений в подсхемах. Действующие значения токов, напряжений и ЭДС определяют через соответствующие действующие значения в подсхемах по формулам:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots};$$
$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots};$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_k^2 + \dots}$$

Приборы электромагнитной и электродинамической систем показывают действующие значения несинусоидальных периодических электрических величин, магнитоэлектрической системы – постоянную составляющую, магнитоэлектрической с выпрямителем – среднее по модулю значение.

Рассмотрим целевые задачи на конкретных примерах.

#### Задача 1

Найти законы изменения токов  $i_1$  и  $i_2$  в цепи, схема замещения которой представлена на рис. 4.1, если  $i = 10\sqrt{2} \sin \omega t + 10\sqrt{2} \sin 3\omega t$  А,  $R = 8$  Ом,  $L\omega = 4$  Ом,  $\frac{1}{C\omega} = 12$  Ом.

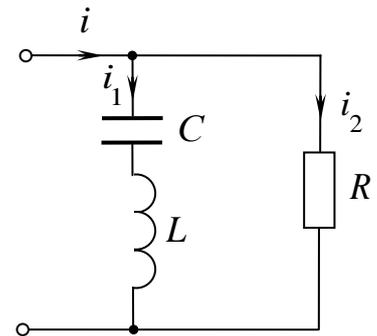


Рис. 4.1

#### Решение

1. Разделим схему на две подсхемы с частотами  $\omega$  и  $3\omega$ .

2. Вычислим искомые величины в первой подсхеме с частотой  $\omega$ . Рационально сделать расчет для комплексов максимальных значений токов, воспользовавшись формулой для определения тока в одной из двух пассивных параллельных ветвей:

$$i'_{1m} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} i'_m = \frac{8}{8 - j8} \cdot 10\sqrt{2} = \frac{80\sqrt{2}}{11,3e^{-j45^\circ}} = 10e^{j45^\circ} \text{ А};$$

$$i'_{2m} = \frac{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} i'_m = \frac{-j8}{11,3e^{-j45^\circ}} \cdot 10\sqrt{2} = \frac{80\sqrt{2}e^{-j90^\circ}}{11,3e^{-j45^\circ}} = 10e^{-j45^\circ} \text{ А}.$$

Мгновенные значения токов  $i'_1$  и  $i'_2$  меняются по следующим законам:

$$i'_1 = 10 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А};$$

$$i'_2 = 10 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ А}.$$

3. Аналогично вычислим искомые величины во второй подсхеме с частотой  $3\omega$ :

$$\dot{I}_{1m}'' = \frac{R}{R + j\left(3L\omega - \frac{1}{3C\omega}\right)} \dot{I}_m'' = \frac{8}{8 + j8} \cdot 10\sqrt{2} = 10e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_{2m}'' = \frac{j\left(3L\omega - \frac{1}{3C\omega}\right)}{R + j\left(3L\omega - \frac{1}{3C\omega}\right)} \dot{I}_m'' = \frac{j8}{8 + j8} \cdot 10\sqrt{2} = \frac{80\sqrt{2}e^{+j90^\circ}}{11,3e^{j45^\circ}} = 10e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов  $i_1''$  и  $i_2''$  меняются по следующим законам:

$$i_1'' = 10\sin(3\omega t - 45^\circ) \text{ А;}$$

$$i_2'' = 10\sin(3\omega t + 45^\circ) \text{ А.}$$

4. Мгновенные значения токов в схеме представим в виде рядов Фурье:

$$i_1 = i_1' + i_1'' = 10\sin(\omega t + 45^\circ) + 10\sin(3\omega t - 45^\circ) \text{ А;}$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = 10\sin(\omega t - 45^\circ) + 10\sin(3\omega t + 45^\circ) \text{ А.}$$

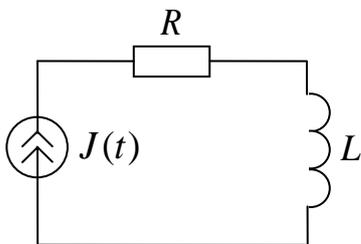


Рис. 4.2

#### Задача 2

Найти закон изменения напряжения на зажимах источника тока (рис. 4.2), если  $J(t) = 2\sin\omega t + \sin 3\omega t$  А,  $R = 12$  Ом,  $L\omega = 12$  Ом.

#### Решение

1. Разделим схему на две подсхемы с частотами  $\omega$  и  $3\omega$ .

2. Найдем комплекс максимального значения искомого напряжения по закону Ома в первой подсхеме с частотой  $\omega$ :

$$\dot{U}'_m = \underline{Z}' \cdot \dot{J}_{1m} = (R + jL\omega)\dot{J}_{1m} = (12 + j12) \cdot 2 = 16,97e^{j45^\circ} \cdot 2 \approx 34e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

Закон изменения мгновенного значения  $u'$ :

$$u' = 34\sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В.}$$

3. Аналогично найдем комплекс максимального значения искомого напряжения во второй подсхеме с частотой  $3\omega$ :

$$\dot{U}_m'' = \underline{Z}'' \dot{J}_{3m} = (R + j3L\omega) \dot{J}_{3m} = (12 + j36) \cdot 1 = 37,9 e^{j71,56^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение  $u_m''$  меняется по закону

$$u'' = 37,9 \sin(3\omega t + 71,56^\circ) \text{ В.}$$

4. Запишем закон изменения напряжения на зажимах источника тока:

$$u = u' + u'' = 34 \sin(\omega t + 45^\circ) + 37,9 \sin(3\omega t + 71,56^\circ) \text{ В.}$$

### Задача 3

Найти закон изменения напряжения  $u_C$  в схеме рис. 4.3, если  $u = 200 + 250\sqrt{2} \sin \omega t$  В,  $R = 3$  Ом,  $\frac{1}{C\omega} = 4$  Ом.

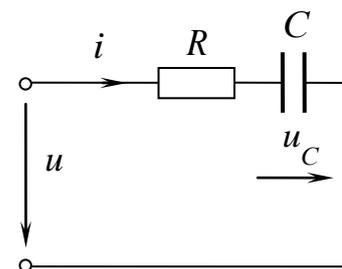


Рис. 4.3

Решение

1. Разделим схему на две подсхемы с частотами 0 и  $\omega$ .

В первой подсхеме ток равен нулю, так как  $X_{C_0} = \infty$ .

Тогда напряжение  $u'_C$  равно входному:  $u'_C = 200$  В.

2. Во второй подсхеме вычислим комплекс максимального значения напряжения на емкостном элементе по закону Ома:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Cm}'' &= -j \frac{1}{C\omega} \cdot \dot{I}_m'' = -j \frac{1}{C\omega} \cdot \frac{\dot{U}_m''}{R - j \frac{1}{C\omega}} = -j 4 \frac{250\sqrt{2}}{3 - j4} = \\ &= 4 e^{-j90^\circ} \frac{250\sqrt{2}}{5 e^{-j53^\circ}} = 200\sqrt{2} e^{-j37^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда  $u_C'' = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 37^\circ)$  В.

3. Запишем закон изменения напряжения  $u_C$  в исходной схеме:

$$u_C = 200 + 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 37^\circ) \text{ В.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

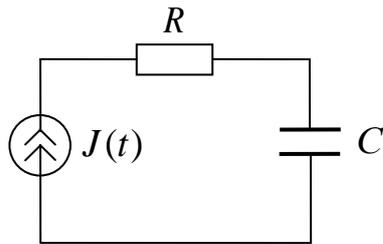


Рис. 4.4

Задача 4

Найти закон изменения напряжения на зажимах источника тока (рис. 4.4), если  $J(t) = 2\sin \omega t + 1\sin 3\omega t$  А,  $R = 12$  Ом,  $\frac{1}{C\omega} = 12$  Ом.

Ответ:  $u = 34\sin(\omega t - 45^\circ) + 12,6\sin(3\omega t - 18,43^\circ)$  В.

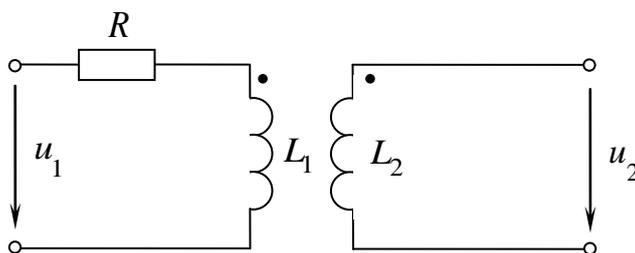


Рис. 4.5

Задача 5

Найти закон изменения напряжения  $u_2$  (рис. 4.5), если  $u_1 = 30 + 50\sqrt{2}\sin \omega t$  В,  $R = 30$  Ом,  $M\omega = 20$  Ом,  $L_1\omega = L_2\omega = 40$  Ом.

Пояснение к решению

Закон изменения

напряжения  $u_2 = M \frac{di_1}{dt}$ , поэтому постоянной составляющей оно содержать не будет.

Ответ:  $u_2 = 28\sin(\omega t + 37^\circ)$  В.

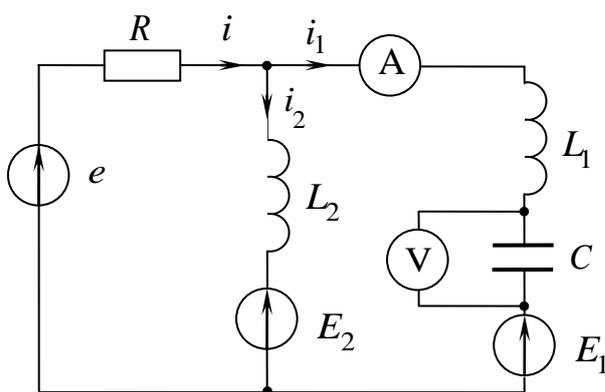


Рис. 4.6

Задача 6

Вычислить мгновенные значения токов во всех ветвях и показания приборов электромагнитной системы в схеме рис. 4.6, если  $E_1 = 40$  В,  $E_2 = 30$  В,  $e = 60 + 30\sin(\omega t + 60^\circ) + 60\sin(2\omega t - 20^\circ)$  В,  $L_1\omega = 10$  Ом,  $L_2\omega = 30$  Ом,  $\frac{1}{C\omega} = 40$  Ом,  $R = 60$  Ом.

Решение

1. Разделим схему на три подсхемы с частотами  $0$ ,  $\omega$  и  $2\omega$ .
2. Вычислим искомые величины в первой подсхеме с частотой, равной  $0$  (рис. 4.7).

Индуктивный элемент сопротивления постоянному току не оказывает ( $X_{L_0} = L \cdot 0 = 0$ ), поэтому в схеме на его месте изображают «закоротку».

Сопротивление емкостного элемента постоянному току

$X_{C_0} = \frac{1}{C \cdot 0} = \infty$ , поэтому в схеме в этом месте будет разрыв.

ЭДС  $E_0 = 60$  В – постоянная составляющая разложенной в ряд Фурье несинусоидальной ЭДС  $e$ .

Подсхема получилась одноконтурной с током  $i' = i_2' = \frac{E_0 - E_2}{R} = \frac{60 - 30}{60} = 0,5$  А. Ток  $i_1' = 0$ .

Показания амперметра  $I_A' = 0$ .

Показания вольтметра определяем как разность потенциалов:

$$U_V' = -E_1 + E_2 = -10 \text{ В.}$$

3. Вычислим требуемые по условию величины во второй подсхеме с частотой  $\omega$  (рис. 4.8).

ЭДС  $e_1$  – первая гармоника разложенной в ряд Фурье несинусоидальной ЭДС  $e$ . В подсхеме один источник энергии, поэтому рационально сделать расчет методом эквивалентных преобразований для комплексов максимальных значений.

Комплексное сопротивление ветви с током  $i_1''$

$$\underline{Z}_1'' = jL_1\omega - j\frac{1}{C\omega} = j10 - j40 = -j30 \text{ Ом.}$$

Комплексное сопротивление ветви с током  $i_2''$

$$\underline{Z}_2'' = jL_2\omega = j30 \text{ Ом.}$$

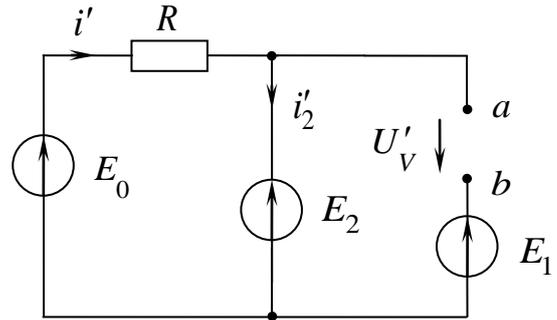


Рис. 4.7

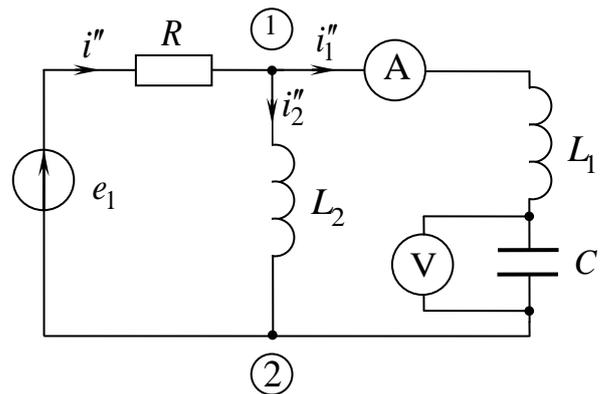


Рис. 4.8

### Комплексное сопротивление параллельного участка

$$\underline{Z}_{12}'' = \frac{\underline{Z}_1'' \cdot \underline{Z}_2''}{\underline{Z}_1'' + \underline{Z}_2''} = \frac{-j30 \cdot j30}{-j30 + j30} = \infty.$$

Ток  $i'' = 0$ . В подсхеме наблюдается режим резонанса токов. Ток  $i_2'' = -i_1''$ .

Падения напряжения на резисторе нет, поэтому

$$\dot{U}_{12m}'' = \dot{E}_{1m} = 30e^{j60^\circ} \text{ В.}$$

### Комплекс максимального значения тока

$$\dot{i}_{2m}'' = \frac{\dot{U}_{12m}''}{\underline{Z}_2''} = \frac{30e^{j60^\circ}}{j30} = \frac{30e^{j60^\circ}}{30e^{j90^\circ}} = 1e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока  $i_2'' = 1\sin(\omega t - 30^\circ)$  А. Мгновенное значение тока  $i_1'' = -i_2'' = 1\sin(\omega t + 150^\circ)$  А.

Амперметр показывает действующее значение тока

$$I_1'' = \frac{I_{1m}''}{\sqrt{2}} = 0,7 \text{ А.}$$

### Показания вольтметра определим по формуле

$$U_V'' = \frac{1}{C\omega} \cdot I_1'' = 40 \cdot 0,7 = 28 \text{ В.}$$

4. Вычислим требуемые величины в третьей подсхеме с частотой  $2\omega$ . Ее графическое изображение не отличается от второй подсхемы (рис. 4.8). Вместо ЭДС  $e_1$  действует  $e_2$  – вторая гармоника разложенной в ряд Фурье несинусоидальной ЭДС. Значения реактивных сопротивлений изменятся.

Комплексное сопротивление первой ветви

$$\underline{Z}_1''' = j\left(2L_1\omega - \frac{1}{2C\omega}\right) = j(20 - 20) = 0.$$

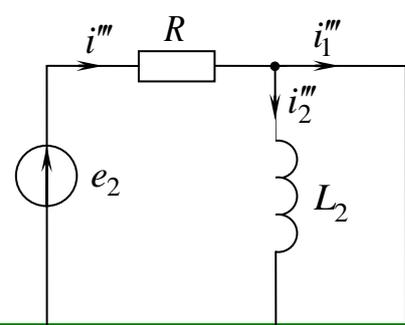


Рис. 4.9

Подсхему можно изобразить в виде, представленном на рис. 4.9.

Ветвь с током  $i_2'''$  закорочена, поэтому ток  $i_2''' = 0$ . В подсхеме один ток

$$i''' = i_1''' . \text{ Комплекс максимального значения } \dot{I}_m''' = \frac{\dot{E}_{2m}}{R} = \frac{60e^{-j20^\circ}}{60} = 1e^{-j20^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока

$$i''' = i_1''' = 1\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А.}$$

**Амперметр показывает ток**

$$I_A''' = \frac{I_{1m}'''}{\sqrt{2}} = 0,7 \text{ А.}$$

Вычислим показания вольтметра:

$$U_V''' = \frac{1}{2C\omega} \cdot I_1''' = 20 \cdot 0,7 = 14 \text{ В.}$$

4. Определим требуемые по условию величины в схеме.

Мгновенные значения токов:

$$i = i' + i''' = 0,5 + 1\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А;}$$

$$i_1 = i_1'' + i_1''' = 1\sin(\omega t + 150^\circ) + 1\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А;}$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = 0,5 + 1\sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А.}$$

**Амперметр показывает ток**

$$I_A = \sqrt{(I_A'')^2 + (I_A''')^2} = \sqrt{0,7^2 + 0,7^2} = 1 \text{ А.}$$

**Вольтметр показывает напряжение**

$$U_V = \sqrt{(U_V')^2 + (U_V'')^2 + (U_V''')^2} = \sqrt{10^2 + 28^2 + 14^2} = 33 \text{ В.}$$

### Задача 7

Вычислить показания вольтметра магнитоэлектрической системы  $U_{V_1}$  (рис. 4.10), если вольтметры электромагнитной системы показывают напряжения  $U_{V_2} = 80$  В,  $U_{V_3} = 40$  В. Коэффициент трансформации  $K = 1$ .

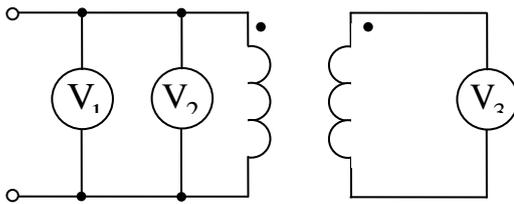


Рис. 4.10

#### Решение

Показания вольтметра  $V_2$  включают как постоянную, так и все гармонические составляющие:  $U_{V_2} = \sqrt{U_0^2 + \sum U_k^2}$ . Показания вольтметра  $V_3$  содержат только гармонические составляющие, так как постоянное напряжение не трансформируется:  $U_{V_3} = \sqrt{\sum U_k^2}$ . Вольтметр магнитоэлектрической системы  $V_1$  показывает только постоянную составляющую напряжения, поэтому

$$U_{V_1} = \sqrt{U_{V_2}^2 - U_{V_3}^2} = \sqrt{80^2 - 40^2} = 69 \text{ В.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

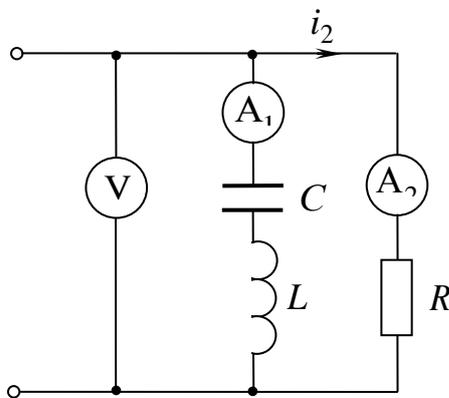


Рис. 4.11

### Задача 8

Определить показания приборов электромагнитной системы в схеме рис. 4.11, если  $i_2 = 10 + 10\sin \omega t + 10\sin 2\omega t$  А,  $R = 12$  Ом,  $L\omega = 6$  Ом,  $\frac{1}{C\omega} = 12$  Ом.

Ответ:  $U_V = 169,7$  В,  $I_1 = 20$  А,  $I_2 = 14,14$  А.

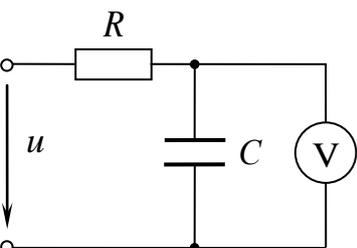


Рис. 4.12

### Задача 9

Определить показания вольтметра магнитоэлектрической системы (рис. 4.12), если  $u = 100 + 141\sin 100t$  В,  $R = 100$  Ом,  $C = 100$  мкФ.

Ответ:  $U_V = 100$  В.

Для самоконтроля решите задачи 10–13.

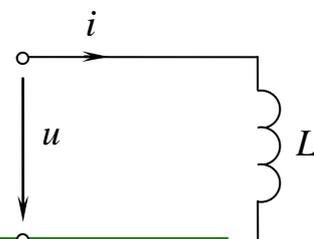


Рис. 4.13

Задача 10

Вычислить  $I_{2m}$  в схеме рис. 4.13, если

$$u = 100\sin(\omega t + \psi_1) + 40\sin(2\omega t + \psi_2) \text{ В}, I_{1m} = 50 \text{ А}.$$

Ответ:  $I_{2m} = 10 \text{ А}$ .

Задача 11

Вычислить  $X_L = L\omega$  в схеме рис. 4.14,

если  $u = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + 45^\circ)$ ,  $R = \frac{1}{C\omega} = 40$

Ом,  $i = I_{1m}\sin\omega t$ .

Ответ:  $X_L = 80 \text{ Ом}$ .

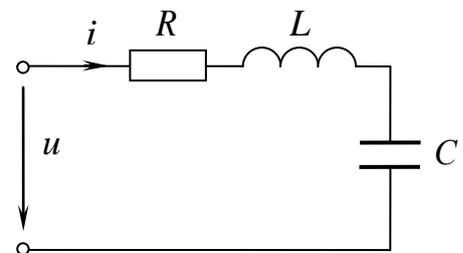


Рис. 4.14

Задача 12

Вычислить значения  $I_1$ ,  $I_3$ ,  $I$  и  $U_R$  в схеме рис. 4.14, если  $R = 60 \text{ Ом}$ ,

$$3L\omega = \frac{1}{3C\omega} = 30 \text{ Ом}, u = 400\sqrt{2}\sin(\omega t + 50^\circ) + 180\sqrt{2}\sin 3\omega t \text{ В}.$$

Ответ:  $I_1 = 4 \text{ А}$ ;  $I_3 = 3 \text{ А}$ ;  $I = 5 \text{ А}$ ;  $U_R = 300 \text{ В}$ .

Задача 13

Вычислить показания приборов магнитоэлектрической ( $A_1$  и  $V_1$ ) и электромагнитной ( $A_2$  и  $V_2$ ) систем (рис. 4.15), если  $R = R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L\omega = 10$

$$\text{Ом}, \frac{1}{C\omega} = 16 \text{ Ом}, u = 50 + 30\sin(\omega t + 45^\circ) + 20\sin(2\omega t - 15^\circ) \text{ В}.$$

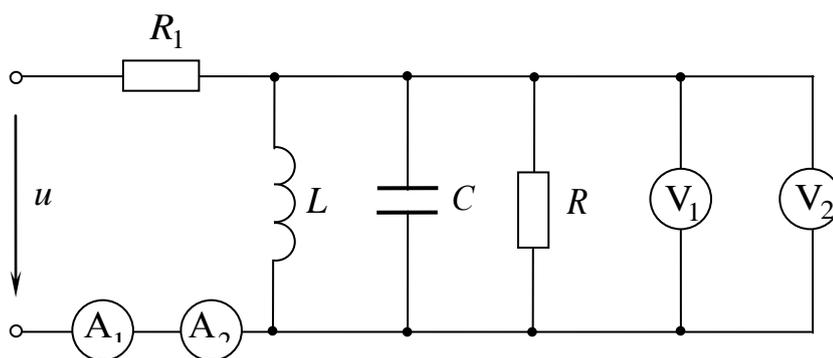


Рис. 4.15

Ответ:  $I_{A_1} = 5 \text{ А}$ ;  $U_{V_1} = 0$ ;  $I_{A_2} = 5,19 \text{ А}$ ;  $U_{V_2} = 12 \text{ В}$ .

Занятие 2

Цели занятия:

1. Научиться определять показания ваттметра в цепях при несинусоидальных периодических воздействиях.

2. Научиться вычислять коэффициент мощности.

3. Ознакомиться с особенностями расчетов мощностей в цепях с несинусоидальными воздействиями.

Активную мощность получают суммированием активных мощностей всех подсхем:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots$$

Реактивную мощность вычисляют суммированием реактивных мощностей подсхем с синусоидальными токами:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k + \dots$$

Полную мощность определяют как произведение действующих значений напряжения и тока в схеме:  $S = U \cdot I$ .

Эти три мощности, в отличие от цепей синусоидального тока, обычно не образуют прямоугольный треугольник:

$$S^2 \geq P^2 + Q^2.$$

Величину  $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$  называют мощностью искажения.

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности и иногда приравнивают к косинусу некоторого условного угла  $\theta$ :

$$\chi = \frac{P}{S} = \cos \theta.$$

Углу  $\theta$  можно дать графическую интерпретацию, пользуясь понятиями эквивалентных синусоид тока и напряжения, действующие значения которых равны действующим значениям несинусоидальных величин. Угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами тока и напряжения будет равен условному углу  $\theta$  в случае, если мощность, вычисляемая по формуле  $P = U_0 I_0 \cos \theta$ , будет равна мощности, потребляемой цепью несинусоидального тока.

Рассмотрим целевые задачи на конкретных примерах.

#### Задача 1

Определить мощность, которую показывает ваттметр в схеме на рис. 4.16, если  $R_1 = 60 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 30 \text{ Ом}$ ,  $L_1 \omega = 40 \text{ Ом}$ ,  $L_2 \omega = M \omega = 20 \text{ Ом}$ ,

$$\frac{1}{C \omega} = 80 \text{ Ом}, u = 120\sqrt{2} \sin \omega t - 30\sqrt{2} \cos 2\omega t \text{ В.}$$

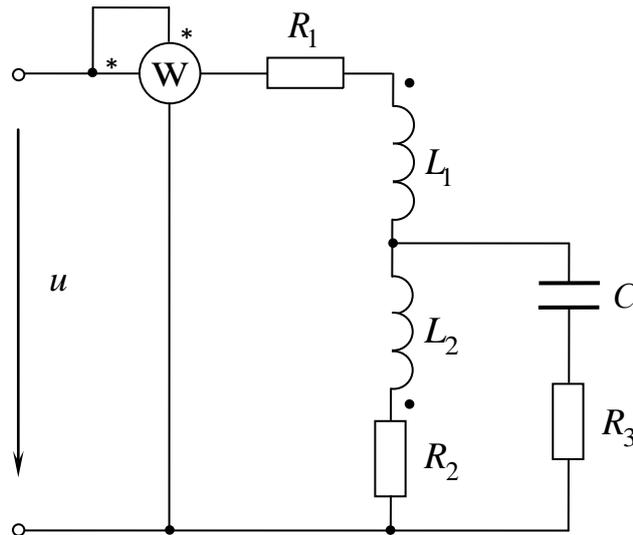


Рис. 4.16

*Решение*

1. Воспользуемся эквивалентной развязкой магнитных связей, правило которой изложено на с. 83.

Эквивалентная схема замещения без магнитных связей приведена на рис. 4.17.

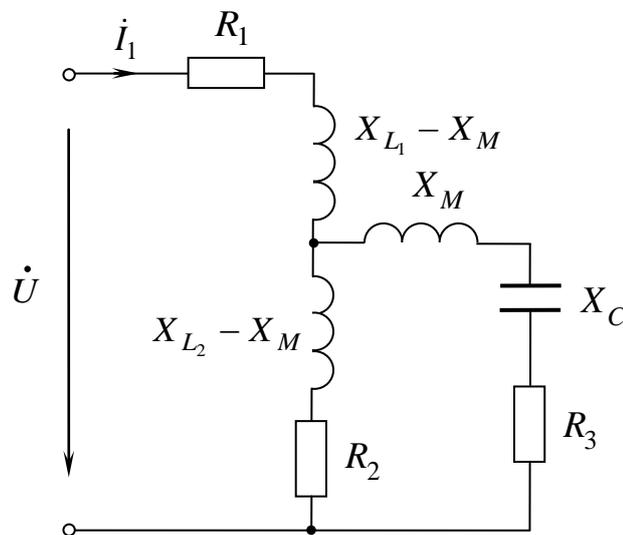


Рис. 4.17

2. Разделим схему на две подсхемы с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ .

3. Рассчитаем комплекс действующего значения общего тока в первой подсхеме с частотой  $\omega$  методом эквивалентных преобразований.

Эквивалентное комплексное сопротивление подсхемы

$$\underline{Z}' = R_1 + j(L_1 \omega - M \omega) + \frac{[R_2 + j(L_2 \omega - M \omega)] \left[ R_3 + j \left( M \omega - \frac{1}{C \omega} \right) \right]}{R_2 + j(L_2 \omega - M \omega) + R_3 + j \left( M \omega - \frac{1}{C \omega} \right)} =$$

$$= 60 + j20 + \frac{30(30 - j60)}{60 - j60} = 60 + j20 + \frac{30 \cdot 67 e^{-j63^\circ}}{84,85 e^{-j45^\circ}} = 60 + j20 + 23,69 e^{-j18^\circ} =$$

$$= 60 + j20 + 22,53 - j7,32 = 82,53 + j12,68 = 83,5 e^{j8,7^\circ} \text{ Ом.}$$

Тогда ток  $I_1' = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}'} = \frac{120}{83,5 e^{j8,7^\circ}} = 1,44 e^{-j8,7^\circ} \text{ А.}$

3. Определим показания ваттметра в первой подсхеме:

$$P_W' = U_1 \cdot I_1' \cdot \cos \varphi' = 120 \cdot 1,44 \cdot \cos 8,7^\circ = 170,8 \text{ Вт.}$$

Можно воспользоваться формулой комплексной мощности:

$$P_W' = \operatorname{Re}(\underline{S}'_W) = \operatorname{Re}(\dot{U}_1 \cdot I_1'^*) = \operatorname{Re}(120 \cdot 1,44 e^{j8,7^\circ}) = 170,8 \text{ Вт.}$$

4. Вычислим комплекс действующего значения общего тока во второй подсхеме с частотой  $2\omega$ .

Комплексное эквивалентное сопротивление

$$\underline{Z}'' = R_1 + j(2L_1 \omega - 2M \omega) + \frac{[R_2 + j(2L_2 \omega - 2M \omega)] \left[ R_3 + j \left( 2M \omega - \frac{1}{2C \omega} \right) \right]}{R_2 + j(2L_2 \omega - 2M \omega) + R_3 + j \left( 2M \omega - \frac{1}{2C \omega} \right)} =$$

$$= 60 + j40 + \frac{30 \cdot 30}{60} = 60 + j40 + 15 = 75 + j40 = 85 e^{j28^\circ} \text{ Ом.}$$

Ток  $I_1'' = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}''} = \frac{30 e^{-j90^\circ}}{85 e^{j28^\circ}} = 0,35 e^{-j118^\circ} \text{ А.}$

5. Определим показания ваттметра во второй подсхеме:

$$P_W'' = U_2 \cdot I_1'' \cos \varphi'' = 30 \cdot 0,35 \cdot \cos 28^\circ = 9,27 \text{ Вт}$$

$$\text{либо } P_W'' = \operatorname{Re}(\underline{S}_W'') = \operatorname{Re}\left(\dot{U}_2 \dot{I}_1''^*\right) = \operatorname{Re}\left(30e^{-j90^\circ} \cdot 0,35e^{j118^\circ}\right) = 9,27 \text{ Вт.}$$

6. Определим показания ваттметра в исходной схеме:

$$P_W = P_W' + P_W'' = 170,8 + 9,27 \approx 180 \text{ Вт.}$$

### Задача 2

Вычислить мощность искажения и коэффициент мощности, если  
 $u = 80 + 50 \sin(\omega t + 30^\circ) + 25 \sin(2\omega t - 40^\circ) \text{ В,}$   
 $i = 5 + 2 \sin(\omega t + 10^\circ) + 1,5 \sin(2\omega t - 10^\circ) \text{ А.}$

### Решение

1. Делим схему на три подсхемы с частотами  $0$ ,  $\omega$  и  $2\omega$ .
2. В первой подсхеме с постоянным током ищем активную мощность (реактивная мощность в цепи постоянного тока отсутствует):

$$P_0 = U_0 \cdot I_0 = 80 \cdot 5 = 400 \text{ Вт.}$$

3. Во второй подсхеме с частотой  $\omega$  ищем действующие значения напряжения и тока, а также активную и реактивную мощности:

$$U_1 = 0,707 U_{1m} = 0,707 \cdot 50 = 35,35 \text{ В;}$$

$$I_1 = 0,707 I_{1m} = 0,707 \cdot 2 = 1,414 \text{ А;}$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 35,35 \cdot 1,414 \cdot \cos 20^\circ = 46,98 \text{ Вт;}$$

$$Q_1 = U_1 I_1 \sin \varphi_1 = 17 \text{ вар.}$$

4. В третьей подсхеме с частотой  $2\omega$  ищем действующие значения напряжения и тока, активную и реактивную мощности:

$$U_2 = 0,707 U_{2m} = 0,707 \cdot 25 = 17,68 \text{ В;}$$

$$I_2 = 0,707 I_{2m} = 0,707 \cdot 1,7 = 1,06 \text{ А;}$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 17,68 \cdot 1,06 \cdot \cos 30^\circ = 16,28 \text{ Вт;}$$

$$Q_2 = U_2 I_2 \sin \varphi_2 = 9,38 \text{ вар.}$$

5. Найдем действующие значения напряжения и тока, полную, активную и реактивную мощности в искомой схеме:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2} = 89,23 \text{ В};$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2} = 5,3 \text{ А};$$

$$S = U I = 473,2 \text{ ВА};$$

$$P = P_0 + P_1 + P_2 = 466,3 \text{ Вт};$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 26,4 \text{ вар.}$$

6. Вычислим мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 76 \text{ ВА.}$$

7. Определим коэффициент мощности

$$\chi = \frac{P}{S} = 0,985.$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

#### Задача 3

Вычислить коэффициент мощности, если

$$u = 100 + 100\sqrt{2} \sin \omega t + 76 \sin 3\omega t \text{ В},$$

$$i = 5,53 \sin(\omega t + 88,54^\circ) + 4 \sin(3\omega t + 76,4^\circ) \text{ А.}$$

Ответ:  $\cos\theta = 0,17$ .

#### Задача 4

Определить мощность искажения, если  $u = 10 + 10\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}$ ,  
 $i = \sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А}$ .

Ответ:  $T = 100 \text{ В} \cdot \text{А}$ .

Для самоконтроля решите задачи 5 и 6.

#### Задача 5

Вычислить потребляемую мощность, если  $i = 5 + 10 \sin \omega t \text{ А}$ ,  
 $Z = (3 + j3) \text{ Ом}$ .

Ответ:  $P = 225 \text{ Вт}$ .

## Задача 6

Найти коэффициент мощности, если  $i = 1 + \sqrt{2} \sin \omega t$  А,  
 $u = 10 + 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) + 10\sqrt{2} \sin 3\omega t$ .

Ответ:  $\chi = 0,76$ .

## Тема 2

## Высшие гармоники в трехфазных цепях

## Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться находить законы изменения электрических величин в трехфазных цепях при несинусоидальных периодических воздействиях.

2. Научиться определять показания электроизмерительных приборов.

Трехфазную систему несинусоидальных ЭДС раскладывают в ряд Фурье.

Гармоники с номерами  $k = 3n + 1$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , образуют прямую последовательность чередования фаз, т. е. обычную симметричную систему ЭДС.

Гармоники с номерами  $k = 3n - 1$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , образуют обратную последовательность чередования фаз, аналогичную прямой, в которой фазы  $B$  и  $C$  поменялись местами.

Гармоники с номерами  $k = 3n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , образуют нулевую последовательность чередования фаз, представляющую собой три одинаковых вектора.

При анализе трехфазных цепей несинусоидального тока используют метод наложения.

Расчет подсхем с прямой и обратной последовательностями чередования фаз принципиально не отличается от расчета цепей с симметричной системой ЭДС.

В подсхемах с нулевой последовательностью чередования фаз наблюдаются следующие особенности:

1. Линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем.

2. В трехпроводной цепи линейные токи не содержат гармоник, кратных трем.

3. В трехпроводной цепи фазные напряжения приемника не содержат гармоник, кратных трем.

4. При соединении фаз приемника трехпроводной звездой при симметричной нагрузке возникает напряжение смещения нейтрали за счет гармоник, кратных трем.

5. При соединении звездой четырехпроводной ток в нейтральном проводе образует гармоники, кратные трем.

6. При соединении фаз обмоток генератора треугольником в контуре возникает уравнительный ток за счет гармоник, кратных трем.

Рассмотрим целевые задачи на конкретных примерах.

### Задача 1

В обмотке генератора наводится несинусоидальная ЭДС, разложенная в ряд Фурье:  $e_{\phi} = 160 \sin \omega t + 80 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t$  В. Вычислить фазные и линейные напряжения при соединении фаз обмоток генератора звездой и треугольником.

#### Решение

1. При соединении фаз обмоток звездой фазное напряжение содержит все три гармоники. Действующее значение несинусоидальной функции определяют по формуле

$$U_{\phi Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2} = 0,7 \sqrt{160^2 + 80^2 + 20^2} = 127 \text{ В.}$$

Линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем. Поэтому при расчете учитывают две подсхемы: с первой и пятой гармониками. Первая гармоника образует прямую последовательность чередования фаз, пятая – обратную. В обоих случаях линейное напряжение в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного:  $U_{\phi 1} = \sqrt{3} U_{\phi 1}$  и  $U_{\phi 5} = \sqrt{3} U_{\phi 5}$ . Таким образом,

$$U_{\phi Y} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{160^2 + 20^2} = 197 \text{ В.}$$

2. При соединении фаз обмоток генератора треугольником  $U_{\phi \Delta} = U_{\Delta}$ . Линейное напряжение не содержит гармоник, кратных трем. Поэтому

$$U_{\phi \Delta} = U_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{160^2 + 20^2} = 114 \text{ В.}$$

### Задача 2

Фазы обмоток генератора, находящегося в режиме холостого хода, соединены треугольником (рис. 4.18). Вычислить ток в обмотках генератора, если  $E_{1m} = \sqrt{2} \cdot 125$  В,  $E_{3m} = \sqrt{2} \cdot 51$  В,  $R = 1,3$  Ом,  $L\omega = 2,8$  Ом.

#### Решение

Результирующая ЭДС контура в каждой подсхеме равна геометрической или комплексной сумме ЭДС трех фаз. В первой подсхеме, где действует первая гармоника, образующая прямую последовательность чередования фаз, результирующая ЭДС равна 0. Поэтому тока в первой подсхеме нет.

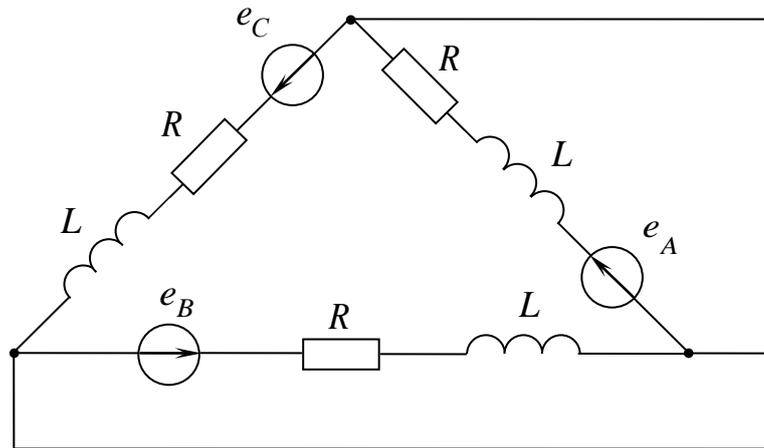


Рис. 4.18

Во второй подсхеме, где действует третья гармоника, образующая нулевую последовательность чередования фаз, результирующая ЭДС равна утроенному значению ЭДС одной фазы. Возникает уравнительный ток

$$I = \frac{3E_3}{3Z_3} = \frac{\frac{E_{3m}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + (3L\omega)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2} \cdot 51}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1,3^2 + (3 \cdot 2,8)^2}} = \frac{51}{\sqrt{1,3^2 + 8,4^2}} = 6 \text{ А.}$$

### Задача 3

На первичную обмотку трехфазного трансформатора, соединенную звездой трехпроводной (рис. 4.19), подают напряжение с частотой  $f = 50$  Гц. Во вторичной обмотке возникает несинусоидальное напряжение, дающее при разложении в ряд Фурье значения  $U_1 = 500$  В,  $U_3 = 175$  В,  $U_5 = 100$  В. Определить показание вольтметра, если  $R_V \rightarrow \infty$ .

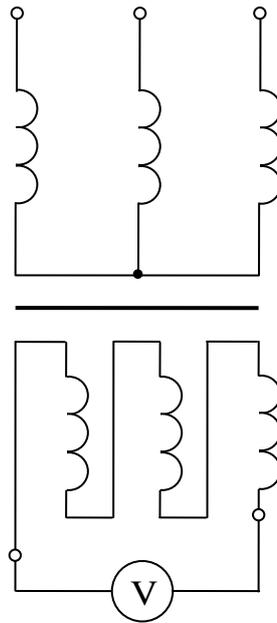


Рис. 4.19

*Решение*

Фазы вторичной обмотки трансформатора образуют «открытый» треугольник. Напряжение вольтметра в каждой подсхеме равно геометрической сумме напряжений на фазах. В первой подсхеме с прямой последовательностью чередования фаз показания вольтметра равны нулю. Во второй подсхеме с нулевой последовательностью чередования фаз показания вольтметра  $U_{V3} = 3U_3 = 3 \cdot 175 = 525$  В. В третьей подсхеме с обратной последовательностью чередования фаз геометрическая сумма напряжений на фазах равна нулю. Показание вольтметра  $U_V = 525$  В.

Следующие задачи решите самостоятельно.

**Задача 4**

Определить показания приборов электромагнитной системы ([рис. 4.20](#)), если  $e_A = 80\sqrt{2} \sin \omega t + 30\sqrt{2} \sin 3\omega t + 60\sqrt{2} \sin 5\omega t$  В,  $L\omega = 1$  Ом, генератор симметричный.

Ответ:  $I = 10$  А;  $U_V = 100$  В.

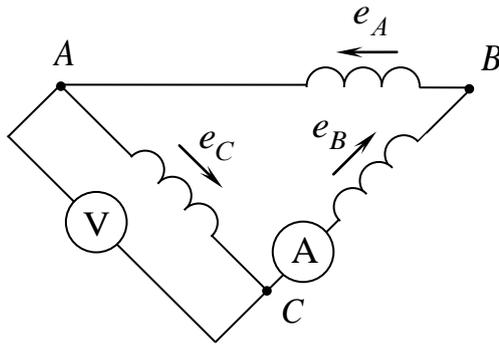


Рис. 4.20

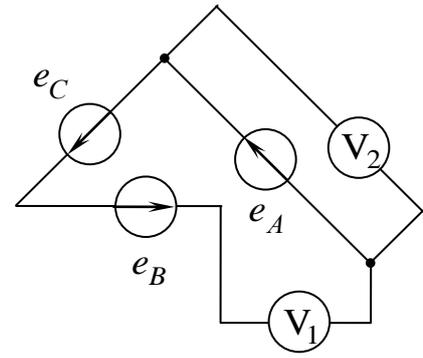


Рис. 4.21

### Задача 5

Определить показания вольтметров электромагнитной системы (рис. 4.21), если  $e_A = 80 \sin \omega t + 60 \sin(3\omega t + 30^\circ)$  В.

Ответ:  $U_{V_1} = 127$  В;  $U_{V_2} = 70,7$  В.

### Задача 6

Определить показания вольтметров электромагнитной системы (рис. 4.22), если фазная ЭДС симметричного трехфазного генератора  $e_\phi = 80\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t$  В.

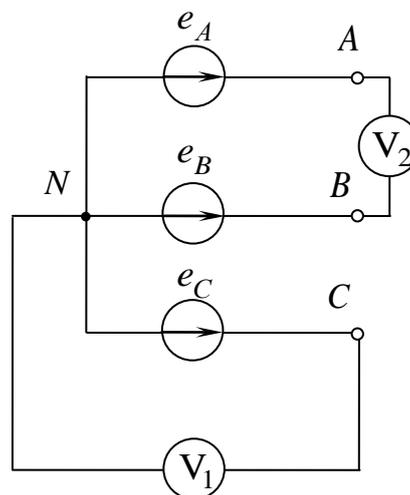


Рис. 4.22

Ответ:  $U_{V_1} = 100$  В;  $U_{V_2} = 138,6$  В.

### Задача 7

Найти мгновенное значение тока  $i_b$  в схеме [рис. 4.23](#), если  $e_A = 120 \sin \omega t + 20 \sin(3\omega t + 30^\circ) + 12 \sin(5\omega t - 30^\circ)$  В,  $\frac{1}{C\omega} = 30$  Ом. Определить показания вольтметров ( $R_V \rightarrow \infty$ ) электромагнитной системы.

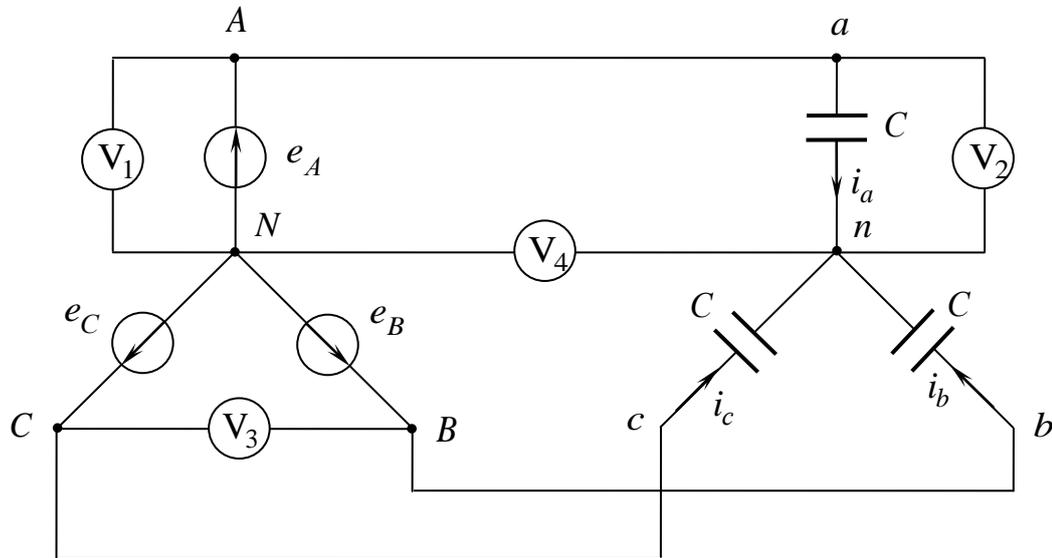


Рис. 4.23

#### Решение

1. Делим схему на три подсхемы с частотами  $\omega$ ,  $3\omega$  и  $5\omega$ .
2. В первой подсхеме с трехфазной системой ЭДС, образующих прямую последовательность чередования фаз,  $e_{1B} = 120 \sin(\omega t - 120^\circ)$  В. Приемник симметричный, поэтому  $\dot{U}_{\text{ф.п}} = \dot{U}_{\text{ф.г}}$ .

Комплекс максимального значения тока

$$\dot{I}_{1mb} = \frac{\dot{E}_{1mB}}{-j \frac{1}{C\omega}} = \frac{120e^{-j120^\circ}}{-j30} = \frac{120e^{-j120^\circ}}{30e^{-j90^\circ}} = 4e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока

$$i_{1b} = 4 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А.}$$

3. Во второй подсхеме действуют ЭДС нулевой последовательности чередования фаз. Схема представляет собой соединение звездой трехпроводной. По первому закону Кирхгофа геометрическая сумма токов в узле равна нулю. Но три одинаковых тока в сумме нуль дать не могут, поэтому токи в подсхеме отсутствуют.

4. В третьей подсхеме трехфазная система ЭДС образует обратную последовательность чередования фаз, поэтому

$$e_{5B} = 12\sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ В.}$$

Комплекс максимального значения тока

$$\dot{i}_{5mb} = \frac{\dot{E}_{5mB}}{-j \frac{1}{C \cdot 5\omega}} = \frac{12e^{j90^\circ}}{-j6} = \frac{12e^{j90^\circ}}{6e^{-j90^\circ}} = 2e^{j180^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока

$$i_{5b} = 2\sin(5\omega t + 180^\circ) \text{ А.}$$

5. Мгновенное значение тока

$$i_b = i_{1b} + i_{5b} = 4\sin(\omega t - 30^\circ) + 2\sin(5\omega t + 180^\circ) \text{ А.}$$

6. Первый вольтметр показывает напряжение на фазе генератора:

$$U_{V_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{120^2 + 20^2 + 12^2} = 86 \text{ В.}$$

7. Второй вольтметр показывает напряжение на фазе приемника. В трехпроводной цепи оно не содержит гармоник, кратных трем, поэтому

$$U_{V_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{120^2 + 12^2} = 85 \text{ В.}$$

8. Третий вольтметр показывает линейное напряжение:

$$U_{V_3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{120^2 + 12^2} = 148 \text{ В.}$$

Подробно решение этого пункта рассмотрено в задаче 1 (см. с. 200).

9. Четвертый вольтметр показывает напряжение смещения нейтрали, которое возникает за счет гармоник, кратных трем:

$$U_{V_4} = \frac{U_{3m}}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14,1 \text{ В.}$$

### Задача 8

Определить показания амперметров в схеме (рис. 4.24), если  $e_A = 100\sin(\omega t + 60^\circ) + 80\sin(3\omega t - 45^\circ) + 60\sin(5\omega t + 30^\circ) + 40\sin(6\omega t - 30^\circ)$  В,  $L\omega = 10$  Ом.

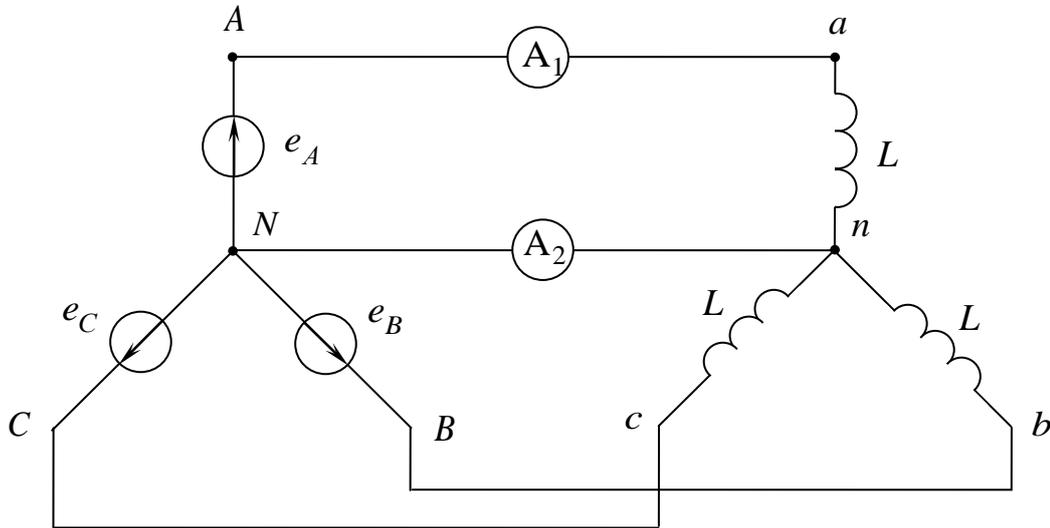


Рис. 4.24

### Решение

1. Делим схему на четыре подсхемы с частотами  $\omega$ ,  $3\omega$ ,  $5\omega$  и  $6\omega$ . В схеме есть нейтральный провод, поэтому во всех подсхемах напряжения на фазах приемника равны соответствующим напряжениям на фазах генератора. Амперметры показывают действующие значения токов, поэтому произведем их расчет в каждой подсхеме.

2. В подсхеме с частотой  $\omega$  линейный ток

$$I_{1A} = I_{1a} = \frac{E_{1A}}{L\omega} = \frac{E_{1Am}}{\sqrt{2} \cdot L\omega} = \frac{100}{\sqrt{2} \cdot 10} = 7 \text{ А.}$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{1nN} = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b} + \dot{I}_{1c} = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1a}a^2 + \dot{I}_{1a}a = 0.$$

3. В подсхеме с частотой  $3\omega$  линейный ток

$$I_{3A} = I_{3a} = \frac{E_{3A}}{3L\omega} = \frac{E_{3Am}}{\sqrt{2} \cdot 3L\omega} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 30} = 1,89 \text{ А.}$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{3nN} = \dot{I}_{3a} + \dot{I}_{3b} + \dot{I}_{3c} = \dot{I}_{3a} + \dot{I}_{3a} + \dot{I}_{3a} = 3 \cdot \dot{I}_{3a}.$$

Отсюда  $I_{3nN} = 5,67$  А.

4. В подсхеме с частотой  $5\omega$  линейный ток

$$I_{5A} = I_{5a} = \frac{E_{5A}}{5L\omega} = \frac{E_{5Am}}{\sqrt{2} \cdot 5L\omega} = \frac{60}{\sqrt{2} \cdot 50} = 0,85 \text{ А.}$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{5nN} = \dot{I}_{5a} + \dot{I}_{5b} + \dot{I}_{5c} = \dot{I}_{5a} + \dot{I}_{5a} a + \dot{I}_{5a} a^2 = 0.$$

5. В подсхеме с частотой  $6\omega$  линейный ток

$$I_{6A} = I_{6a} = \frac{E_{6A}}{6 \cdot L\omega} = \frac{E_{6Am}}{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot L\omega} = \frac{40}{\sqrt{2} \cdot 60} = 0,47 \text{ А.}$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{6nN} = \dot{I}_{6a} + \dot{I}_{6b} + \dot{I}_{6c} = \dot{I}_{6a} + \dot{I}_{6a} + \dot{I}_{6a} = 3\dot{I}_{6a}.$$

Тогда ток  $I_{6nN} = 1,42$  А.

6. Первый амперметр показывает действующее значение линейного тока:

$$I = \sqrt{I_{1A}^2 + I_{3A}^2 + I_{5A}^2 + I_{6A}^2} = \sqrt{7^2 + 1,89^2 + 0,85^2 + 0,47^2} = 7,45 \text{ А.}$$

7. Второй амперметр показывает действующее значение тока в нейтральном проводе:

$$I_{nN} = \sqrt{I_{3nN}^2 + I_{6nN}^2} = \sqrt{5,67^2 + 1,42^2} = 5,85 \text{ А.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 9

Записать законы изменения ЭДС фаз  $B$  и  $C$  симметричного генератора, если  $e_A = 100\sqrt{2} \sin \omega t + 50\sqrt{2} \sin(3\omega t - 15^\circ) + 30\sqrt{2} \sin(5\omega t + 20^\circ)$  В.

### Задача 10

Определить показание амперметра электромагнитной системы в схеме [рис. 4.25](#), если ЭДС фазы симметричного трехфазного генератора меняется по закону  $e_{\phi} = 20\sqrt{2} \sin\omega t + 8\sqrt{2} \sin 3\omega t + 6\sqrt{2} \sin 9\omega t$  В,  $R = 2$  Ом.

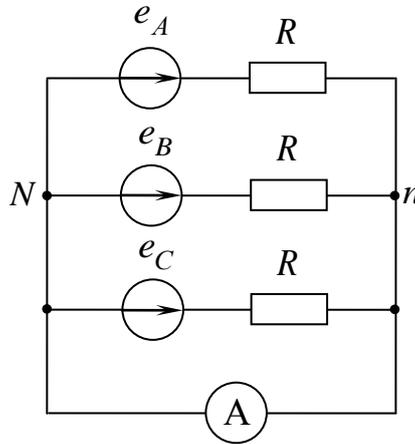


Рис. 4.25

Ответ:  $I = 15$  А.

Для самоконтроля решите [задачи 11](#) и 12.

### Задача 11

Определить показания приборов электромагнитной системы в схеме на [рис. 4.26](#), при замкнутом и разомкнутом ключе К, если  $e_A = 100\sqrt{2} \sin\omega t + 30\sqrt{2} \sin 3\omega t$  В,  $L\omega = 2$  Ом.

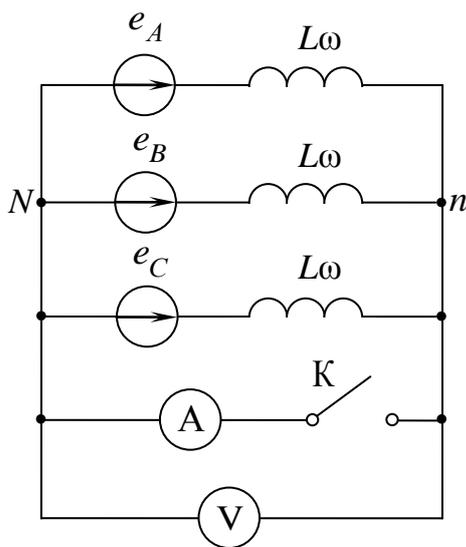


Рис. 4.26

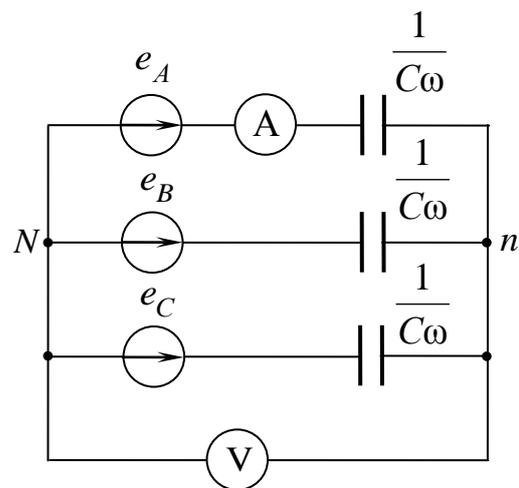


Рис. 4.27

Ответ:

а) при замкнутом ключе  $I_A = 15 \text{ A}$ ;  $U_V = 0 \text{ В}$ ;

б) при разомкнутом ключе  $I_A = 0 \text{ A}$ ;  $U_V = 30 \text{ В}$ .

### Задача 12

Определить показания приборов электромагнитной системы в схеме [рис. 4.27](#), если ЭДС фазы симметричного трехфазного генератора  $e_\phi = 100\sqrt{2} \sin\omega t + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t \text{ В}$ ,  $\frac{1}{C\omega} = 10 \text{ Ом}$ .

Ответ:  $I_A = 10 \text{ A}$ ;  $U_V = 60 \text{ В}$ .

# ГЛАВА 5

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Ознакомиться с законами коммутации.
2. Научиться использовать классический метод расчета переходных процессов для нахождения мгновенных значений электрических величин, подчиняющихся законам коммутации, в цепях с одним реактивным элементом.
3. Научиться строить графики изменения искомых величин.
4. Научиться определять длительность переходного процесса.

Переходные процессы подчиняются законам коммутации. Согласно первому закону коммутации ток в индуктивной катушке не может измениться скачком. Согласно второму закону коммутации напряжение на емкостном элементе не может измениться скачком.

При рассмотрении переходных процессов продолжительность коммутации принимают равной нулю. Момент, предшествующий коммутации, обозначают  $t = 0 -$ , момент завершения –  $t = 0 +$ . Тогда законы коммутации можно записать в следующем виде:

$$i_L(0+) = i_L(0-),$$

$$u_C(0+) = u_C(0-).$$

Независимыми начальными условиями называют значения тока в индуктивной катушке и напряжения на конденсаторе в момент коммутации ( $t = 0+$ ).

В классическом методе расчета переходных процессов расчет токов и напряжений производят при помощи уравнений, составленных по законам Кирхгофа для мгновенных значений. В общем случае получают систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений. Общий интеграл дифференциального уравнения получают суммированием частного решения этого уравнения и общего решения уравнения без правой части.

Составляющие токов и напряжений, найденные как частное решение неоднородного уравнения, называют принужденными.

Составляющие, найденные как общее решение однородного уравнения, называют свободными. Свободные составляющие обусловлены изменением энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля индуктивной катушки. Свободные составляющие стремятся к нулю, так как процессы в цепи, обладающей сопротивлением, при отсутствии источников энергии

затухают. После переходного процесса остаются только принужденные составляющие, т. е. принужденный режим – это новый установившийся режим после окончания переходного процесса.

В классическом методе токи и напряжения вычисляют как сумму принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}, \quad u = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}.$$

Рассмотрим порядок расчета на конкретных задачах.

### Задача 1

Найти законы изменения напряжения на конденсаторе  $u_C$  и тока  $i$  (рис. 5.1), если  $U = 100$  В,  $R = 1000$  Ом,  $C = 1$  мкФ. Определить длительность переходного процесса.

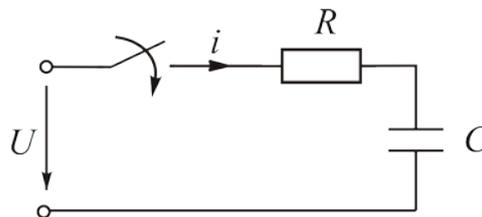


Рис. 5.1

### Решение

1. Составим систему уравнений электрического состояния. Так как схема одноконтурная, то можно написать только одно уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + u_C = U.$$

В этом уравнении во время переходного процесса происходит изменение двух величин: тока  $i$  и напряжения на емкостном элементе  $u_C$ . Напряжение  $u_C$  подчиняется второму закону коммутации, поэтому рационально выразить ток по закону Ома  $i = i_C = C \frac{du_C}{dt}$ .

Тогда уравнение примет вид

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

2. Решение этого уравнения представим как сумму двух слагаемых:

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

3. Найдем  $u_{Cпр}$ .

Теоретически переходной процесс длится бесконечно долго, поэтому принужденный режим рассмотрим как новый установившийся режим при  $t = \infty$ . Конденсатор постоянный ток не пропускает ( $i_{пр} = 0$ ),  $Ri_{пр} = 0$ . Отсюда  $u_{Cпр} = U = 100$  В.

4. Вычислим  $u_{Cсв}$ . Из математики известно, что свободные составляющие меняются по экспоненциальному закону:

$$u_{Cсв} = Ae^{pt}.$$

4.1. Определим показатель степени  $p$ , который является корнем характеристического уравнения.

Для получения характеристического уравнения в уравнении электрического состояния правую часть нужно приравнять к нулю, переменную величину заменить единицей, ее производную –  $p$ , вторую производную –  $p^2$  и т. д. Получим уравнение  $RCp + 1 = 0$ .

Решение характеристического уравнения позволяет определить  $p = -\frac{1}{RC} = \frac{1}{1000 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = -10^3 \text{ с}^{-1}$ .

Величину  $\frac{1}{|p|} = RC$  обозначают  $\tau$  и называют постоянной времени;

$$\tau = \frac{1}{10^3} = 0,001 \text{ с.}$$

4.2. Определим постоянную интегрирования  $A$ .

Постоянные интегрирования определяют из начальных условий с использованием законов коммутации.

Уравнение, по которому проводим решение, справедливо для любого момента времени, следовательно, и для начального:

$$u_C(0+) = u_{Cпр}(0+) + u_{Cсв}(0+).$$

По второму закону коммутации  $u_C(0+) = u_C(0-)$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $u_C(0-) = 0$ .

Принужденная составляющая в данной задаче является постоянной величиной, значит,  $u_{Cпр}(0+) = U = 100$  В.

Свободная составляющая  $u_{Cсв} = Ae^{pt}$  при  $t = 0+$  равна  $A$ .

После подстановки получим  $0 = U + A$ . Отсюда  $A = -U = -100$  В.

Тогда закон изменения напряжения  $u_C = U - Ue^{-\frac{1}{RC}t} = 100 - 100e^{-10^3 t}$  В.

Закон изменения тока можно получить как из уравнения по второму закону Кирхгофа, так и из закона Ома.

Из уравнения по второму закону Кирхгофа

$$i = \frac{U - u_C}{R} = \frac{U - U + Ue^{-\frac{1}{RC}t}}{R} = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = 0,1e^{-10^3 t} \text{ А,}$$

либо

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{U}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = 0,1e^{-10^3 t} \text{ А.}$$

Проиллюстрируем полученные уравнения графиками.

График напряжения  $u_C$  (рис. 5.2) получаем суммированием графиков  $u_{C\text{пр}}$  и  $u_{C\text{св}}$ . Составляющая  $u_{C\text{пр}} = 100 \text{ В} = \text{const}$ . Свободная составляющая изменяется по закону экспоненты и стремится к нулю. В начальный момент  $u_{C\text{св}}(0+) = -100 \text{ В}$ .

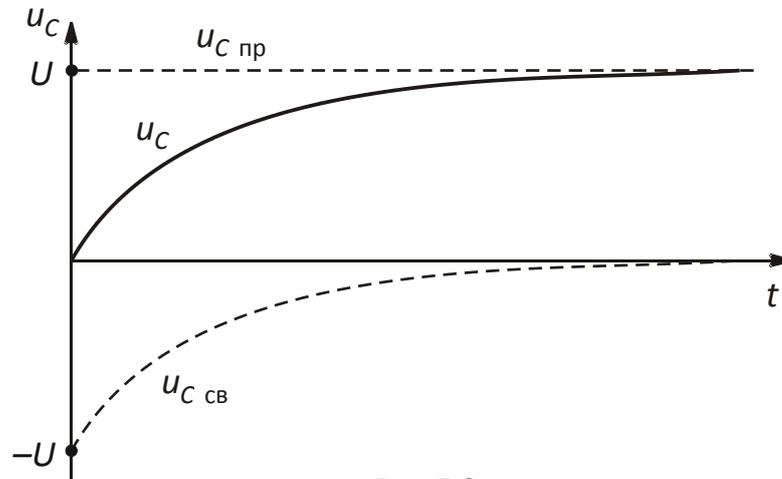


Рис. 5.2

График подтверждает, что напряжение на конденсаторе меняется плавно и принужденный режим – это новый установившийся режим после переходного процесса.

График изменения тока представлен на рис. 5.3.

При  $t = 0-$  тока не было, при  $t = 0+$  ток  $i_C = 0,1 \text{ А}$ , далее он стремится к нулю по закону экспоненты.

5. Вычислим длительность переходного процесса.

Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Практически переходный процесс заканчивается через  $(3-5)\tau$ , т. е.  $t_{\text{пн}} = (0,003 - 0,005) \text{ с}$ .

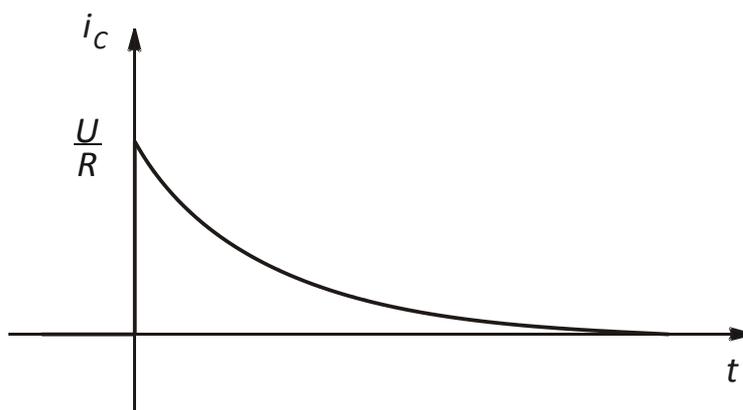


Рис. 5.3

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 2

Найти законы изменения напряжения на конденсаторе  $u_C$  и тока  $i$  (рис. 5.1), если  $U = 25$  В,  $R = 20$  Ом,  $C = 5$  мкФ,  $u_C(0-) = 50$  В. Построить графики.

#### Пояснение к решению

Возможны два варианта решения, так как с резистором могут быть соединены разные обкладки конденсатора.

Ответ: 1)  $u_C = 25 + 25e^{-10^4 t}$  В;  $i = -1,25e^{-10^4 t}$  А.

2)  $u_C = 25 - 75e^{-10^4 t}$  В;  $i = 3,75e^{-10^4 t}$  А.

### Задача 3

Найти законы изменения напряжения на конденсаторе  $u_C$  и тока  $i$  (рис. 5.4), если  $U = 200$  В,  $R = 80$  Ом,  $R_1 = 20$  Ом,  $C = 1,25$  мкФ. Определить длительность переходного процесса.

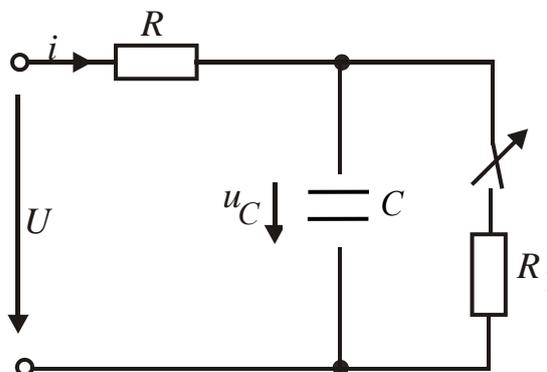


Рис. 5.4

Решение

1. Составим систему уравнений электрического состояния. Коммутация заключается в размыкании рубильника. После коммутации схема становится одноконтурной, поэтому можно написать только одно уравнение по второму закону Кирхгофа:  $Ri + u_C = U$ .

После подстановки выражения тока по закону Ома  $i = i_C = C \frac{du_C}{dt}$  уравнение примет вид

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

2. Решение этого уравнения представим как сумму двух слагаемых:

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

3. Найдем  $u_{C\text{пр}}$ .

Принужденный режим – это новый установившийся режим после окончания переходного процесса. Конденсатор постоянный ток не пропускает ( $i_{\text{пр}} = 0$ ),  $Ri_{\text{пр}} = 0$ . Отсюда  $u_{C\text{пр}} = U = 200$  В.

4. Вычислим  $u_{C\text{св}}$ .

Свободные составляющие меняются по экспоненциальному закону:

$$u_{C\text{св}} = Ae^{pt}.$$

4.1. Определим показатель степени  $p$ , который является корнем характеристического уравнения  $RCp + 1 = 0$ .

$$\text{Отсюда } p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{80 \cdot 1,25 \cdot 10^{-6}} = -\frac{10^6}{100} = -10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

4.2. Определим постоянную интегрирования  $A$ .

Уравнение, по которому проводим решение, справедливо для любого момента времени, следовательно, и для начального:

$$u_C(0+) = u_{C\text{пр}}(0+) + u_{C\text{св}}(0+).$$

По второму закону коммутации  $u_C(0+) = u_C(0-)$ . Схема до коммутации приведена на рис. 5.5. Ключ замкнут. Конденсатор постоянный ток не пропускает, поэтому вместо него можно изобразить разрыв.

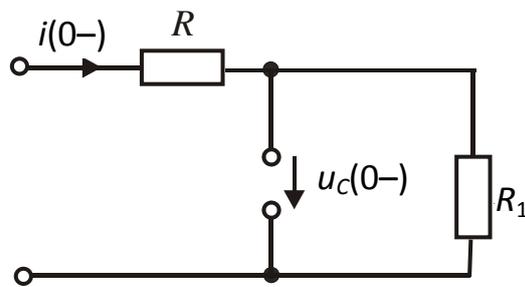


Рис. 5.5

Схема является одноконтурной, ток в ней  $i(0-) = \frac{U}{R + R_1} = 2$  А.

Напряжение  $u_C(0-) = R_1 i(0-) = 20 \cdot 2 = 40$  В.

Принужденная составляющая в рассматриваемой задаче является постоянной величиной, т. е.  $u_{Cпр}(0+) = U = 200$  В.

Свободная составляющая  $u_{Cсв} = Ae^{pt}$  при  $t = 0+$  равна А.

После подстановки получим:  $40 = 200 + A$ .

Отсюда  $A = -160$  В.

Тогда закон изменения напряжения  $u_C = 200 - 160e^{-10^4 t}$  В.

Закон изменения тока

$$i_C = \frac{U - u_C}{R} = \frac{200 - 200 + 160e^{-10^4 t}}{80} = 2e^{-10^4 t} \text{ А.}$$

Графики напряжения  $u_C$  и тока  $i_C$  представлены соответственно на [рис. 5.6](#) и [5.7](#).

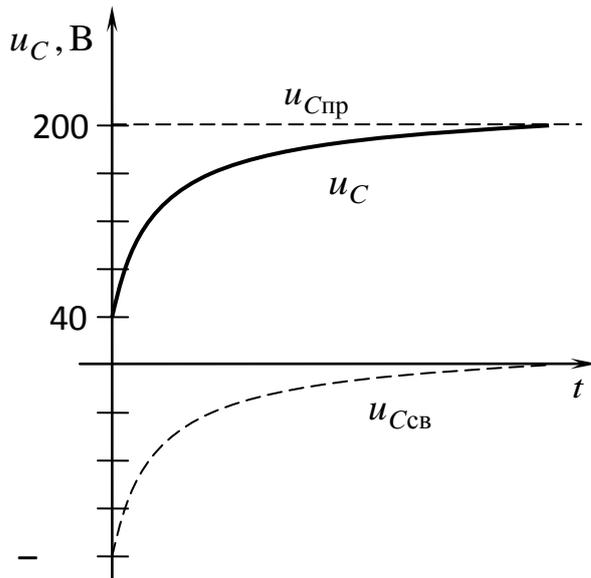


Рис. 5.6

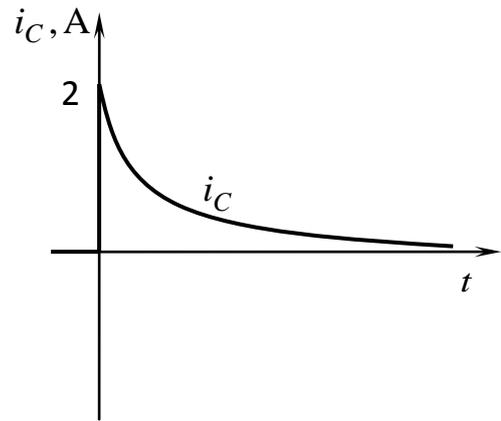


Рис. 5.7

Переходный процесс длится  $(3 - 5) \tau = (3 - 5) \frac{1}{|p|} = (0,0003 - 0,0005) \text{ с}$ .

Задачи 4 и 5 решите для самоконтроля.

#### Задача 4

Вычислить начальное значение напряжения  $u_C(0+)$ , принужденную составляющую  $u_{Cпр}$  и длительность переходного процесса в схеме [рис. 5.1](#), если  $U = 50 \text{ В}$ ,  $R = 5 \text{ Ом}$ ,  $C = 2 \text{ мкФ}$ .

Ответ:  $u_C(0+) = 0$ ;  $u_{Cпр} = 50 \text{ В}$ ;  $t_{пр} = (3 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5}) \text{ с}$ .

#### Задача 5

Вычислить начальное значение напряжения  $u_C(0+)$  и принужденную составляющую  $u_{Cпр}$  ([рис. 5.4](#)), если  $U = 40 \text{ В}$ ,  $R = R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ .

Ответ:  $u_C(0+) = 20 \text{ В}$ ;  $u_{Cпр} = 40 \text{ В}$ .

#### Задача 6

Найти законы изменения тока  $i$ , а также напряжений  $u_R$  и  $u_L$  ([рис. 5.8](#)), если  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ Гн}$ .

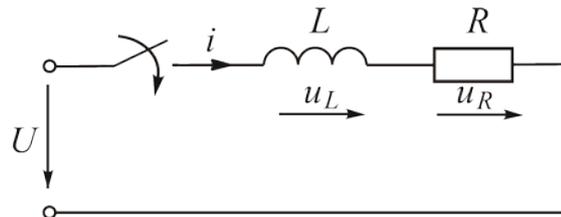


Рис. 5.8

*Решение*

1. Составим уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$u_L + u_R = U.$$

После подстановки  $u_L$  и  $u_R$ , выраженных по закону Ома, получим уравнение с одной переменной:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U.$$

2. Представим решение этого уравнения как сумму двух слагаемых:

$$i_L = i_{Lпр} + i_{Lсв}.$$

3. Найдем  $i_{Lпр}$  в схеме при  $t = \infty$ . Индуктивный элемент не оказывает сопротивления постоянному току, вместо него будет «закоротка». Тогда

$$i_{Lпр} = \frac{U}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А}.$$

4. Вычислим  $i_{Lсв}$  по закону экспоненты:

$$i_{Lсв} = Ae^{pt}.$$

4.1. Составим характеристическое уравнение для определения  $p$ :  $Lp + R = 0$ .

$$\text{Отсюда } p = -\frac{R}{L} = -\frac{10}{1} = -10 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Постоянная времени } \tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R} = 0,1 \text{ с}.$$

4.2. Определим постоянную интегрирования  $A$  из начальных условий с использованием законов коммутации.

В начальный момент времени

$$i_L(0+) = i_{L\text{пр}}(0+) + i_{L\text{св}}(0+).$$

По первому закону коммутации  $i_L(0+) = i_L(0-)$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $i_L(0-) = 0$ .

Принужденная составляющая  $i_{L\text{пр}} = 10 \text{ А}$  – постоянная величина. Свободная составляющая в начальный момент  $i_{L\text{св}}(0+) = A$ .

После подстановки получим:  $0 = 10 + A$ . Отсюда  $A = -10 \text{ А}$ .

Тогда закон изменения тока  $i_L = 10 - 10e^{-10t} \text{ А}$ .

Закон изменения напряжения  $u_R = Ri_L = 100 - 100e^{-10t} \text{ В}$ .

Закон изменения напряжения

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = 1 \cdot (-10)(-10)e^{-10t} = 100e^{-10t} \text{ В}.$$

В любой момент времени  $u_R + u_L = U - Ue^{-\frac{R}{L}t} + Ue^{-\frac{R}{L}t} = U$ .

Проиллюстрируем полученные законы изменения электрических величин графиками.

График тока  $i_L$  (рис. 5.9) получаем как сумму графиков  $i_{L\text{пр}}$  и  $i_{L\text{св}}$ . Составляющая тока  $i_{L\text{пр}} = 10 \text{ А} = \text{const}$ . Свободная составляющая меняется по закону экспоненты и стремится к нулю. В начальный момент  $i_{L\text{св}}(0+) = -10 \text{ А}$ .

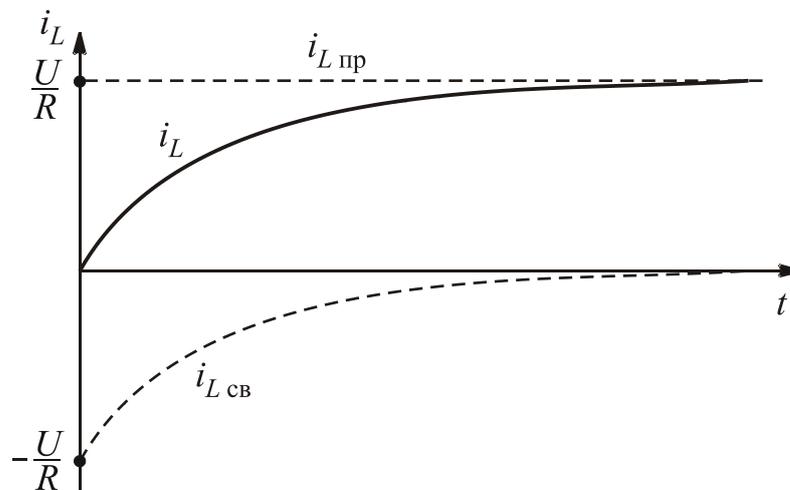


Рис. 5.9

Из графика видно, что ток в индуктивной катушке меняется плавно и стремится к принужденной составляющей.

Графики изменения напряжений  $u_R$  и  $u_L$  приведены на [рис. 5.10](#).

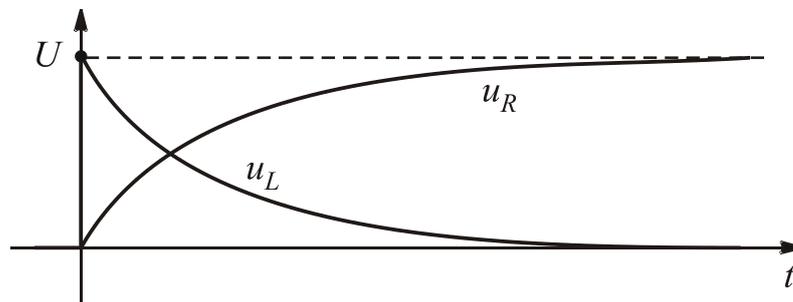


Рис. 5.10

График  $u_R$  аналогичен графику тока  $i_L$ , так как  $u_R = Ri_L$ .

Напряжение  $u_L$  в начальный момент возрастает скачком до величины входного напряжения, а затем по экспоненциальному закону уменьшается до нуля.

### Задача 7

Найти закон изменения тока  $i_L$  ([рис. 5.11](#)), если  $u = 70\sin(50t + 120^\circ)$  В,  $R = 20$  Ом,  $L = 3$  Гн. Построить график.

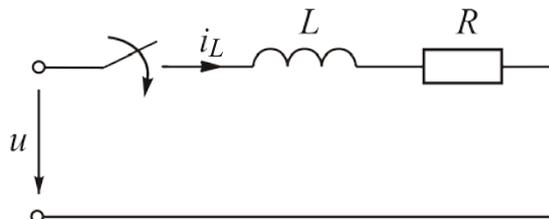


Рис. 5.11

### Решение

1. Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = u.$$

2. Закон изменения тока  $i_L$  ищем как сумму двух слагаемых:

$$i_L = i_{L\text{пр}} + i_{L\text{св}}.$$

3. Ток  $i_{Lпр}$  меняется по синусоидальному закону:

$$i_{Lпр} = I_{Lмпр} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) = I_{Lмпр} \sin(\omega t + \psi_{iпр}).$$

Проведем расчет для комплексов максимальных значений:

$$\dot{I}_{Lмпр} = \frac{\dot{U}_m}{R + jL\omega} = \frac{70e^{j120^\circ}}{20 + j3 \cdot 50} = \frac{70e^{j120^\circ}}{151e^{j82^\circ}} = 0,46e^{j38^\circ} \text{ А.}$$

Тогда закон изменения принужденной составляющей тока

$$i_{Lпр} = 0,46 \sin(50t + 38^\circ) \text{ А.}$$

4. Составляющая тока  $i_{Lсв}$  меняется по закону экспоненты:  $i_{Lсв} = Ae^{pt}$ .

4.1. Характеристическое уравнение  $Lp + R = 0$  дает решение:

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{20}{3} = -6,67 \text{ с}^{-1}.$$

4.2. Определим постоянную интегрирования  $A$ .

В начальный момент времени  $i_L(0+) = i_{Lпр}(0+) + i_{Lсв}(0+)$ .

По первому закону коммутации  $i_L(0+) = i_L(0-)$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $i_L(0-) = 0$ . Принужденная составляющая в начальный момент  $i_{Lпр}(0+) = 0,46 \sin 38^\circ = 0,28 \text{ А}$ . Это конкретное значение тока. Свободная составляющая в начальный момент  $i_{Lсв}(0+) = A$ .

После подстановки получим

$$0 = 0,28 + A.$$

Отсюда  $A = 0,28 \text{ А}$ , т. е.  $i_{Lпр}(0+)$  и  $i_{Lсв}(0+)$  равны и противоположны.

Тогда закон изменения тока

$$i_L = 0,46 \sin(50t + 38^\circ) - 0,28e^{-6,67t} \text{ А.}$$

График тока  $i_L$  ([рис. 5.12](#)) получаем как сумму графиков  $i_{Lпр}$  и  $i_{Lсв}$ . Составляющая тока  $i_{Lпр}$  меняется по синусоидальному закону. На [рис. 5.12](#) начальная фаза  $\psi_{iпр} > 0$ , поэтому синусоида смещена влево. Свободная составляющая меняется по закону экспоненты и стремится к нулю. В начальный момент  $i_{Lсв}(0+) = -i_{Lпр}(0+)$ .

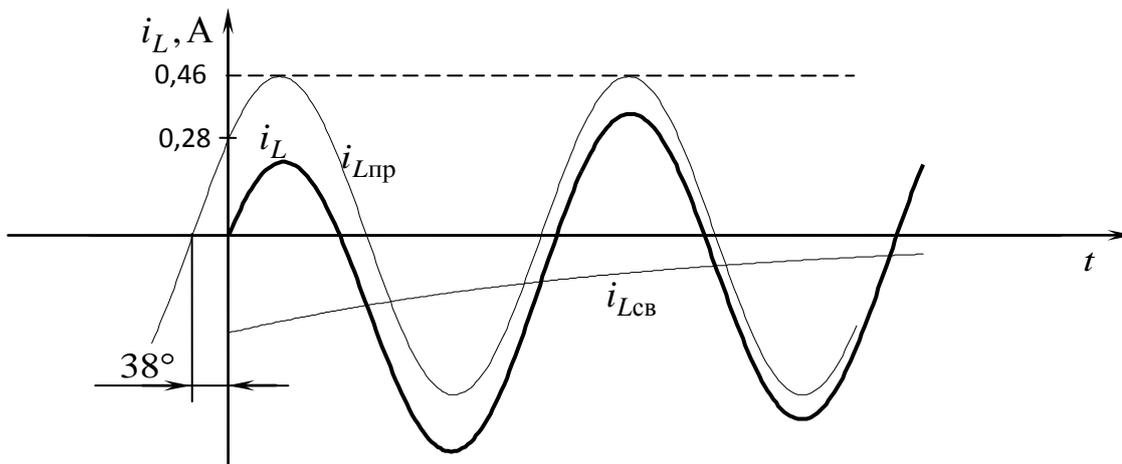


Рис. 5.12

График подтверждает плавное изменение тока в индуктивной катушке. Если  $\psi_{i_{пр}} = 0$ , свободная составляющая не возникнет и переходного процесса не будет.

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 8

Найти закон изменения тока  $i_L$  (см. рис. 5.11), если  $u = 200 \sin(50t + 30^\circ)$  В,  $R = 30$  Ом;  $L = 0,5$  Гн.

Ответ:  $i_L = 5,1 \sin(50t - 9^\circ) + 0,8 e^{-60t}$  А.

### Задача 9

Найти закон изменения тока  $i_L$  (рис. 5.13), если  $U = 100$  В,  $R = R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $L = 2$  Гн. Построить график.

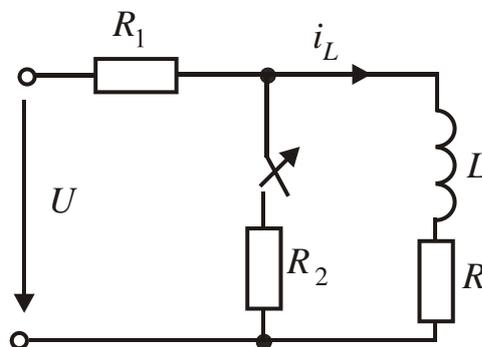


Рис. 5.13

Решение

1. Составим систему уравнений электрического состояния. После коммутации, которая заключается в размыкании ключа, схема становится одноконтурной, поэтому можно записать только одно уравнение по второму закону Кирхгофа

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + R i_L = U.$$

2. Закон изменения тока  $i_L$  ищем как сумму двух слагаемых:

$$i_L = i_{Lпр} + i_{Lсв}.$$

3. Току  $i_{Lпр}$  оказывают сопротивление два резистора внешнего контура, так как вместо индуктивного элемента – «закоротка». Поэтому принужденная составляющая тока  $i_{Lпр} = \frac{U}{R_1 + R} = \frac{100}{20} = 5$  А.

4. Составляющая тока  $i_{Lсв}$  меняется по закону экспоненты:  $i_{Lсв} = A e^{pt}$ .

4.1. Характеристическое уравнение  $R_1 + Lp + R = 0$  дает решение:

$$p = -\frac{R_1 + R}{L} = -10 \text{ с}^{-1}.$$

4.2. Определим постоянную интегрирования А.

В начальный момент времени  $i_L(0+) = i_{Lпр}(0+) + i_{Lсв}(0+)$ .

По первому закону коммутации  $i_L(0+) = i_L(0-)$ . Схема до коммутации представлена на [рис. 5.14](#).

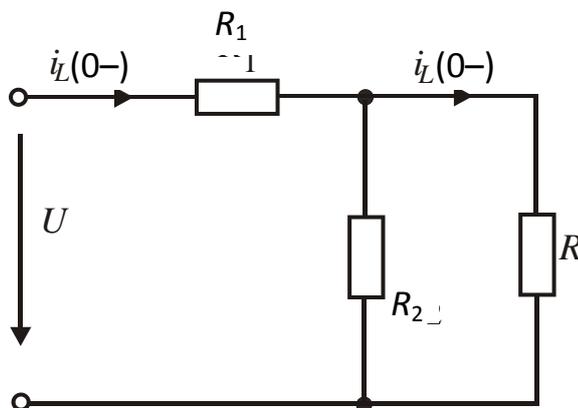


Рис. 5.14

Сделаем расчет методом эквивалентных преобразований. Эквивалентное сопротивление

$$R_3 = R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} = 15 \text{ Ом.}$$

Ток в свернутой схеме

$$i_1(0-) = \frac{U}{R_3} = \frac{100}{15} \approx 6,67 \text{ А.}$$

Сопrotивления  $R_2$  и  $R$  равны по величине, поэтому ток  $i_L(0-) = \frac{1}{2} i_1(0-) = 3,335 \text{ А} \approx 3,34 \text{ А}$ .

Составляющая тока  $i_{L\text{пр}}(0+) = 5 \text{ А}$ . Свободная составляющая в начальный момент  $i_{L\text{св}}(0+) = A$ .

После подстановки получим

$$3,34 = 5 + A.$$

Отсюда  $A = -1,66 \text{ А}$ .

Тогда закон изменения тока

$$i_L = 5 - 1,66e^{-10t} \text{ А.}$$

График тока  $i_L$  получаем как сумму составляющих  $i_{L\text{пр}}$  и  $i_{L\text{св}}$  (рис. 5.15).

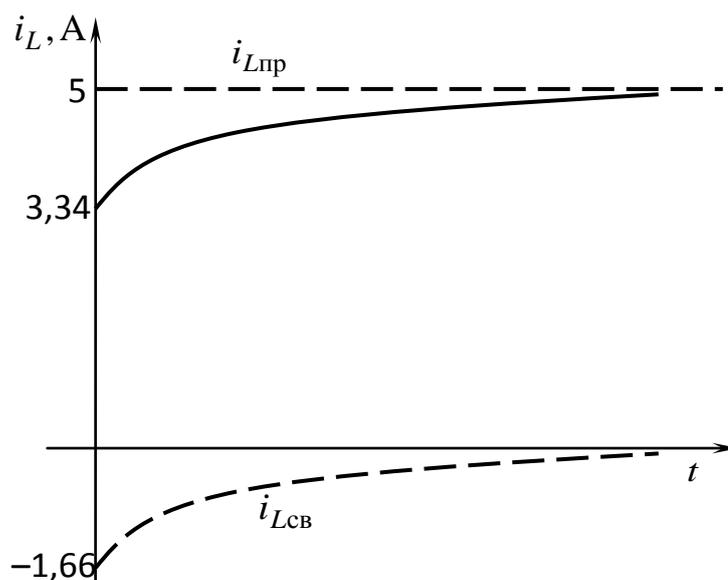


Рис. 5.15

Задачи 10–12 решите для самоконтроля.

### Задача 10

Найти начальные значения тока  $i_L(0+)$ , напряжений  $u_R(0+)$  и  $u_L(0+)$  (рис. 5.8), если  $U = 25$  В,  $R = 10$  Ом,  $L = 1$  Гн.

Ответ:  $i_L(0+) = 0$ ;  $u_R(0+) = 0$ ;  $u_L(0+) = 25$  В.

### Задача 11

Найти принужденные составляющие тока  $i_{Lпр}$ , напряжений  $u_{Rпр}$  и  $u_{Lпр}$  (рис. 5.8), если  $U = 30$  В;  $R = 10$  Ом;  $L = 1$  Гн.

Ответ:  $i_{Lпр} = 3$  А,  $u_{Rпр} = 30$  В,  $u_{Lпр} = 0$ .

### Задача 12

За какое время переходный процесс в цепи, схема замещения которой представлена на рис. 5.8, практически закончится, если  $U = 100$  В;  $R = 1$  Ом;  $L = 1$  Гн.

Ответ:  $t_{пт} = (3 - 5)$  с.

## Занятие 2

*Цели занятия:*

1. Ознакомиться с вариантами нахождения мгновенных значений электрических величин, не подчиняющихся законам коммутации.
2. Научиться вычислять корень характеристического уравнения в разветвленных цепях с одним реактивным элементом.
3. Научиться определять зависимые начальные условия (ЗНУ) в схемах, составленных с учетом нулевых независимых начальных условий (ННУ).
4. Научиться определять ЗНУ в схемах, составленных с учетом ненулевых ННУ.

*Возможны два варианта решения.*

Вариант 1

Если в условии задачи требуется найти закон изменения величины, не подчиняющейся законам коммутации, то сначала находим закон изменения величины, подчиняющейся законам коммутации, затем из системы уравнений электрического состояния в дифференциальной форме – требуемую величину. При составлении системы рекомендуется выбирать уравнения, связывающие искомые величины с величинами, подчиняющимися законам коммутации.

Вариант 2

Сразу ищем закон изменения требуемой по условию величины как сумму принужденной и свободной составляющих.

Преподавателями курса ТОЭ разработаны приемы, позволяющие упростить нахождение постоянных интегрирования.

Рассмотрим алгоритм нахождения ЗНУ для схемы с одним реактивным элементом.

1. В схеме при  $t = 0-$  находим ННУ:  $i_L(0-)$  и  $u_C(0-)$ .

2. В схеме при  $t = 0+$  вычисляем ЗНУ. Схему составляем с учетом ННУ, которые могут быть нулевыми и ненулевыми.

Если  $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ , то вместо индуктивного элемента можно изобразить разрыв цепи (рис. 5.16, а). Если  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ , то емкостный элемент можно заменить «закороткой» (рис. 5.16, б).

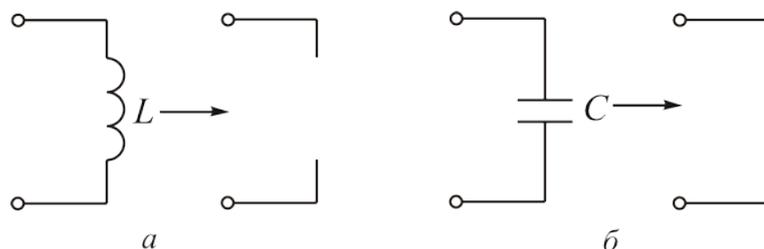


Рис. 5.16

Если  $i_L(0+) = i_L(0-) \neq 0$ , то индуктивный элемент заменяем источником тока с током  $i_L(0-)$ , направления которых совпадают (рис. 5.17, а). Если  $u_C(0+) = u_C(0-) \neq 0$ , то емкостный элемент заменяют источником ЭДС с ЭДС, равной  $u_C(0-)$ . Направления их противоположны (рис. 5.17, б).

Условно-положительные направления  $u_C$  и  $i_C$  совпадают.

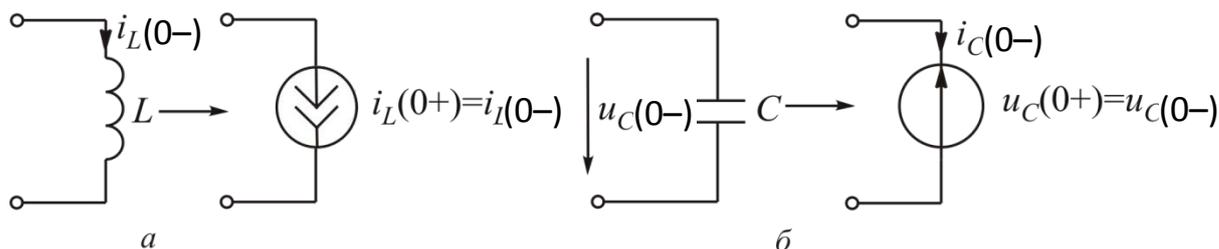


Рис. 5.17

Для вычисления корня характеристического уравнения в схеме с одним реактивным элементом проще всего заменить разветвленную цепь эквивалентной ей одноконтурной. Для этого источники ЭДС закорачиваем, источники тока разрываем, разрываем также ветвь с реактивным элементом и заменяем все резисторы одним с эквивалентным сопротивлением. Схема превращается в последовательное соединение (рис. 5.18, а и б).

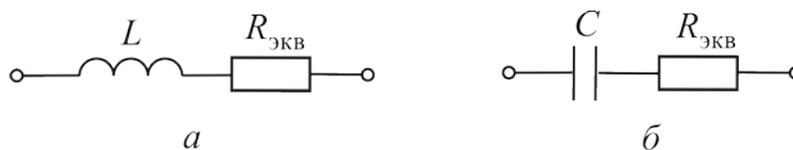


Рис. 5.18

Для схемы [рис. 5.18, а](#) корень  $p = -\frac{R_{\text{ЭКВ}}}{L}$ , для схемы [рис. 5.18, б](#) –  $p = -\frac{1}{R_{\text{ЭКВ}} C}$ .

### Задача 1

Найти закон изменения тока  $i$  ([рис. 5.19](#)), если  $U = 100$  В,  $R = 4$  Ом,  $L = 4$  мГн.

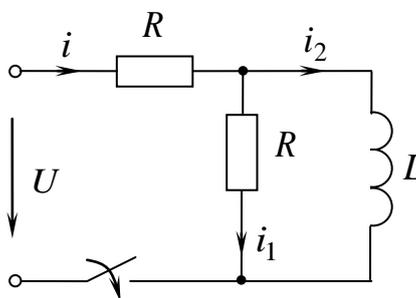


Рис. 5.19

### Решение

#### Вариант 1

1. Составим систему уравнений электрического состояния в дифференциальной форме. При этом рекомендуется выбирать уравнения, связывающие искомые величины с величинами, подчиняющимися законам коммутации:

$$\left\{ \begin{array}{l} i - i_1 - i_2 = 0, \\ Ri + L \frac{di_2}{dt} = U, \\ Ri + Ri_1 = U. \end{array} \right.$$

2. Найдем закон изменения тока  $i_L = i_2 = i_{2\text{пт}} + i_{2\text{сс}}$ .

3. Вычислим принужденную составляющую при  $t = \infty$ , так как теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Цепь подключена к источнику постоянного напряжения. Индуктивное

сопротивление  $X_L = L\omega = 0$ , поэтому в схеме вместо индуктивного элемента будет «закоротка» (рис. 5.20).

$$\text{Ток } i_{1\text{пр}} = 0, \text{ ток } i_{\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = \frac{U}{R} = \frac{100}{4} = 25 \text{ А.}$$

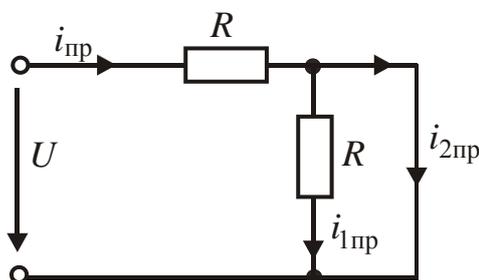


Рис. 5.20

4. Свободные составляющие в схемах с одним реактивным элементом изменяются по закону экспоненты:

$$i_{2\text{св}} = Ae^{pt}.$$

4.1. Найдем показатель степени  $p$  – корень характеристического уравнения. Разработаны разные способы составления характеристического уравнения. При наличии одного реактивного элемента проще всего перейти к схеме одноконтурной. Для этого источники ЭДС закорачиваем, источники тока разрываем и разрываем ветвь с реактивным элементом (рис. 5.21). Все резисторы заменяем одним с эквивалентным сопротивлением  $R_3 = \frac{R}{2} = 2 \text{ Ом}$ .

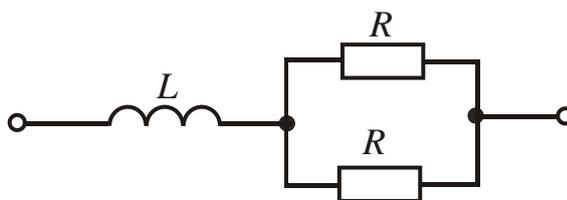


Рис. 5.21

В неразветвленной RL-цепи

$$p = -\frac{R_3}{L} = -\frac{2 \cdot 10^3}{4} = -500 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость протекания переходного процесса характеризуют постоянной времени  $\tau = -\frac{1}{p}$ . Через промежуток времени, равный  $\tau$ , свободные составляющие уменьшаются в  $e$  раз. Практически переходный процесс в цепи можно считать законченным через время  $(3 - 4)\tau$ .

4.2. Постоянную интегрирования  $A$  найдем из начальных условий с использованием законов коммутации.

$$\text{При } t=0+ \quad i_L(0+) = i_2(0+) = i_{2\text{пр}}(0+) + i_{2\text{св}}(0+).$$

По первому закону коммутации ток в индуктивной катушке не может измениться скачком. До коммутации цепь была разомкнута. Следовательно,  $i_2(0+) = i_2(0-) = 0$ .

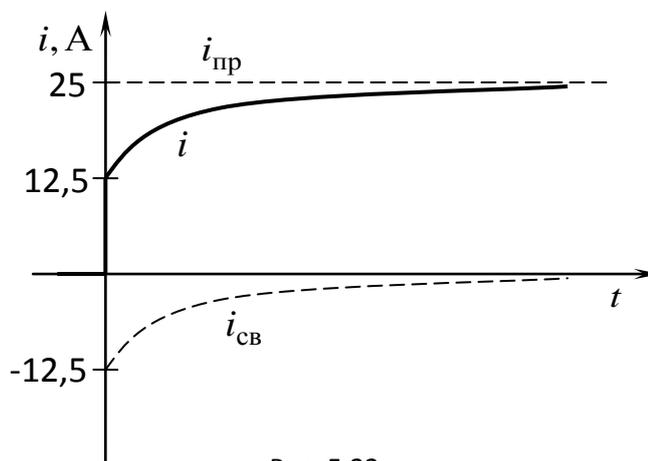
Принужденная составляющая является постоянной величиной, поэтому  $i_{2\text{пр}}(0+) = 25A$ . Свободная составляющая тока сразу после коммутации  $i_{2\text{св}}(0+) = A$ . После подстановки получаем:  $0 = 25 + A$ , откуда  $A = -25A$ . Окончательное выражение закона изменения тока  $i_2$  имеет вид

$$i_2 = 25 - 25e^{-500t} \text{ А.}$$

5. Ищем закон изменения тока  $i$  из уравнения  $Ri + L \frac{di_2}{dt} = U$ . Отсюда

$$\begin{aligned} i &= \frac{U - L \frac{di_2}{dt}}{R} = \frac{100 - 4 \cdot 10^{-3} (-500)(-25e^{-500t})}{4} = \\ &= \frac{100 - 4 \cdot 12,5e^{-500t}}{4} = 25 - 12,5e^{-500t} \text{ А.} \end{aligned}$$

График изменения тока представлен на [рис. 5.22](#).



Вариант 2

1. Ищем закон изменения тока  $i$  как сумму принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

- Найдем  $i_{\text{пр}}$  (см. вариант 1, п. 3):  $i_{\text{пр}} = 25 \text{ А}$ .
- Свободная составляющая меняется по закону экспоненты:

$$i_{\text{св}} = Be^{pt}.$$

Вычислим показатель степени  $p$  (см. [вариант 1, п. 4.1](#)):

$$p = -500 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянную интегрирования  $B$  найдем из начальных условий с использованием законов коммутации:  $i(0+) = i_{\text{пр}}(0+) + i_{\text{св}}(0+)$ . Значение тока  $i(0+)$  – зависимое начальное условие, которое ищем в два этапа.

Этап 1. В схеме при  $t=0-$  определяем независимые начальные условия:

$$i_L(0-) = 0.$$

Этап 2. В схеме при  $t=0+$ , которую составляем с учетом независимых начальных условий, определяем  $i(0+)$ . Ток  $i_2(0+) = i_2(0-) = 0$ . Место, где нет тока, можно изобразить как разрыв цепи ([рис. 5.23](#)).

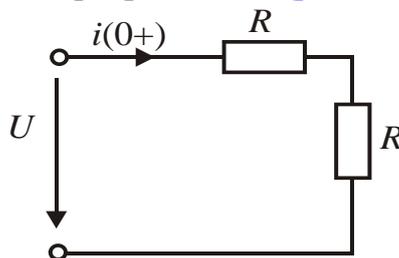


Рис. 5.23

Ток  $i(0+) = \frac{U}{2R} = 12,5 \text{ А}$ .

При  $t=0+$  составляющие тока  $i_{\text{пр}}(0+) = 25 \text{ А}$ ,  $i_{\text{св}}(0+) = B$ .

После подстановки получаем:  $12,5 = 25 + \hat{A}$ , откуда  $\hat{A} = -12,5$ .

Окончательное выражение закона изменения тока  $i$ :

$$i = 25 - 12,5e^{-500t} \text{ А}.$$

### Задача 2

Найти закон изменения тока  $i$  в схеме ([рис. 5.24](#)), если  $U = 50 \text{ В}$ ,  $R = R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $\tilde{N} = 5 \text{ мкФ}$ .

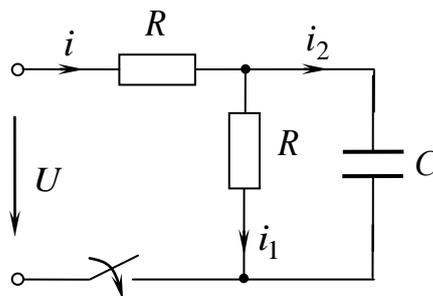


Рис. 5.24

Решение

Вариант 1

1. Система уравнений электрического состояния в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} i - i_1 - i_2 = 0, \\ Ri + u_C = U, \\ Ri + R_1 i_1 = U. \end{cases}$$

2. Ищем закон изменения величины, подчиняющейся законам коммутации:

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

3. Вычислим принужденную составляющую  $u_{C\text{пр}}$  при  $t = \infty$ .

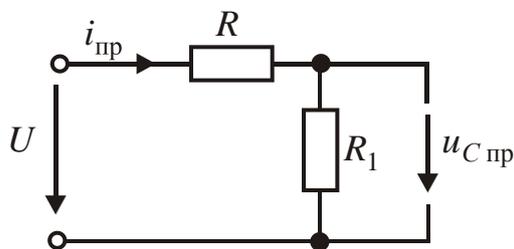


Рис. 5.25

Конденсатор постоянный ток не пропускает, поэтому вместо емкостного элемента в схеме будет разрыв (рис. 5.25).

Схема одноконтурная, ток в ней  $i_{\text{пр}} = \frac{U}{R + R_1} = \frac{50}{4} = 12,5$  А.

Напряжение  $u_{C\text{пр}} = R_1 i_{\text{пр}} = 2 \cdot 12,5 = 25$  В.

4. Свободная составляющая меняется по закону экспоненты:  $u_{C\text{св}} = Ae^{pt}$ .

4.1. Ищем корень характеристического уравнения  $p$ . Закорачиваем источник ЭДС, учтенный входным напряжением, разрываем ветвь с емкостным элементом (рис. 5.26).

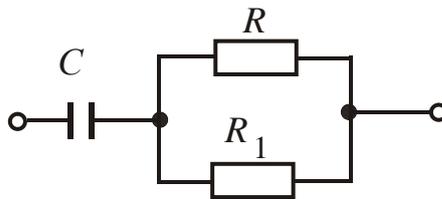


Рис. 5.26

Резисторы заменяем одним, с эквивалентным сопротивлением

$$R_3 = \frac{R \cdot R_1}{R + R_1} = 1 \text{ Ом.}$$

В неразветвленной RC-цепи

$$p = -\frac{1}{R_3 C} = -\frac{10^6}{5} = -2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  ищем из начальных условий с использованием второго закона коммутации. При  $t = 0+$

$$u_C(0+) = u_{C_{\text{пр}}}(0+) + u_{C_{\text{св}}}(0+); u_C(0+) = u_C(0-).$$

До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $u_C(0-) = 0$ . Принужденная составляющая является постоянной величиной, поэтому  $u_{C_{\text{пр}}}(0+) = 25$  В. Свободная составляющая напряжения на конденсаторе сразу после коммутации  $u_{C_{\text{св}}}(0+) = A$ .

После подстановки получаем:  $0 = 25 + A$ , отсюда  $A = -25$  В.

Тогда закон изменения напряжения  $u_C$  во время переходного процесса имеет вид

$$u_C = 25 - 25e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ В.}$$

5. Ищем закон изменения тока  $i$  из уравнения  $Ri + u_C = U$ .

$$\text{Отсюда } i = \frac{U - u_C}{R} = \frac{50 - 25 + 25e^{-2 \cdot 10^5 t}}{2} = 12,5 - 12,5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А.}$$

График изменения тока представлен на [рис. 5.27](#).

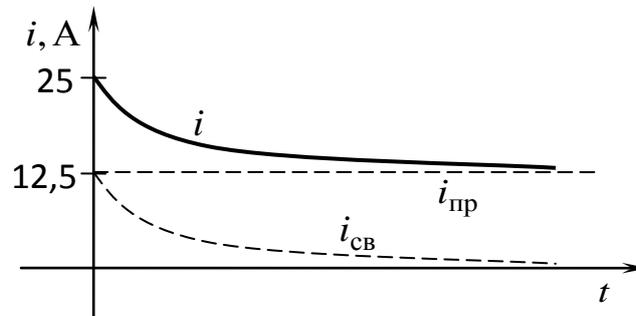


Рис. 5.27

Вариант 2

1. Ищем закон изменения тока как сумму принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

2. Найдем  $i_{\text{пр}}$  (см. вариант 1, п. 3):  $i_{\text{пр}} = 12,5 \text{ A}$ .

3. Свободная составляющая меняется по закону экспоненты:

$$i_{\text{св}} = B e^{pt}.$$

3.1. Вычислим показатель степени  $p$  (см. [вариант 1, п. 4.1](#)):

$$p = -2 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}.$$

3.2. Постоянную интегрирования ищем из начальных условий с использованием законов коммутации:

$$i(0+) = i_{\text{пр}}(0+) + i_{\text{св}}(0+).$$

Значение тока  $i(0+)$  – зависимое начальное условие, которое ищут в два этапа.

Этап 1. В схеме при  $t = 0-$  определим независимое начальное условие (см. вариант 1, п. 4.2):

$$u_C(0-) = 0.$$

Этап 2. В схеме при  $t = 0+$ , которую составляем с учетом независимых начальных условий, определяем  $i(0+)$ . Напряжение  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ , поэтому вместо емкостного элемента будет «закоротка» ([рис. 5.28](#)).

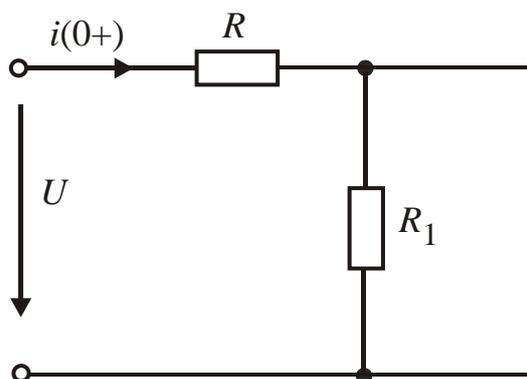


Рис. 5.28

Ток от источника будет замыкаться по пути наименьшего сопротивления, т. е. по «закоротке», следовательно, ток  $i(0+) = \frac{U}{R} = \frac{50}{2} = 25$

А. При  $t = 0+$  составляющие тока  $i_{пр}(0+) = 12,5$  А,  $i_{св}(0+) = B$ .

После подстановки получаем:  $25 = 12,5 + B$ , отсюда  $B = 12,5$  А.

Ток  $i$  меняется по закону:

$$i = 12,5 + 12,5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А.}$$

Решите самостоятельно [задачу 3](#).

### Задача 3

Найти закон изменения тока  $i_1$  в схеме ([рис. 5.29](#)), если  $U = 50$  В,  $R = R_1 = 2$  Ом,  $C = 2$  мкФ.

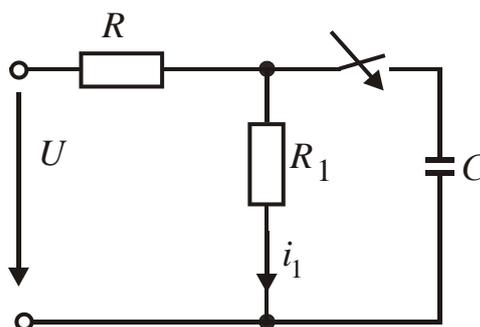


Рис. 5.29

Ответ:  $i_1 = 12,5 - 12,5e^{-5 \cdot 10^5 t}$  А.

### Задача 4

Найти закон изменения тока  $i$  в схеме ([рис. 5.30](#)), если  $U = 50$  В,  $R = 10$  Ом,  $C = 1$  мкФ.

Решение

Вариант 1

1. Система уравнений электрического состояния в дифференциальной форме:

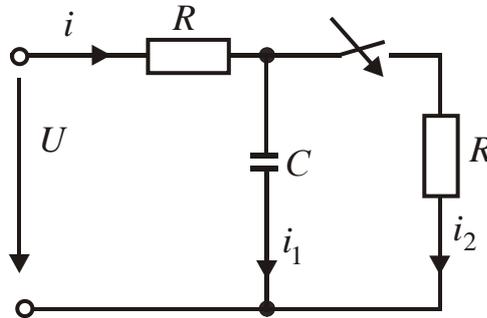


Рис. 5.30

$$\begin{cases} i - i_1 - i_2 = 0, \\ Ri + u_C = U, \\ Ri + Ri_2 = U. \end{cases}$$

2. Ищем закон изменения величины, подчиняющейся законам коммутации:

$$u_C = u_{C\text{ пр}} + u_{C\text{ св}}.$$

3. Вычислим принужденную составляющую  $u_{C\text{ пр}}$  при  $t = \infty$ .

Конденсатор постоянный ток не пропускает, поэтому вместо емкостного элемента в схеме будет разрыв ([рис. 5.31](#)).

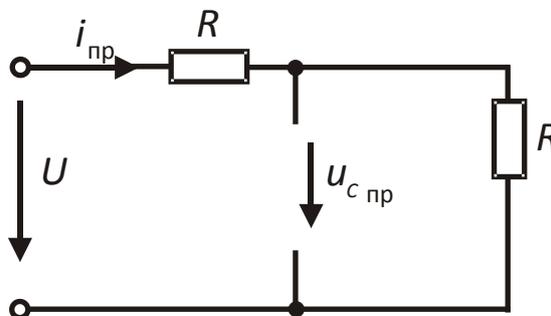


Рис. 5.31

Схема одноконтурная, ток в ней  $i_{\text{пр}} = \frac{U}{2R} = \frac{50}{20} = 2,5$  А. Напряжение  $u_{C\text{пр}} = Ri_{\text{пр}} = 10 \cdot 2,5 = 25$  В.

4. Свободная составляющая меняется по закону экспоненты:  $u_{C\text{св}} = Ae^{pt}$ .

4.1. Ищем корень характеристического уравнения  $p$ . Закорачиваем источник ЭДС, разрываем ветвь с емкостным элементом (рис. 5.32).

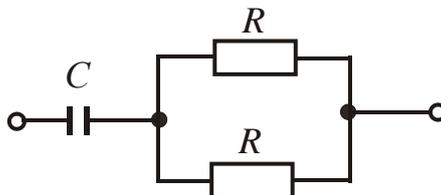


Рис. 5.32

Резисторы заменяем одним с эквивалентным сопротивлением  $R_3 = \frac{R}{2} = 5$  Ом.

В неразветвленной RC-цепи

$$p = -\frac{1}{R_3 C} = -\frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} = -2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянная времени  $\tau = R_3 C$ .

4.2. Постоянную интегрирования  $A$  ищем из начальных условий с использованием второго закона коммутации. При  $t = 0+$

$$u_C(0+) = u_{C\text{пр}}(0+) + u_{C\text{св}}(0+).$$

До коммутации тока в цепи не было, так как конденсатор постоянный ток не пропускает. Из уравнения  $Ri(0-) + u_C(0-) = U$  получаем  $u_C(0-) = U = 50$  В. Конденсатор был заряжен до величины входного напряжения.

Принужденная составляющая является постоянной величиной, поэтому  $u_{C\text{пр}}(0+) = 25$  В. Свободная составляющая напряжения на конденсаторе сразу после коммутации  $u_{C\text{св}}(0+) = A$ .

После подстановки получаем:  $50 = 25 + A$ , отсюда  $A = 25$  В.

Тогда закон изменения напряжения  $u_C$  во время переходного процесса имеет вид  $u_C = 25 + 25e^{-2 \cdot 10^5 t}$  В.

5. Ищем закон изменения тока  $i$  из уравнения  $Ri + u_C = U$ .

$$\text{Отсюда } i = \frac{U - u_C}{R} = \frac{50 - 25 - 25e^{-2 \cdot 10^5 t}}{10} = 2,5 - 2,5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А.}$$

График изменения тока представлен на [рис. 5.33](#).

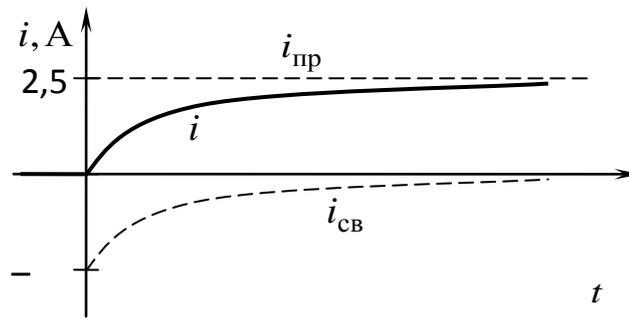


Рис. 5.33

### Вариант 2

1. Ищем закон изменения тока как сумму принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

2. Найдем  $i_{\text{пр}}$  (см. [вариант 1, п. 3](#)):  $i_{\text{пр}} = 2,5 \text{ A}$ .

3. Свободная составляющая меняется по закону экспоненты:

$$i_{\text{св}} = B e^{pt}.$$

3.1. Вычислим показатель степени  $p$  (см. [вариант 1, п. 4.1](#)):

$$p = -2 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}.$$

3.2. Постоянную интегрирования ищем из начальных условий с использованием законов коммутации:

$$i(0+) = i_{\text{пр}}(0+) + i_{\text{св}}(0+).$$

Значение тока  $i(0+)$  – зависимое начальное условие, которое ищут в два этапа.

Этап 1. В схеме при  $t = 0-$  определяем независимые начальные условия (см. вариант 1, п. 4.2):

$$u_C(0-) = 50 \text{ В}.$$

Этап 2. В схеме при  $t = 0+$ , которую составляем с учетом независимых начальных условий, определяем  $i(0+)$ . Напряжение  $u_C(0+) = u_C(0-) = 50 \text{ В}$ .

Известное напряжение можно учесть источником ЭДС такого же напряжения, направленным противоположно (рис. 5.34).

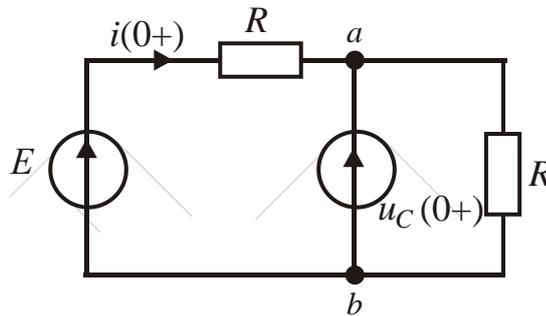


Рис. 5.34

Напряжение  $u_{ab}(0+) = u_C(0+) = E - Ri(0+)$ .

Отсюда  $i(0+) = \frac{E - u_C(0+)}{R} = \frac{50 - 50}{10} = 0$ . При  $t = 0+$  составляющие тока

$$i_{\text{пр}}(0+) = 2,5 \text{ А}, \quad i_{\text{св}}(0+) = B.$$

После подстановки получаем:  $0 = 2,5 + B$ , откуда  $B = -2,5 \text{ А}$ .

Ток  $i$  меняется по закону:

$$i = 2,5 - 2,5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А}.$$

### Задача 5

Найти закон изменения тока  $i_2$  в схеме рис. 5.35, если  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $L = 2 \text{ Гн}$ .

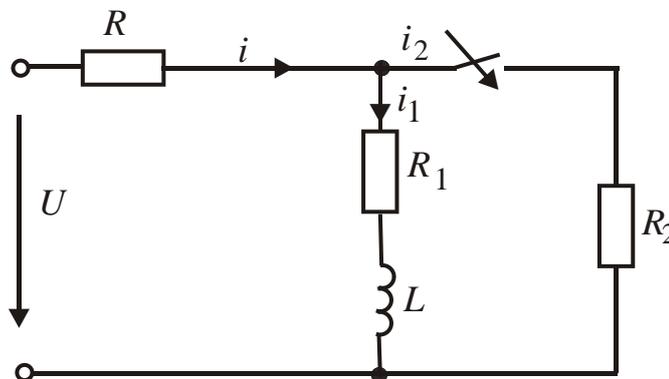


Рис. 5.35

Решение

Вариант 1

1. Составим систему уравнений электрического состояния в дифференциальной форме, включая в нее уравнение, связывающее искомую величину (ток  $i_2$ ) с величиной, подчиняющейся закону коммутации (током  $i_1$ ):

$$\begin{cases} i - i_1 - i_2 = 0; \\ R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 = 0; \\ Ri + R_2 i_2 = U. \end{cases}$$

2. Ищем закон изменения тока  $i_1 = i_{1пр} + i_{1св}$ .

3. Вычислим принужденную составляющую при  $t = \infty$ , так как теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Цепь подключена к источнику постоянного напряжения, поэтому вместо индуктивного элемента будет «закоротка» (рис. 5.36).

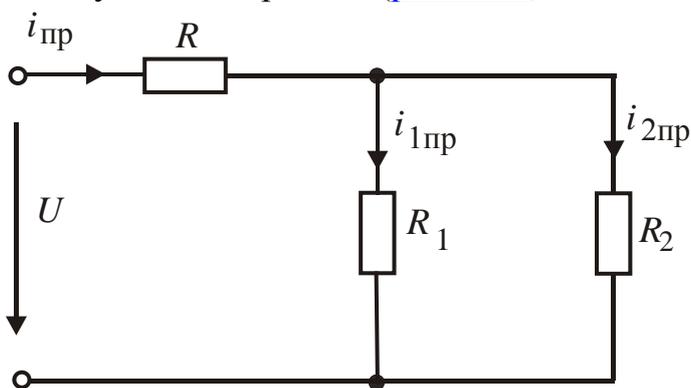


Рис. 5.36

Вспользуемся методом эквивалентных преобразований. Эквивалентное сопротивление

$$R_3 = R + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 8 + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 20 \text{ Ом.}$$

$$\text{Ток } i_{пр} = \frac{U}{R_3} = \frac{100}{20} = 5 \text{ А.}$$

Ток  $i_{1пр}$  можно вычислить по формуле для определения тока в одной из двух пассивных параллельных ветвей:

$$i_{1пр} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_{пр} = \frac{30}{50} \cdot 5 = 3 \text{ А.}$$

По первому закону Кирхгофа ток  $i_{2пр} = i_{пр} - i_{1пр} = 5 - 3 = 2$  А.

4. Свободная составляющая  $i_{1св} = Ae^{pt}$ .

4.1. Для нахождения показателя степени  $p$  перейдем к одноконтурной схеме. Закоротим источник ЭДС, разорвем ветвь с индуктивным элементом (рис. 5.37).

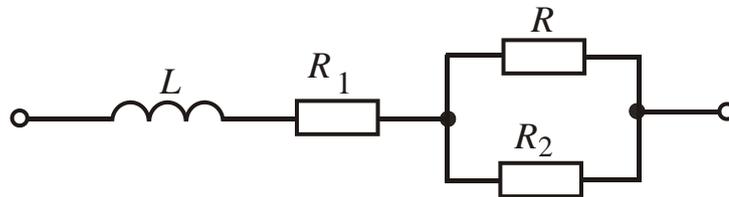


Рис. 5.37

Эквивалентное сопротивление этой схемы

$$R_3 = R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 20 + \frac{8 \cdot 30}{8 + 30} = 26,32 \text{ Ом.}$$

В неразветвленной RL-цепи

$$p = -\frac{R_3}{L} = -\frac{26,32}{2} = -13,16 \text{ с}^{-1}.$$

4.2. Постоянную интегрирования  $A$  ищем из начальных условий с использованием законов коммутации.

При  $t = 0+$   $i_1(0+) = i_{1пр}(0+) + i_{1св}(0+)$ .

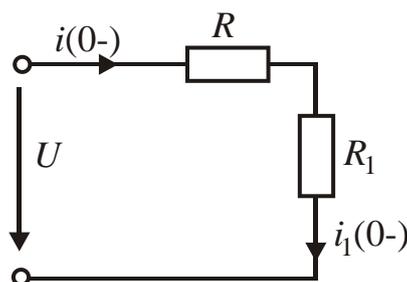


Рис. 5.38

По первому закону коммутации  $i_1(0+) = i_L(0+) = i_L(0-)$ . Найдем ток  $i_1(0-)$  в схеме при  $t = 0-$  (рис. 5.38). Схема одноконтурная, поэтому

$$i_1(0-) = i(0-) = \frac{U}{R + R_1} = \frac{100}{28} = 3,57 \text{ А.}$$

Принужденная составляющая является постоянной величиной, поэтому  $i_{1\text{пр}}(0+) = 3$  А. Свободная составляющая тока  $i_{1\text{св}}(0+) = A$ . После подстановки получим уравнение

$$3,57 = 3 + A.$$

Отсюда  $A = 0,57$ .

Ток  $i_1$  меняется по закону:

$$i_1 = 3 + 0,57e^{-13,16t} \text{ А.}$$

5. Ищем закон изменения тока  $i_2$  из уравнения  $R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } i_2 &= \frac{R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt}}{R_2} = \frac{20(3 + 0,57e^{-13,16t}) + 2(-13,16)0,57e^{-13,16t}}{30} = \\ &= \frac{60 + 11,4e^{-13,16t} - 15e^{-13,16t}}{30} = 2 - 0,12e^{-13,16t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Вариант 2

1. Ищем закон изменения тока  $i_2$  как сумму принужденной и свободной составляющих:

$$i_2 = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}}.$$

2. Вычислим  $i_{2\text{пр}}$  (см. вариант 1, п. 3):  $i_{2\text{пр}} = 2$  А.

3. Свободная составляющая меняется по закону:

$$i_{2\text{св}} = B e^{pt}.$$

3.1. Найдем показатель степени  $p$  (см. вариант 1, п. 4.1):

$$p = -13,16 \text{ с}^{-1}.$$

3.2. Постоянную интегрирования  $B$  найдем из начальных условий с использованием первого закона коммутации:

$$i_2(0+) = i_{2\text{пр}}(0+) + i_{2\text{св}}(0+).$$

Значение тока  $i_2(0+)$  – зависимое начальное условие, которое ищут в два этапа.

Этап 1. В схеме при  $t=0-$  определим независимое начальное условие ток  $i_1(0-)$  (см. вариант 1, п. 4.2):

$$i_1(0-) = 3,57 \text{ А.}$$

Этап 2. В схеме при  $t=0+$ , составленной с учетом независимого начального условия, ищем ток  $i_2(0+)$ . В индуктивном элементе есть ток, поэтому вместо него – источник тока, совпадающий по направлению с  $i_1(0-)$ . Известное напряжение можно учесть источником ЭДС такого же напряжения, направленным противоположно (рис. 5.39).

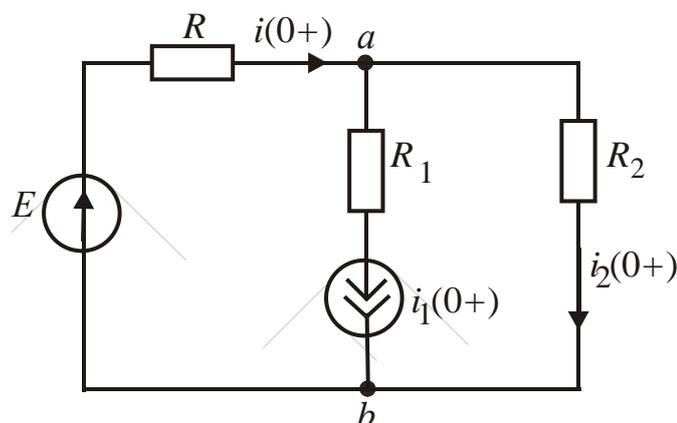


Рис. 5.39

Наиболее рационально вычислить ток  $i_2(0+)$  методом напряжения между двумя узлами. Напряжение

$$U_{ab}(0+) = \frac{\frac{E}{R} - i_1(0+)}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{100}{8} - 3,57}{\frac{1}{8} + \frac{1}{30}} = \frac{8,93}{0,158} = 56,52 \text{ В.}$$

$$\text{Ток } i_2(0+) = \frac{U_{ab}(0+)}{R_2} = \frac{56,52}{30} = 1,88 \text{ А.}$$

Принужденная составляющая тока  $i_{2пр}(0+) = 2 \text{ А}$ . Свободная составляющая  $i_{2св}(0+) = B$ . После подстановки получим

$$1,88 = 2 + B.$$

Отсюда  $B = -0,12$ .

Тогда закон изменения тока  $i_2$  имеет вид

$$i_2 = 2 - 0,12e^{-13,16t}.$$

Задачи 6–13 решите для самоконтроля.

**Задача 6**

Вычислить начальные значения токов  $i_L(0+)$ ,  $i_1(0+)$ ,  $i_2(0+)$  в схеме рис. 5.41, если  $U = 40$  В,  $R_1 = R_2 = 20$  Ом,  $L = 2$  Гн.

Ответ:  $i_L(0+) = 2$  А,  $i_1(0+) = 1$  А,  $i_2(0+) = 1$  А.

**Задача 7**

Вычислить принужденные составляющие токов  $i_{Lпр}$ ,  $i_{1пр}$ ,  $i_{2пр}$  в схеме рис. 5.40, если  $U = 40$  В,  $R_1 = R_2 = 20$  Ом,  $L = 2$  Гн.

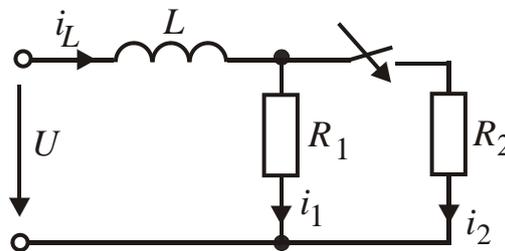


Рис. 5.40

Ответ:  $i_{Lпр} = 4$  А,  $i_{1пр} = 2$  А,  $i_{2пр} = 2$  А.

**Задача 8**

Определить длительность переходного процесса в схеме задачи 6.

Ответ:  $t_{пш} = (0,6 - 1)$  с.

**Задача 9**

Вычислить принужденные составляющие токов  $i_{пр}$ ,  $i_{1пр}$ ,  $i_{Lпр}$  и напряжения  $u_{Lпр}$  в схеме рис. 5.41, если  $U = 40$  В,  $R = R_1 = 10$  Ом,  $L = 5$  Гн.

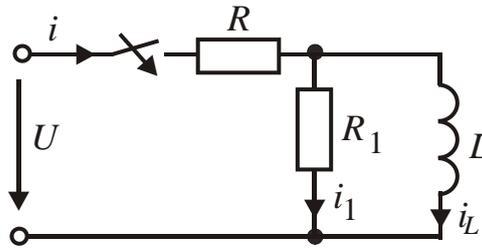


Рис. 5.41

Ответ:  $i_{\text{пр}} = 4 \text{ А}$ ,  $i_{1\text{пр}} = 0$ ,  $i_{L\text{пр}} = 4 \text{ А}$ ,  $u_{L\text{пр}} = 0$ .

### Задача 10

Определить начальные значения токов  $i(0+)$ ,  $i_1(0+)$ ,  $i_L(0+)$  и напряжение  $u_L(0+)$  для схемы задачи 9.

Ответ:  $i(0+) = 2 \text{ А}$ ,  $i_1(0+) = 2 \text{ А}$ ,  $i_L(0+) = 0$ ,  $u_L(0+) = 20 \text{ В}$ .

### Задача 11

Найти принужденные составляющие токов  $i_{\text{пр}}$ ,  $i_{1\text{пр}}$ ,  $i_{C\text{пр}}$  и напряжения  $u_{C\text{пр}}$  в схеме [рис. 5.42](#), если  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R = R_1 = 50 \text{ Ом}$ ,  $C = 4 \text{ мкФ}$ .

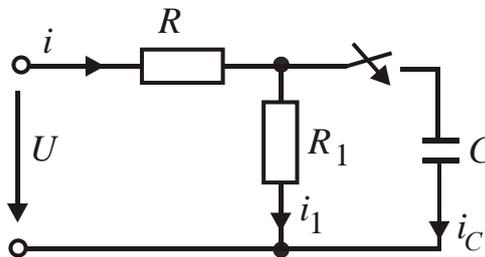


Рис. 5.42

Ответ:  $i_{\text{пр}} = 1 \text{ А}$ ,  $i_{1\text{пр}} = 1 \text{ А}$ ,  $i_{C\text{пр}} = 0$ ,  $u_{C\text{пр}} = 50 \text{ В}$ .

### Задача 12

Вычислить начальные значения токов  $i(0+)$ ,  $i_C(0+)$ ,  $i_1(0+)$  и напряжения  $u_C(0+)$  в схеме [рис. 5.43](#), если  $U = 40 \text{ В}$ ,  $R = R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ .

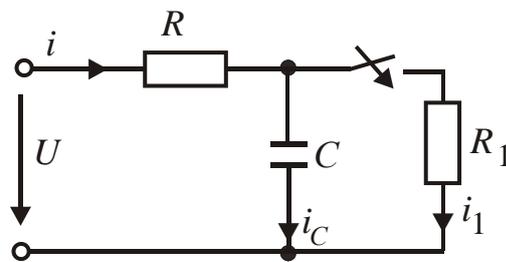


Рис. 5.43

Ответ:  $i(0+) = 0$ ,  $i_C(0+) = -2$  А,  $i_1(0+) = 2$  А,  $u_C(0+) = 40$  В.

### Задача 13

Определить практическую длительность переходного процесса для схемы на [рис. 5.43](#).

Ответ:  $t_{\text{пп}} = (3 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5})$  с.

# ГЛАВА 6

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться находить рабочую точку графическим методом в неразветвленной цепи с одним нелинейным элементом.
2. Научиться находить рабочую точку графическим методом в разветвленной цепи с одним нелинейным элементом.
3. Научиться находить рабочую точку графическим методом в разветвленной цепи с несколькими нелинейными элементами.

Для цепи с двумя последовательно соединенными элементами, один из которых – линейный (рис. 6.1), рационально отыскание рабочей точки на пересечении вольт-амперной характеристики (ВАХ) нелинейного элемента (НЭ) с зеркальным отображением ВАХ линейного элемента.

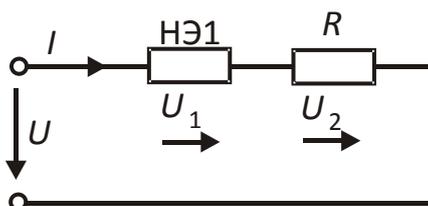


Рис. 6.1

Решение этим методом поясняет рис. 6.2. Строим ВАХ НЭ  $I(U_1)$ . В рабочей точке на основании второго закона Кирхгофа напряжение  $U_1 = U - U_2$ . Построим график  $I(U - U_2)$ , который является зеркальным отображением графика  $I(U_2)$ , смещенного вправо на величину входного напряжения  $U$ . Так как ВАХ линейного элемента является прямой линией, то для построения графика  $I(U - U_{ЛЭ})$  нужны только две точки, одна из которых с координатами  $(U, 0)$ . Очевидно, что графики пересекаются в рабочей точке  $A$ . Находим соответствующие ей значения тока  $I$  и напряжений  $U_1$  и  $U_2$ .

Для разветвленной схемы с одним нелинейным элементом, ток в котором и надо найти, в решении как промежуточный можно использовать метод эквивалентного генератора. Делим схему на две части: НЭ и всю остальную часть схемы, которая является активным двухполюсником.

Активный двухполюсник заменим эквивалентным ему генератором. Активный двухполюсник является линейной цепью, расчет которой намного проще, чем нелинейной. ЭДС генератора  $E_{Г}$  равна напряжению холостого хода на зажимах активного двухполюсника. Сопротивление  $R_{Г}$  – это

эквивалентное сопротивление пассивного двухполюсника относительно входных зажимов. Пассивный двухполюсник получаем из активного, закорачивая источники ЭДС и разрывая источники тока. Полученная схема представляет собой последовательное соединение нелинейного и линейного элементов.

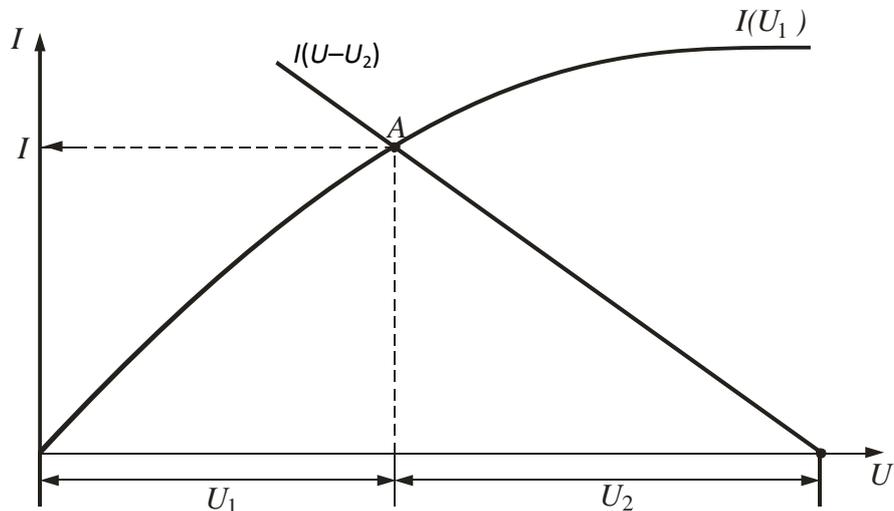


Рис. 6.2

Рабочую точку рационально найти на пересечении ВАХ НЭ и зеркального изображения ВАХ линейного элемента (рис. 6.2). График  $I(E_{\Gamma} - U_{R_{\Gamma}})$  является прямой линией, зеркально отображающей график  $I(U_{R_{\Gamma}})$ , смещенный вправо на величину  $E_{\Gamma}$ . Для его построения нужны две точки. Одна из них с координатами  $(E_{\Gamma}, 0)$ .

Для построения второй точки можно задаться произвольным значением тока  $I_j$ . Соответствующее ему напряжение  $U_{R_j} = R_{\Gamma} I_j$  отложим от значения  $E_{\Gamma}$  влево. Отыскав рабочую точку  $A$ , найдем соответствующее ей значение тока  $I$ .

### Задача 1

Вычислить сопротивление  $R$  линейного элемента в схеме рис. 6.3, если входное напряжение  $U = 120$  В, напряжение на лампочке  $U_{\text{л}} = 75$  В, ВАХ лампочки задана табл. 6.1.

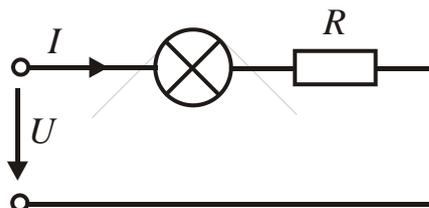


Рис. 6.3

Решение

1. Построим ВАХ лампочки (рис. 6.4).

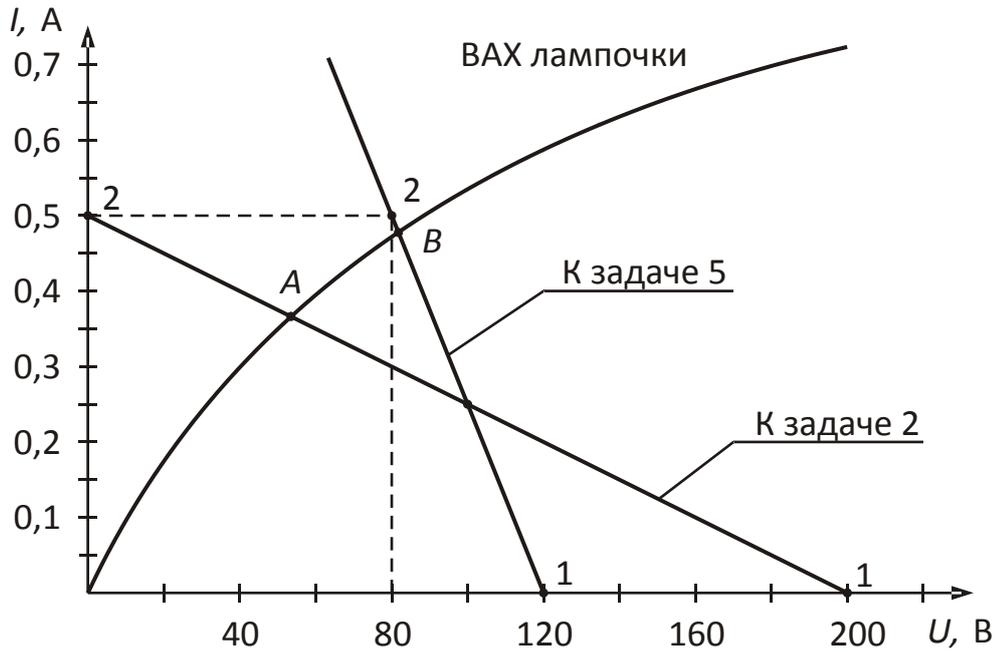


Рис. 6.4

2. Сопротивление  $R = \frac{U_R}{I}$ .

3. По второму закону Кирхгофа напряжение  $U_R = U - U_{\text{л}} = 120 - 75 = 45 \text{ В}$ .

4. Найдем ток схемы по ВАХ лампочки. При  $U_{\text{л}} = 75 \text{ В}$  ток  $I \approx 0,425 \text{ А}$ .

Тогда  $R = \frac{45}{0,425} = 106 \text{ Ом}$ .

Таблица 6.1

$U, \text{ В}$	0	10	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
$I, \text{ А}$	0	0,18	0,3	0,425	0,5	0,6	0,67	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,75

Задача 2

Найти ток в схеме рис. 6.3, если  $U = 200 \text{ В}$ ,  $R = 400 \text{ Ом}$ .

Решение

Отыщем рабочую точку на пересечении ВАХ лампочки и зеркального отображения ВАХ линейного элемента, которое можно построить по двум точкам. Первая из них с координатами (200 В; 0). Для построения второй точки зададимся произвольным значением тока, например  $I_j = 0,5$  А. Тогда  $U_{R_j} = R \cdot I_j = 400 \cdot 0,5 = 200$  В. Отложим напряжение  $U_{R_j}$  от  $U = 200$  В влево. Получим вторую точку с координатами (0; 0,5 А). Рабочая точка  $A$  находится на пересечении двух графиков (см. рис. 6.4). Ей соответствует значение тока  $I \approx 0,38$  А.

[Задачи 3](#) и [4](#) решите самостоятельно.

### Задача 3

Вычислить входное напряжение в схеме [рис. 6.5](#), если ток  $I = 0,18$  А.

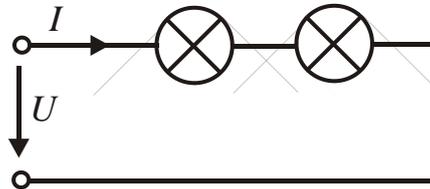


Рис. 6.5

Ответ:  $U = 40$  В.

### Задача 4

Вычислить мощность, потребляемую лампочкой в схеме [рис. 6.3](#) при входном напряжении  $U = 180$  В, если при входном напряжении  $U = 220$  В напряжение на лампочке  $U_{л} = 127$  В.

Ответ:  $P_{л} = 50$  Вт.

### Задача 5

Вычислить мощность, потребляемую лампочкой в схеме [рис. 6.6](#), если  $U = 150$  В,  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 400$  Ом, ВАХ лампочки приведена на [рис. 6.4](#).

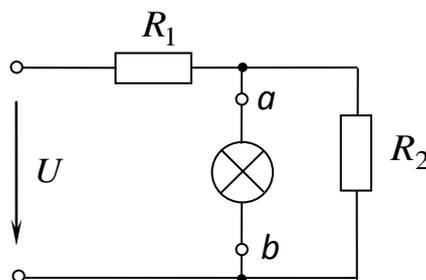


Рис. 6.6

Решение

1. Заменяем схему эквивалентной ей одноконтурной с помощью метода эквивалентного генератора. Разделим схему на две части: лампочку и всю остальную схему – активный двухполюсник ([рис. 6.7](#)), который заменим эквивалентным ему генератором. ЭДС генератора

$$E_{\Gamma} = U_{xx} = R_2 \cdot I_{xx}.$$

$$\text{Ток } I_{xx} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0,3 \text{ А.}$$

$$\text{Тогда } E_{\Gamma} = 400 \cdot 0,3 = 120 \text{ В.}$$

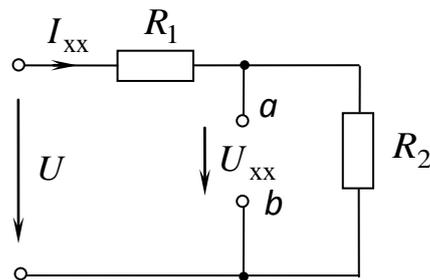


Рис. 6.7

Схема пассивного двухполюсника приведена на [рис. 6.8](#).  
Сопротивление

$$R_{\Gamma} = R_{ab} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 400}{100 + 400} = 80 \text{ Ом.}$$

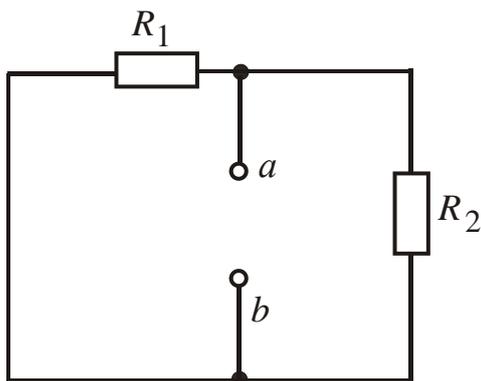


Рис. 6.8

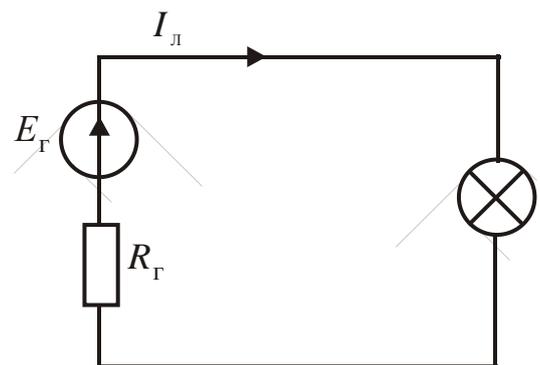


Рис. 6.9

Получившаяся одноконтурная схема изображена на [рис. 6.9](#).

2. Найдем рабочую точку на пересечении ВАХ лампочки с зеркальным отображением ВАХ линейного резистора. Одна точка для построения графика  $I(E_{\Gamma} - U_{R_{\Gamma}})$  – с координатами (120 В; 0). Для построения второй

точки зададимся значением тока  $I_j = 0,5$  А. Тогда  $U_{R_j} = R_r \cdot I_j = 0,5 \cdot 80 = 40$  В. Отложим 40 В от 120 В влево и получим точку с координатами (80 В; 0,5 А). Проведем прямую через эти две точки (см. [рис. 6.4](#)). Рабочая точка В позволяет определить  $U_{л} \approx 83$  В и  $I_{л} \approx 0,45$  А.

Мощность, потребляемая лампочкой,

$$P_{л} = U_{л} I_{л} = 83 \cdot 0,45 \approx 37,4 \text{ Вт.}$$

Задачу 6 решите самостоятельно.

### Задача 6

Найти все токи в схеме [рис. 6.6](#), если  $U = 380$  В,  $R_1 = 300$  Ом,  $R_2 = 600$  Ом.

Ответ:  $I_1 = 0,8$  А;  $I_2 = 0,22$  А;  $I_{л} = 0,58$  А.

### Задача 7

Вычислить напряжение на входе схемы [рис. 6.6](#), если  $R_1 = 50$  Ом,  $R_2 = 100$  Ом, ток  $I_{л} = 0,2$  А, ВАХ лампочки приведена на [рис. 6.10](#).

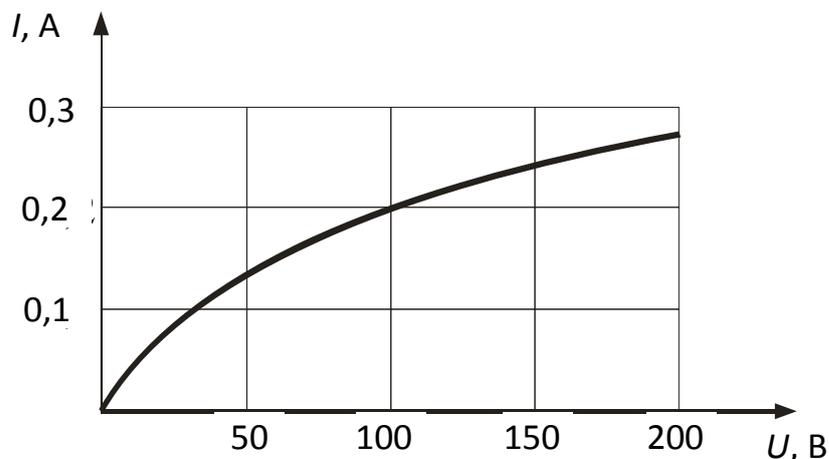


Рис. 6.10

### Решение

1. По ВАХ лампочки найдем напряжение между двумя узлами, равное напряжению на лампочке:

$$U_{12} = U_{л} = 100 \text{ В.}$$

2. Вычислим ток  $I_2$  по закону Ома

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{100}{100} = 1 \text{ А.}$$

3. Вычислим ток  $I_1$  по первому закону Кирхгофа

$$I_1 = I_2 + I_{л} = 1 + 0,2 = 1,2 \text{ А.}$$

4. Вычислим входное напряжение по второму закону Кирхгофа

$$U = R_1 I_1 + U_{12} = 50 \cdot 1,2 + 100 = 160 \text{ В.}$$

### Задача 8

Найти ток в неразветвленной части цепи схемы [рис. 6.11](#), если  $U = 100$  В, все лампочки одинаковые. ВАХ лампочки приведена на [рис. 6.12](#).

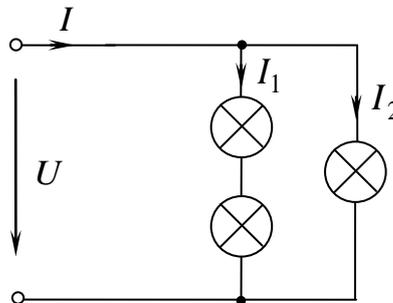


Рис. 6.11

### Решение

1. По ВАХ лампочки найдем ток  $I_2 = 0,6$  А.  
 2. В ветви с последовательным соединением двух одинаковых лампочек на каждой лампочке напряжение  $U_{л} = \frac{U}{2} = 50$  В.

3. По ВАХ лампочки найдем ток  $I_1 = 0,4$  А.

4. По первому закону Кирхгофа найдем ток

$$I = I_1 + I_2 = 0,4 + 0,6 = 1 \text{ А.}$$

Задачи 9–11 решите самостоятельно.

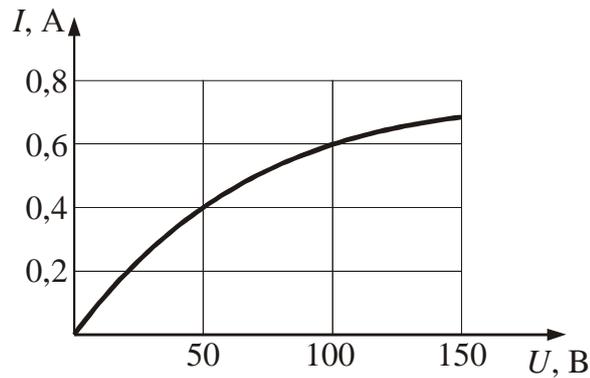


Рис. 6.12

### Задача 9

Найти напряжение на входе схемы [рис. 6.11](#), если ток  $I_1 = 0,4$  А и все лампочки одинаковые. ВАХ лампочки приведена на [рис. 6.12](#).

Ответ:  $U = 100$  В.

### Задача 10

Вычислить ток в неразветвленной части схемы [рис. 6.11](#), если ток  $I_1 = 0,4$  А и все лампочки одинаковые. ВАХ лампочки приведена на [рис. 6.12](#).

Ответ:  $I = 1$  А.

### Задача 11

Найти напряжение на входе схемы [рис. 6.13](#), если ток  $I_1 = 0,2$  А и все лампочки одинаковые. ВАХ лампочки приведена на [рис. 6.14](#).

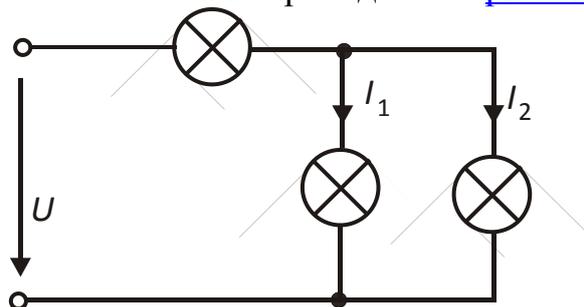


Рис. 6.13

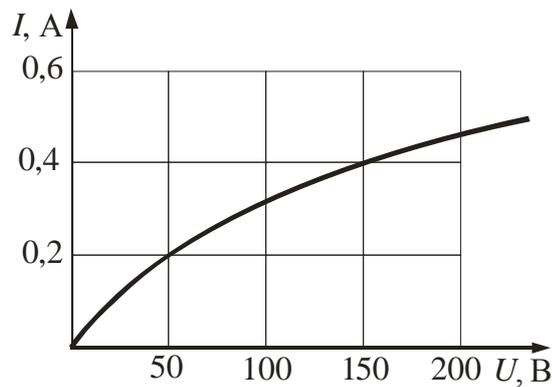


Рис. 6.14

Ответ:  $U = 200$  В.

## Занятие 2

*Цели занятия:*

1. Научиться вычислять ток в нелинейном элементе методом итерации (последовательных приближений).
2. Научиться численному решению нелинейных уравнений методом Ньютона – Рафсона.

Сущность метода итерации (последовательных приближений) заключается в аналитическом решении системы алгебраических нелинейных уравнений. Статическое сопротивление нелинейного элемента должно быть задано в функции от тока или напряжения.

Пусть в схеме один нелинейный элемент (НЭ), ток в котором и надо найти. Остальную часть схемы (активный двухполюсник) заменим эквивалентным ему генератором (рис. 6.15).

Графическая иллюстрация решения методом итерации приведена на рис. 6.16.

Напряжение на нелинейном элементе  $U = E_{\Gamma} - R_{\Gamma}I$ . Ток зависит от статического сопротивления НЭ, которое, в свою очередь, зависит от напряжения, поэтому это уравнение является нелинейным:  $U = F(U)$ .

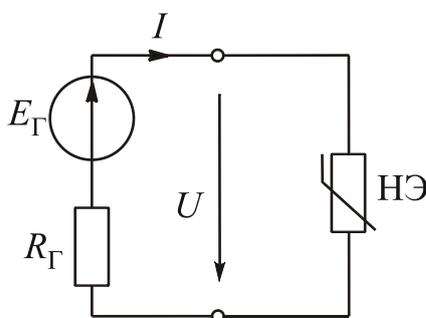


Рис. 6.15

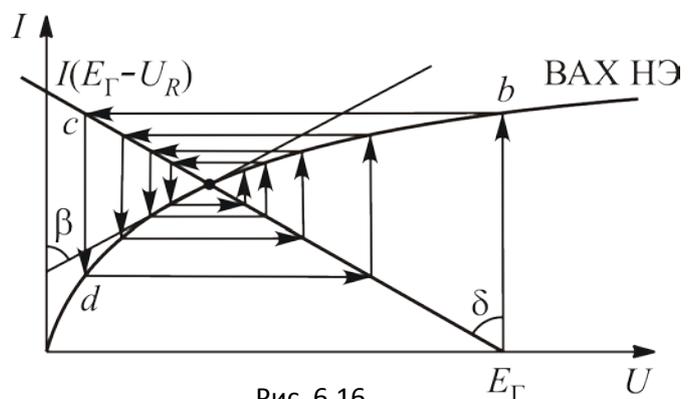


Рис. 6.16

Пусть напряжение в нулевом приближении  $U_0 = E_\Gamma$ . На ВАХ НЭ находим соответствующую рабочую точку  $b$ . Так как ток в схеме один, то току  $I_0$  на графике  $I(E_\Gamma - R_\Gamma I)$  соответствует точка  $c$ . Напряжение на НЭ  $U = E_\Gamma - R_\Gamma I$ , поэтому переходим из точки  $c$  в точку  $d$ . Повторяя этот процесс, получаем рабочую точку  $A$ .

Итерационный процесс может быть организован различными методами. Наиболее эффективным считается метод Ньютона – Рафсона. Пусть нелинейное уравнение  $f(x) = 0$  имеет единственный корень  $x = x_{k+1}$ . В окрестности этого корня функция  $f(x_{k+1})$  разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + \Delta x_k \cdot f'(x_k) = 0$$

Отсюда следует  $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ , где  $\Delta x_k = h = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  – поправка

к предыдущему решению. Из приведенных соотношений следует алгоритм метода Ньютона – Рафсона:

1. Задаем начальное приближенное значение искомого решения  $x_0$  ( $k = 0$ ).
2. Определяем поправку  $h_0$ . Для ее вычисления по выражению функции находим производную.
3. Определяем уточненное значение корня  $x_1 = x_0 + h_0$ .
4. Повторяем процесс на следующем шаге и уточняем предыдущее решение до необходимой точности.

Геометрическая интерпретация метода приведена на [рис. 6.17](#). В качестве начального приближения примем  $U_0 = E_\Gamma$ . В точке  $a$  проводим касательную к ВАХ НЭ, по касательной переходим на график  $I(E_\Gamma - R_\Gamma I)$  в точку  $b$ , далее в точку  $c$  на ВАХ НЭ, снова проводим касательную и т. д. Из рисунка видно, что число шагов, необходимых для нахождения решения в случае применения метода Ньютона – Рафсона, значительно меньше, чем при обычном итерационном процессе ([рис. 6.16](#)).

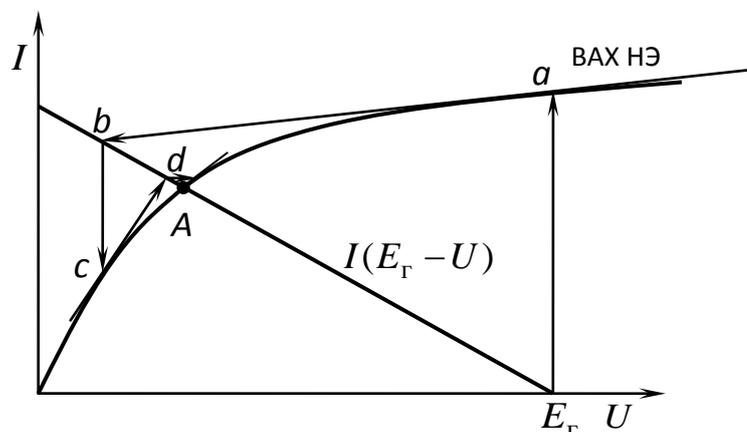


Рис. 6.17

Задача 1

Вычислить ток  $I_H$  (рис. 6.18) с точностью до пятого знака после запятой, если  $J_1 = J_4 = 1$  А,  $E_2 = 10$  В,  $E_3 = 20$  В,  $R_1 = R_2 = R_3 = 5$  Ом,  $R_4 = R_5 = 4$  Ом,  $U_H = 2I_H^2$ .

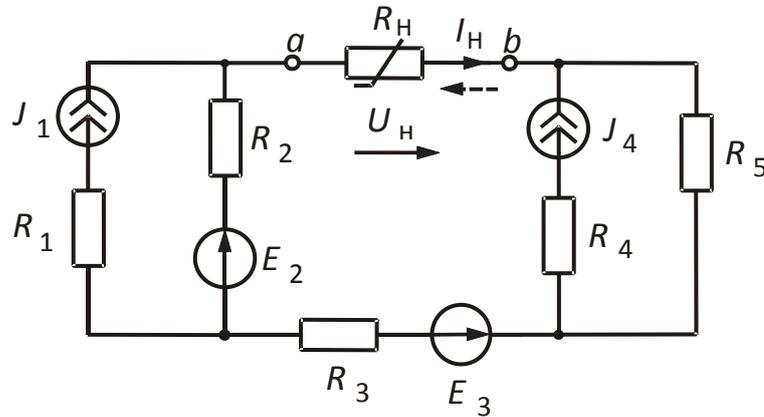


Рис. 6.18

Решение

1. Заменяем схему эквивалентной ей одноконтурной с током  $I_H$ . Для этого разделим схему на две части: нелинейный элемент и всю остальную схему, которая является активным двухполюсником (рис. 6.19). Активный двухполюсник заменим эквивалентным ему генератором. Активный двухполюсник содержит две одноконтурные схемы, токи в которых соответственно  $J_1$  и  $J_4$ . ЭДС эквивалентного генератора равно  $U_{xx} = -R_5 J_4 - E_3 + E_2 + R_2 J_1 = -4 \cdot 1 - 20 + 10 + 5 \cdot 1 = -9$  В.

Знак минус показывает, что напряжение  $U_{xx}$ , следовательно, и ток  $I_H$  направлены противоположно указанным на схемах рис. 6.18 и 6.19.

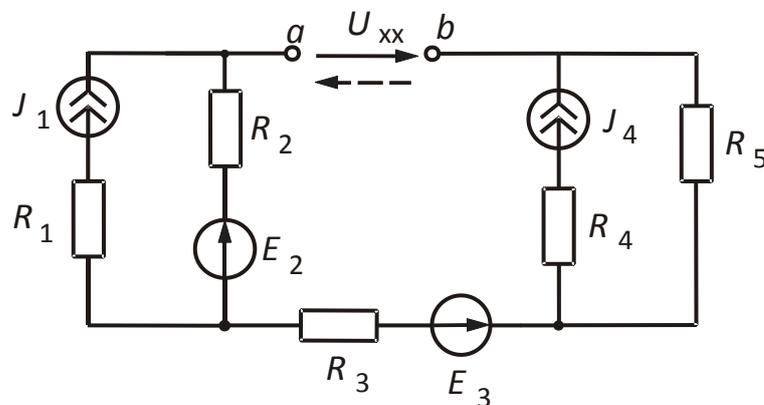


Рис. 6.19

Пассивный двухполюсник представлен на рис. 6.20. Очевидно, что

$$R_{\Gamma} = R_2 + R_3 + R_5 = 5 + 5 + 4 = 14 \text{ Ом.}$$

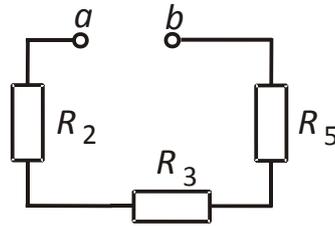


Рис. 6.20

Схема превратилась в одноконтурную, аналогичную представленной на [рис. 6.15](#).

2. Найдем рабочую точку графическим методом на пересечении ВАХ нелинейного элемента с зеркальным отображением ВАХ линейного резистора. ВАХ нелинейного элемента задана зависимостью  $U_{\text{н}} = 2I_{\text{н}}^2$ . При токе  $I_{\text{н}} = 1 \text{ А}$  напряжение  $U_{\text{н}} = 2 \text{ В}$ . При токе  $I_{\text{н}} = 1,5 \text{ А}$  напряжение  $U_{\text{н}} = 4,5 \text{ В}$ , при токе  $I_{\text{н}} = 2 \text{ А} - U_{\text{н}} = 8 \text{ В}$  ([рис. 6.21](#)).

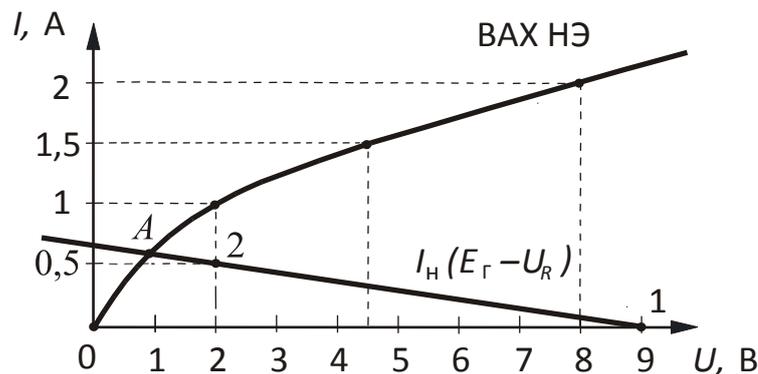


Рис. 6.21

Зеркальное отображение ВАХ линейного резистора строим по двум точкам. Первая – с координатами  $(E_{\Gamma}; 0)$ , т. е.  $(9; 0)$ . Чтобы получить вторую точку, примем, например, ток  $I_2 = 0,5 \text{ А}$ . Тогда  $U_{R_2} = R_{\Gamma} \cdot I_2 = 14 \cdot 0,5 = 7 \text{ В}$ . Это напряжение надо отложить влево от точки 1.

Получаем рабочую точку  $A$ . Ток  $I_{\text{н}} \approx 0,6 \text{ А}$ .

3. Вычислим ток  $I_{\text{н}}$  методом итерации. По закону Ома ток

$$I_{k+1} = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ст}}(I_k)},$$

где  $k$  – номер приближения.

Примем  $I_0 = 0,6$  А. Сопротивление  $R_{\text{ст}} = \frac{U_{\text{н}}}{I_{\text{н}}} = \frac{2I_{\text{н}}^2}{I_{\text{н}}} = 2I_{\text{н}}$ .

Данные расчета сведем в [табл. 6.2](#).

Таблица 6.2

$k$	$I_k, \text{А}$	$R_{\text{ст}}(I_k), \text{Ом}$	$I_{k+1}, \text{А}$
0	0,6	1,2	0,59210
1	0,59210	1,18421	0,59272
2	0,59272	1,18544	0,59267
3	0,59267	1,18534	0,59268
4	0,59268	1,18535	0,59268

Ток  $I_{\text{н}} = 0,59268$  А.

4. Вычислим ток  $I_{\text{н}}$  методом Ньютона – Рафсона. Для схемы, представленной на рис. 6.15, справедливо выражение  $R_{\Gamma} \cdot I_{\text{н}} + U_{\text{н}} = E_{\Gamma}$ , из которого получим  $f(I_{\text{н}}) = 2 \cdot I_{\text{н}}^2 + R_{\Gamma} \cdot I_{\text{н}} - E_{\Gamma} = 0$ , где  $2I_{\text{н}}^2 = U_{\text{н}}$ .

Производная  $f'(I_{\text{н}}) = 4 \cdot I_{\text{н}} + R_{\Gamma}$ . Выберем значение тока  $I_{\text{н}0} = 0,6$  А, тогда уточненное решение после первого шага будет

$$I_{\text{н}1} = I_{\text{н}0} - \frac{f(I_{\text{н}0})}{f'(I_{\text{н}0})} = 0,6 - \frac{2 \cdot 0,6^2 + 14 \cdot 0,6 - 9}{4 \cdot 0,6 + 14} = 0,59268 \text{ А.}$$

Верное решение получилось сразу после первой итерации. В качестве исходного приближения возьмем ток  $I_{\text{н}0} = 0$  А, тогда  $I_{\text{н}1} = 0,64286$  А,  $I_{\text{н}2} = 0,59298$  А,  $I_{\text{н}3} = 0,59268$  А. Мы видим, что итерационный процесс сходится за три шага. Это дает возможность взять начальное приближение, не строя графически ВАХ.

### Задача 2

Вычислить ток  $I_{\text{н}}$  в схеме рис. 6.21 с точностью до пятого знака после запятой, если  $E = 20$  В,  $J = 2$  А,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = R_3 = 6$  Ом,  $R_{\text{н}} = 0,8I_{\text{н}}$ .

### Решение

1. Заменяем схему эквивалентной ей одноконтурной. Для этого заменим активный двухполюсник ([рис. 6.22](#)) эквивалентным ему генератором.

Выявим узлы ( $c$ ,  $d$ ), ветви, направим токи. ЭДС эквивалентного генератора

$$E_{\Gamma} = U_{\text{xx}} = R_1 \cdot I_{1\text{x}}.$$

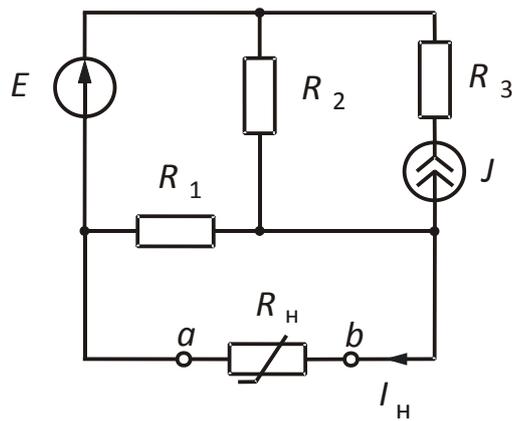


Рис. 6.22

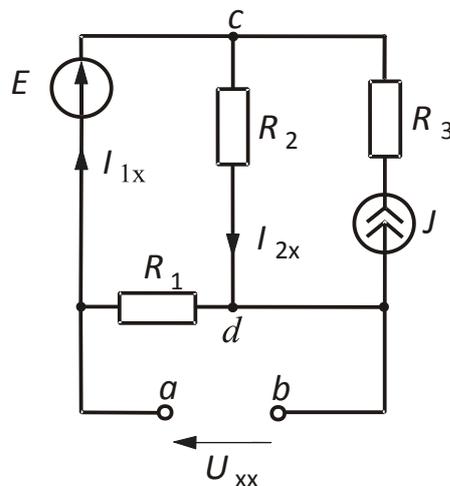


Рис. 6.23

Вычислим ток  $I_{1x}$  методом напряжения между двумя узлами.  
Напряжение

$$U_{cd} = \frac{\frac{E}{R_1} + J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{20}{5} + 2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = 16,36 \text{ В.}$$

Для ветви с искомым током

$$U_{cd} = -R_1 I_{1x} + E.$$

$$\text{Отсюда } I_{1x} = \frac{E - U_{cd}}{R_1} = \frac{20 - 16,36}{5} = 0,728 \text{ А.}$$

$$\text{Тогда } U_{xx} = 5 \cdot 0,728 = 3,64 \text{ В} = E_r.$$

Пассивный двухполюсник представлен на [рис. 6.24](#).

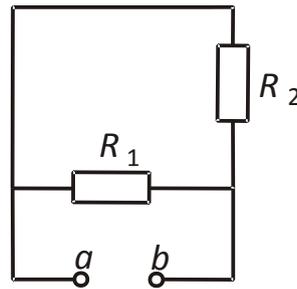


Рис. 6.24

Очевидно, что

$$R_{\Gamma} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 6}{5 + 6} = 2,73 \text{ Ом.}$$

2. Найдем рабочую точку графическим методом. ВАХ нелинейного элемента  $U_{\text{н}} = R_{\text{н}} I_{\text{н}} = 0,8 I_{\text{н}}^2$ . При токе  $I_{\text{н}} = 1$  А напряжение  $U_{\text{н}} = 0,8$  В, при токе  $I_{\text{н}} = 1,5$  А напряжение  $U_{\text{н}} = 1,8$  В, при токе 2 А –  $U_{\text{н}} = 3,2$  В ([рис. 6.25](#)).

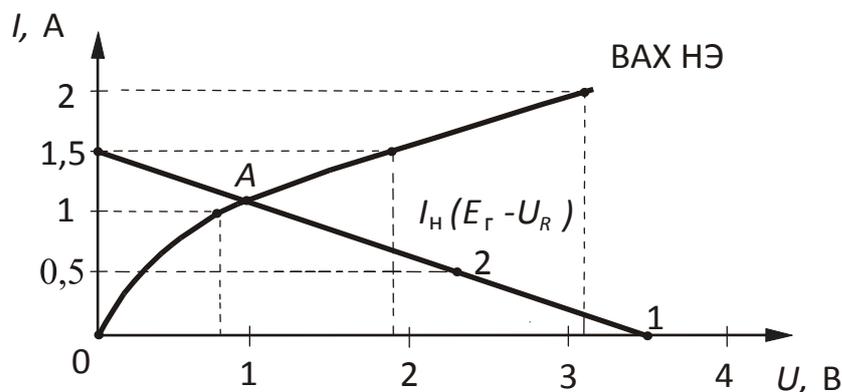


Рис. 6.25

Зеркальное отображение ВАХ линейного резистора строим по двум точкам. Точка 1 с координатами  $(E_{\Gamma}; 0)$ , т. е.  $(3,64; 0)$ . Для построения точки 2 примем  $I_2 = 0,5$  А. Тогда  $U_{R_2} = R_{\Gamma} \cdot I_2 = 1,36$  В. Напряжение  $E_{\Gamma} - U_{R_2} = 3,64 - 1,36 = 2,28$  В.

Получаем рабочую точку А. Ток  $I_{\text{н}} \approx 1,1$  А.

3. Вычислим ток  $I_{\text{н}}$  методом итерации.

По закону Ома

$$I_{k+1} = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_{\text{ст}}(I_k)},$$

где  $k$  – номер приближения.

Примем  $I_0 = 1$  А.

Данные расчета сведем в [табл. 6.3](#)

Таблица 6.3

$k$	$I_k$ , А	$R_{ст}(I_k)$ , Ом	$I_{k+1}$ , А
0	1	0,8	1,03116
1	1,03116	0,82493	1,02393
2	1,02393	0,81914	1,02560
3	1,02560	0,82048	1,02521
4	1,02521	0,82017	1,02530
5	1,02530	0,82024	1,02528
6	1,02528	0,82023	1,02528

Ток  $I_H = 1,02528$  А.

### Задача 3

Вычислить ток в нелинейном элементе схемы на [рис. 6.26](#) методом Ньютона – Рафсона, если  $J = 2$  А,  $E = 10$  В,  $R = 5$  Ом,  $U_H = 2I_H^2 + 1,2I_H + 5$ .

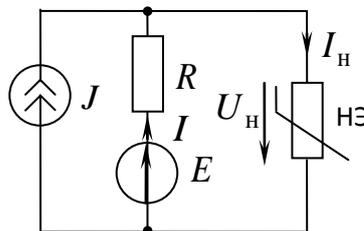


Рис. 6.26

### Решение

1. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$R \cdot I + U_H = E,$$

где  $I = I_H - J$ .

2. После подстановки выражений  $U_H$  и  $I$  получим нелинейное уравнение

$$f(I_H) = 2I_H^2 + 1,2I_H + 5 + R \cdot I_H - R \cdot J - E = 2I_H^2 + 6,2I_H - 15 = 0.$$

3. Найдем производную

$$f'(I_H) = 4 \cdot I_H + 6,2.$$

4. Выберем начальное приближение  $I_{H_0} = 3$  А. Тогда значение тока после первого шага будет

$$I_{H_1} = I_{H_0} - \frac{f(I_{H_0})}{f'(I_{H_0})} = 3 - \frac{2 \cdot 3^2 + 6,2 \cdot 3 - 15}{4 \cdot 3 + 6,2} = 1,81319 \text{ А.}$$

На втором и последующих шагах  $I_{H_2} = 1,60378$  А,  $I_{H_3} = 1,59683$  А,  $I_{H_4} = 1,59682$  А,  $I_{H_5} = 1,59682$  А.

### Занятие 3

*Цель занятия:* научиться расчету нелинейных цепей методом напряжения между двумя узлами.

Цепи с двумя узлами часто встречаются на практике. Рассмотрим метод на примере конкретной задачи.

#### Задача 1

Вычислить все токи в схеме на [рис. 6.27](#), если  $E_1 = 4$  В,  $E_2 = 6$  В,  $E_3 = 3$  В. ВАХ нелинейных элементов НЭ1, НЭ2, НЭ3 для первой четверти приведены соответственно в [табл. 6.4](#), [6.5](#), [6.6](#). ВАХ всех НЭ являются симметричными.

Таблица 6.4

$I_1,$ А	0	0,3	0,75	1,25	1,5	2	2,25	2,5	2,7	2,75	2,85	2,9	3
$U_1,$ В	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Таблица 6.5

$I_2,$ А	0	0,5	1	1,5	2	2,25	3
$U_2,$ В	0	2	4	6	6	6	6

Таблица 6.6

$I_3,$ А	0	0,25	0,35	0,5	0,75	1	1,5	2	2,25	2,5	2,75	3
$U_2$	0	1	2	3	4	5	6	6,5	7	7,5	8	8

В												
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

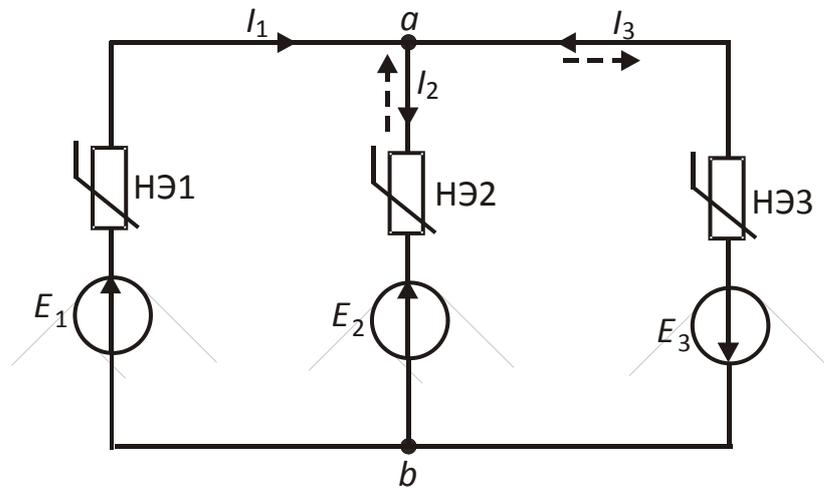


Рис. 6.27

*Решение*

1. Запишем уравнение на основании первого закона Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Для решения более удобна запись в виде  $I_2 = I_1 + I_3$ . Это уравнение является условием для нахождения рабочей точки.

2. Приведем токи к зависимости от одного аргумента. В условии токи ветвей заданы в функции от разных переменных:  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_2)$ ,  $I_3(U_3)$ . Общим для всех ветвей является напряжение между двумя узлами  $U_{ab}$ . Запишем выражения напряжения  $U_{ab}$  для всех трех ветвей схемы:

$$\begin{aligned} U_{ab} &= E_1 - U_1; \\ U_{ab} &= E_2 + U_2; \\ U_{ab} &= -E_3 - U_3. \end{aligned}$$

3. Построим графики токов  $I_1(U_{ab})$ ,  $I_2(U_{ab})$ ,  $I_3(U_{ab})$  на основании полученных уравнений. График  $I_1(U_{ab})$  является зеркальным отображением графика  $I_1(U_1)$ , смещенным по оси абсцисс вправо на величину ЭДС  $E_1 = 4$  В (рис. 6.28). График  $I_2(U_{ab})$  представляет собой график  $I_2(U_2)$ , смещенный вправо по оси абсцисс на величину ЭДС  $E_2 = 6$  В. График  $I_3(U_{ab})$  является зеркальным отображением графика  $I_3(U_3)$ , смещенным по оси абсцисс влево на величину ЭДС  $E_3 = 3$  В.

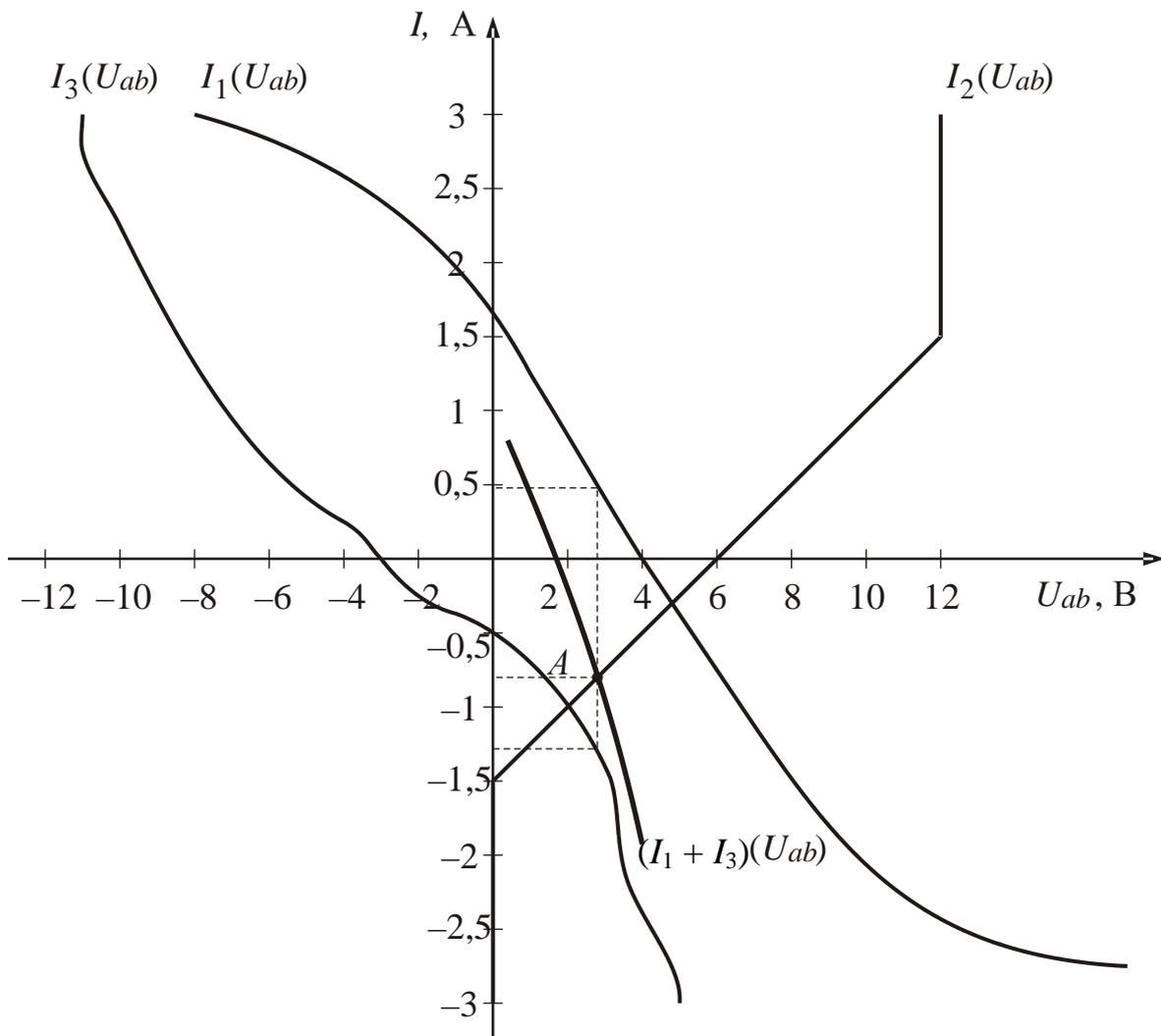


Рис. 6.28

4. Найдем рабочую точку на пересечении графиков  $(I_1 + I_3) = f(U_{ab})$  и  $I_2 = f(U_{ab})$ . Для получения графика  $(I_1 + I_3) = f(U_{ab})$  при ряде значений напряжения  $U_{ab}$  суммируем токи  $I_1$  и  $I_3$ .

5. Определим токи в ветвях и напряжение  $U_{ab}$ . Для этого через рабочую точку  $A$  проводим вертикаль. На ее пересечении с осью абсцисс получаем значение напряжения  $U_{ab} \approx 2,8$  В, на пересечении с графиками токов – токи  $I_1 \approx 0,48$  А,  $I_2 \approx -0,8$  А,  $I_3 \approx -1,28$  А.

Токи  $I_2$  и  $I_3$  получились с отрицательными знаками, что свидетельствует о неправильно выбранных направлениях этих токов.

Покажем верные направления токов  $I_2$  и  $I_3$  на [рис. 6.27](#) пунктирными стрелками.

[Задачи 2 и 3](#) решите самостоятельно. ВАХ нелинейных элементов такие же, что и в задаче 1.

### Задача 2

Вычислить все токи в схеме на [рис. 6.29](#), если  $E_1 = 5$  В,  $E_2 = 2$  В,  $E_3 = 6$  В.

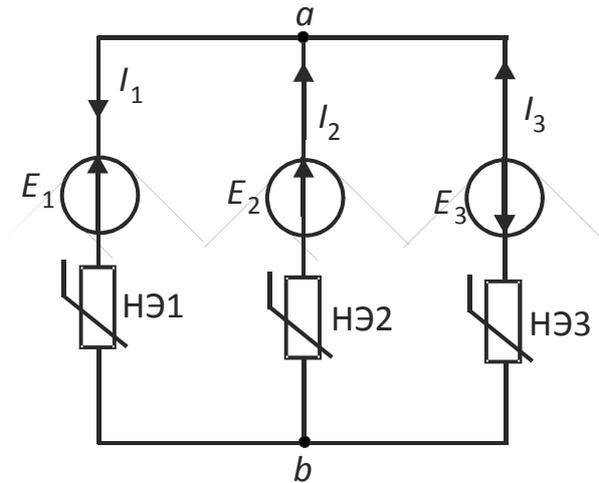


Рис. 6.29

Ответ:  $I_1 = -1,75$  А,  $I_2 = 0,35$  А,  $I_3 = -2,1$  А.

### Задача 3

Вычислить все токи в схеме [рис. 6.30](#), если  $E_1 = 5$  В,  $E_2 = 2$  В,  $E_3 = 6$  В.

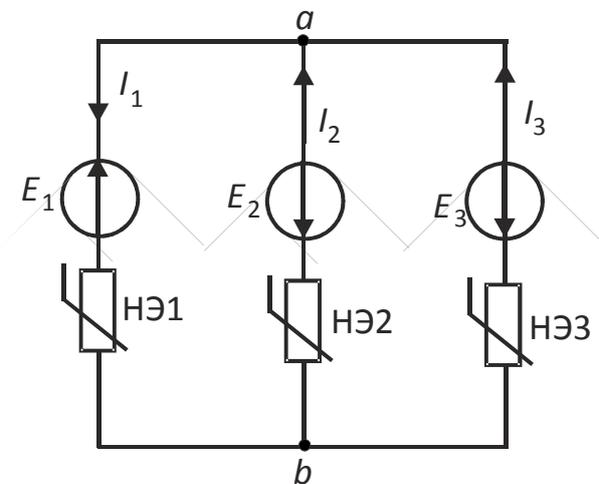


Рис. 6.30

Ответ:  $I_1 = -2$  А,  $I_2 = 0,5$  А,  $I_3 = -1,5$  А.

# ГЛАВА 7

## МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Ознакомиться с основными законами магнитных цепей.
2. Научиться решать прямую задачу в неразветвленной магнитной цепи.
3. Научиться решать обратную задачу в неразветвленной магнитной цепи.

При расчете магнитных цепей встречаются два вида задач: прямая и обратная. В прямой задаче определяют магнитодвижущую силу (МДС) катушки, необходимую для создания заданного потока, в обратной же по заданной МДС находят созданный ею магнитный поток.

В обоих случаях заданы геометрические размеры магнитопровода и кривая намагничивания ферромагнетика.

Порядок решения прямой задачи следующий:

1. Магнитную цепь разбивают на участки, отличающиеся друг от друга площадью поперечного сечения и материалом. Длины участков  $l_k$  берут по средней силовой линии.
2. Для каждого участка находят магнитные индукции, исходя из постоянства потока вдоль всей цепи, по формуле

$$B_k = \frac{\Phi}{S_k}.$$

3. По кривой намагничивания определяют напряженность магнитного поля для ферромагнитных участков цепи. Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре  $H_0 = B_0 / \mu_0 = 0,8 \cdot 10^6 B_0$ .

4. По закону полного тока вычисляют МДС катушки  $F = \sum H_k l_k$ .

Для решения обратной задачи используют формальную аналогию между магнитными и электрическими цепями. Схема замещения неразветвленной неоднородной магнитной цепи аналогична нелинейной электрической цепи с одним источником энергии и последовательным соединением элементов. При расчете электрических нелинейных цепей используют вольт-амперные характеристики (ВАХ). Аналогом ВАХ в магнитной цепи является вебер-амперная характеристика, т. е. зависимость  $\Phi(U_M)$ . Для построения вебер-амперной характеристики выбирают ряд значений  $\Phi_k$  и вычисляют для них магнитное напряжение  $U_{Mk}$ , как в прямой задаче. Произвольными значениями  $\Phi_k$  задаваться нельзя из-за явления

магнитного насыщения. Поэтому нужно выбирать ряд значений  $B_k$  из основной кривой намагничивания, а по ним вычислять  $\Phi_k = B_k S$ . Либо по  $B_{\max}$  вычислить  $\Phi_{\max} = B_{\max} \cdot S$ , остальные значения магнитного потока выбрать от 0 до  $\Phi_{\max}$ .

Решение обратной задачи заключается в отыскании рабочей точки по заданному значению МДС. Рабочую точку ищут на результирующей вебер-амперной характеристике либо на пересечении вебер-амперной характеристики сердечника с зеркальным изображением вебер-амперной характеристики воздушного промежутка.

В неразветвленной магнитной цепи поток один, а МДС  $F$  равна сумме магнитных напряжений отдельных участков. Поэтому для построения результирующей вебер-амперной характеристики складывают значения магнитных напряжений при одном потоке. Можно построить вебер-амперные характеристики для каждого участка цепи, а затем их сложить. Но такое решение является нерациональным. Лучше сразу строить результирующую характеристику, вычислив  $\sum U_{M_k}$  для выбранного ряда значений  $\Phi_k$ .

Способ отыскания рабочей точки по пересечению двух графиков рационально использовать при одинаковой площади поперечного сечения магнитопровода.

Рассмотрим решение прямой задачи на конкретном примере.

### Задача 1

Определить ток в обмотке катушки с ферромагнитным сердечником, если заданы геометрические размеры магнитопровода (рис. 7.1), основная кривая намагничивания (рис. 7.2), число витков  $W = 300$  и магнитный поток  $\Phi = 1,3 \cdot 10^{-4}$  Вб.

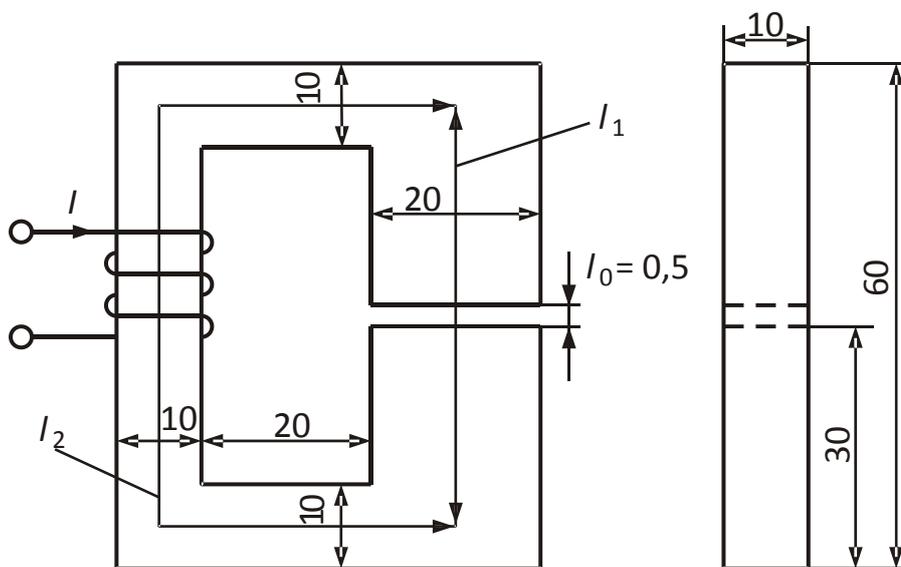


Рис. 7.1

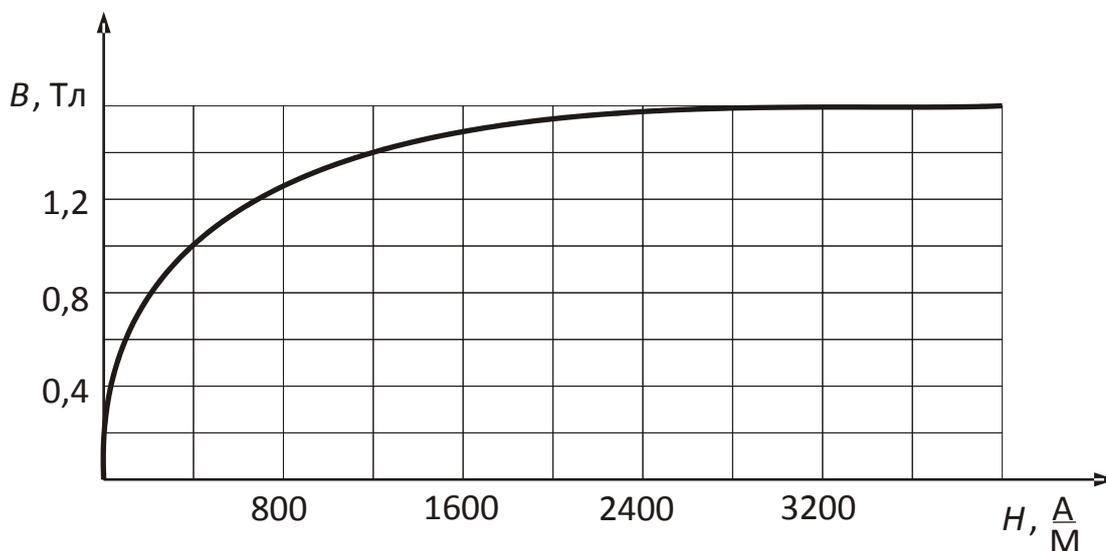


Рис. 7.2

*Решение*

1. Разбиваем магнитную цепь на три участка: два из ферромагнитного материала, отличающиеся площадью поперечного сечения, и воздушный зазор. На чертеже размеры заданы в мм, при расчете необходимо, чтобы  $[l] = \text{м}$ , а  $[S] = \text{м}^2$ .

Геометрические размеры участков цепи на [рис. 7.1](#) следующие (при определении  $l_1$  длиной воздушного промежутка  $l_0$  пренебрегаем):

$$l_1 = 0,05 \text{ м}; \quad S_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$l_2 = 0,12 \text{ м}; \quad S_2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$l_0 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad S_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. Вычисляем магнитную индукцию каждого участка. Так как  $S_1 = S_0$ ,

то 
$$B_1 = B_0 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{1,3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,65 \text{ Тл.}$$

Магнитную индукцию на втором участке найдем по формуле

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{1,3 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-4}} = 1,3 \text{ Тл.}$$

3. По основной кривой намагничивания, зная индукции  $B_1$  и  $B_2$ , определяем напряженности поля на ферромагнитных участках:  $H_1 = 150 \text{ А/м}$ ,

$H_2 = 850$  А/м. Напряженность поля в воздушном зазоре вычисляем по формуле

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,65 = 520 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$$

4. По закону полного тока вычисляем МДС:

$$F = \sum H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 = \\ = 150 \cdot 0,05 + 850 \cdot 0,12 + 520 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 369,5 \text{ А.}$$

Тогда ток в обмотке

$$I = \frac{F}{W} = \frac{369,5}{300} = 1,23 \text{ А.}$$

Рассмотрим решение обратной задачи на конкретных примерах.

### Задача 2

Определить магнитную индукцию в воздушном зазоре магнитной цепи задачи 1, если МДС катушки  $F = 500$  А.

#### Решение

Так как участки магнитопровода имеют разные сечения, то рабочую точку ищем на результирующей вебер-амперной характеристике. Для ее построения задаемся рядом значения магнитной индукции, охватывая весь интервал, на участке с меньшим сечением, чтобы на других участках значения индукции не превысили допустимых из-за явления магнитного насыщения величин. Меньшим сечением в рассматриваемом примере обладает участок 2. Значение индукции  $B_1 = B_0$  определяем по формуле  $B_1 = B_0 = \Phi / S_1 = B_2 S_2 / S_1$ .

Для каждого из значений магнитного потока решаем прямую задачу, как и задачу 1, и вычисляем  $\sum U_{m_k} = \sum H_k l_k$ . Результаты вычислений сводим в [табл. 7.1](#).

Таблица 7.1

$B_2$ , Тл	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$\Phi$ , Вб	0	$0,4 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
$B_1 = B_0$ , Тл	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$H_1$ , А/м	0	50	75	150	250
$H_2$ , А/м	0	75	250	600	3600

$H_0, \text{А/м}$	0	$16 \cdot 10^4$	$32 \cdot 10^4$	$48 \cdot 10^4$	$64 \cdot 10^4$
$\sum U_M = \sum H_k l_k, \text{А}$	0	91,5	193,75	319,5	764,5

По данным [табл. 7.1](#) строим зависимость  $\Phi = f(\sum U_M)$  (рис. 7.3).

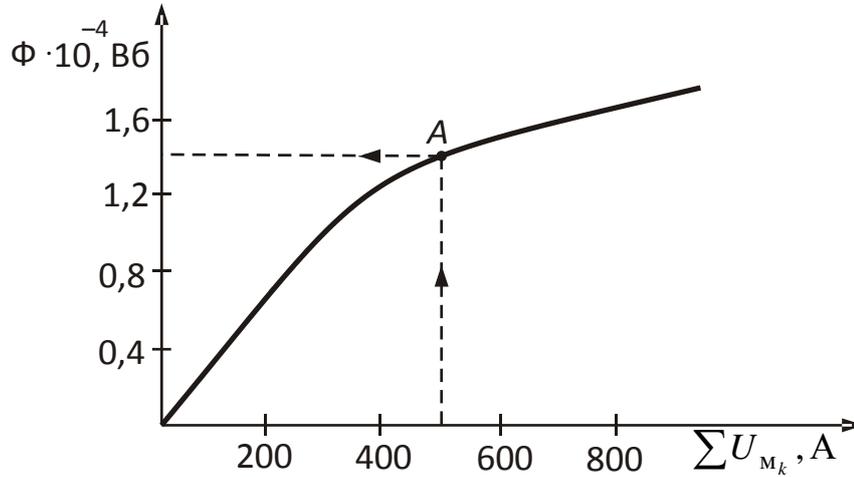


Рис. 7.3

По значению  $F = \sum U_M = 500$  А находим рабочую точку *A* и значение магнитного потока  $\Phi = 1,4 \cdot 10^{-4}$  Вб. Следовательно, магнитная индукция в воздушном зазоре

$$B_0 = \frac{\Phi}{S_0} = \frac{1,4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,7 \text{ Тл.}$$

### Задача 3

Определить поток, возникший в магнитной цепи ([рис. 7.4](#)), если в катушке с числом витков  $W = 300$  ток  $I = 4$  А. Материал сердечника тот же, что и в задаче 2. Воздушный зазор в месте каждого стыка составляет 0,25 мм.

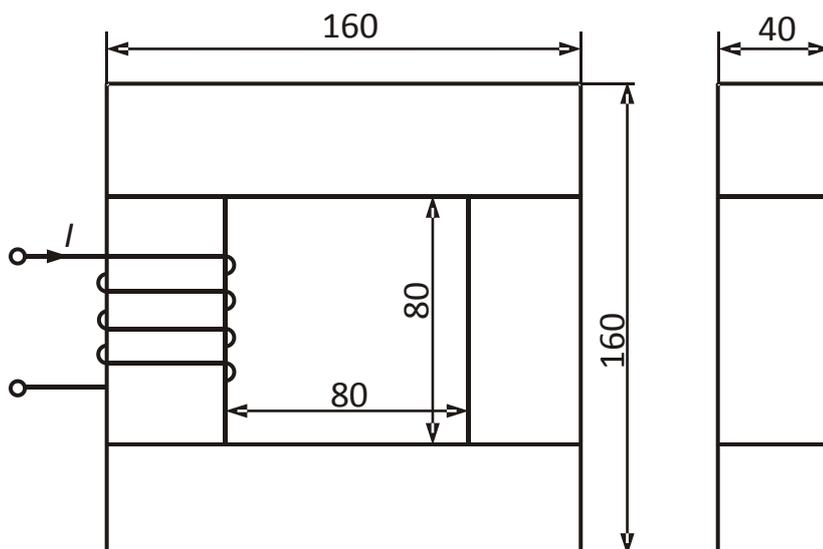


Рис. 7.4

*Решение*

Так как площадь поперечного сечения магнитопровода одинакова, то цепь можно разделить на два участка: состоящий из четырех стержней сердечника и суммарный воздушный зазор  $l_0$ .

Геометрические размеры участков следующие:

$$l = 0,48 \text{ м}; l_0 = 4 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} = 0,001 \text{ м}; S = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; S_0 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Эту задачу рационально решать вторым способом.

Результаты расчетов, нужные для построения вебер-амперной характеристики ферромагнитного сердечника, сведены в [табл. 7.2](#).

Таблица 7.2

$B$ , Тл	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$\Phi = B \cdot S$ , Вб	0	$6,4 \cdot 10^{-4}$	$12,8 \cdot 10^{-4}$	$19,2 \cdot 10^{-4}$	$25,6 \cdot 10^{-4}$
$H$ , А/м	0	75	250	600	3600
$U_m = H \cdot l$ , А	0	36	120	288	1728

По данным [табл. 7.2](#) строим зависимость  $\Phi = f(U_m)$  для сердечника ([рис. 7.5](#)). Ее характер аналогичен основной кривой намагничивания, так как  $B$  и  $H$  умножали на постоянные сомножители (соответственно  $S$  и  $l$ ).

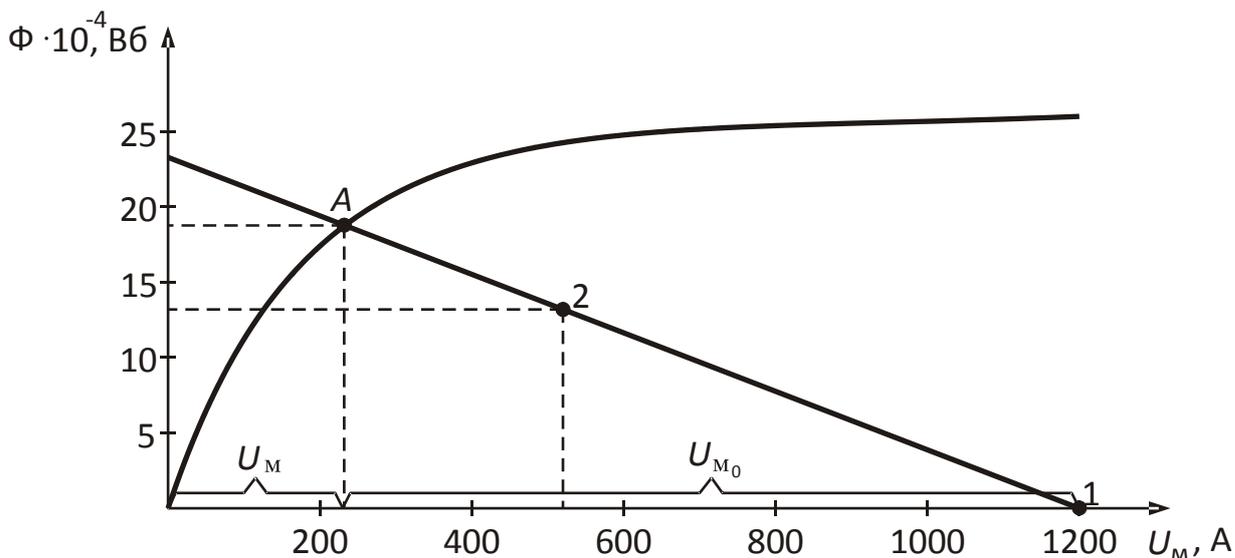


Рис. 7.5

Магнитное напряжение сердечника в рабочем режиме можно определить по закону полного тока:  $U_M = F - U_{M_0}$ . Очевидно, что графики  $\Phi = f(U_M)$  и  $\Phi = f(F - U_{M_0})$  пересекутся в рабочей точке. Вычитая из величины МДС  $F$  абсциссы зависимости  $\Phi = f(U_{M_0})$ , получаем абсциссы графика  $\Phi = f(F - U_{M_0})$ , т. е. график  $\Phi = f(F - U_{M_0})$  представляет собой зеркальное изображение зависимости  $\Phi = f(U_{M_0})$ , сдвинутое вправо от начала координат на величину МДС  $F$ . Вебер-амперная характеристика воздушного зазора – прямая линия. Для ее построения достаточно двух точек. Точку 1 получаем для значения  $\Phi = 0$ . При этом  $U_{M_0} = 0$ , а  $F - U_{M_0} = F = WI = 300 \cdot 4 = 1200$  А.

Чтобы получить точку 2, задаемся каким-либо значением  $\Phi$ , не выходящим за пределы, обусловленные явлением магнитного насыщения. Например, выберем  $\Phi = 12,8 \cdot 10^{-4}$  Вб. Величина магнитной индукции в зазоре  $B_0 = B = 0,8$  Тл, напряженность магнитного поля зазора  $H_0 = 0,8 \cdot 10^6$  Вб/А, магнитное напряжение  $U_{M_0} = H_0 l_0 = 640$  А, а  $F - U_{M_0} = 1200 - 640 = 560$  А. По этим двум точкам строим график  $\Phi = f(F - U_{M_0})$  и находим рабочую точку А. Опустив перпендикуляры на оси потока и магнитного напряжения, получим значения  $\Phi = 18,8 \cdot 10^{-4}$  Вб,  $U_{M_0} = 940$  А,  $U_M = 260$  А.

## Занятие 2

*Цели занятия:*

1. Научиться составлять систему уравнений по закона Кирхгофа для магнитных цепей.

2. Научиться решать прямую задачу для разветвленной магнитной цепи.
3. Научиться решать обратную задачу для разветвленной магнитной цепи.
4. Научиться решать смешанную задачу для разветвленной магнитной цепи.

Разветвленные симметричные магнитные цепи часто встречаются на практике. Пример такой цепи приведен на [рис. 7.6](#). Магнитную цепь делят по оси симметрии на две одинаковые части и рассчитывают их как неразветвленные. Магнитные потоки в них одинаковы и составляют половину потока среднего стержня  $\Phi_1 = \Phi_3 = 0,5\Phi_2$ .

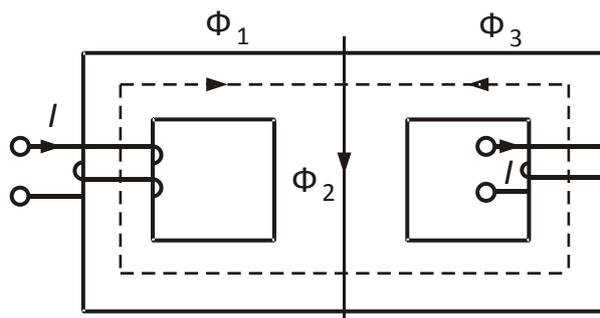


Рис. 7.6

Пример разветвленной несимметричной магнитной цепи приведен на [рис. 7.7](#). Наносим средние силовые линии, по которым вычисляем линейные размеры, определяем направления МДС и указываем направления магнитных потоков. Делим цепь на участки, отличающиеся сечением и материалом. При расчетах удобно пользоваться схемой замещения магнитной цепи и аналоговой ей электрической схемой ([рис. 7.8, а, б](#)).

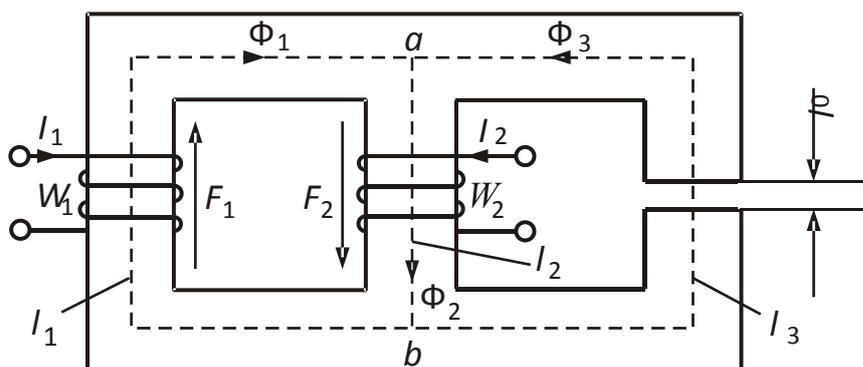


Рис. 7.7

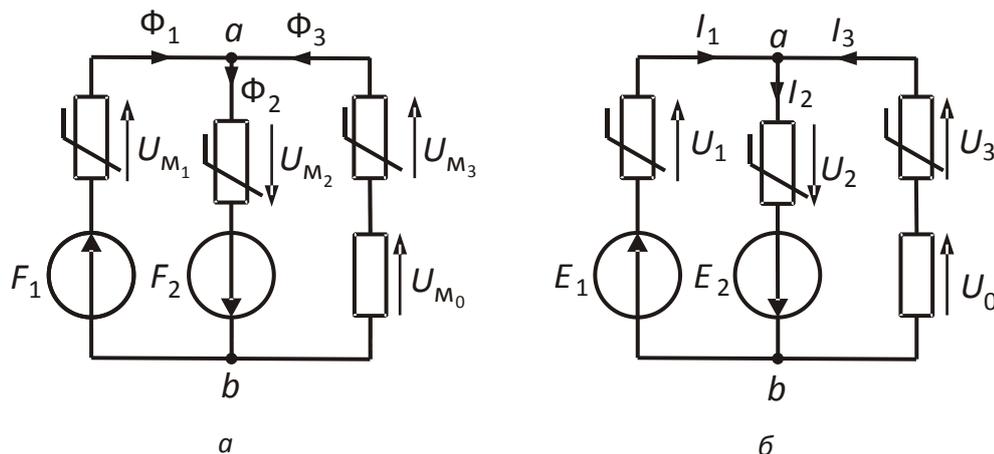
При расчете разветвленных магнитных цепей различают три типа задач: прямая, обратная и смешанная.

В прямой задаче известны геометрические размеры  $l_1, l_2, l_3, l_0, S_1, S_2, S_3$ , основная кривая намагничивания материала сердечника  $B(H)$ , магнитные потоки  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ . Нужно вычислить создавшие их МДС  $F_1$  и  $F_2$ .

Для решения задачи составим систему уравнений по законам Кирхгофа для магнитных цепей:

$$\begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0; \\ H_1 l_1 + H_2 l_2 = F_1 + F_2; \\ H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 l_0 = F_2. \end{cases} \quad (7.1)$$

$$(7.2)$$



По заданным значениям потоков вычисляем магнитные индукции  $B_i = \Phi_i / S_i$ . Для участков из ферромагнитных материалов по основной кривой намагничивания находим  $H_j (j \neq 0)$ . Напряженность поля в воздушном зазоре  $H_0 = 0,8 \cdot 10^6 B_0$ . Подставив значения  $H_i$  и  $l_i$  в уравнения (7.1) и (7.2), найдем МДС  $F_1$  и  $F_2$ .

В обратной задаче по известным геометрическим размерам, зависимости  $B(H)$ , значениям МДС нужно вычислить созданные ими магнитные потоки. Эту задачу решают графоаналитически по аналогии с нелинейными электрическими цепями.

Порядок расчета рассмотрим на примере решения конкретной задачи.

### Задача 1

Для магнитной цепи [рис. 7.7](#) вычислить магнитные потоки  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , если  $l_1 = l_3 = 0,16$  м;  $l_2 = 0,075$  м;  $l_0 = 5 \cdot 10^{-4}$  м;  $S_1 = S_3 = 20 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>;  $S_2 = 30 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>;  $F_1 = 150$  А;  $F_2 = 300$  А. Основная кривая намагничивания материала сердечника приведена на [рис. 7.2](#).

### Решение

1. Для решения задачи необходимы вебер-амперные характеристики  $\Phi_1(U_{M_1})$ ,  $\Phi_2(U_{M_3})$ ;  $\Phi_3(U_{M_3}+U_{M_0})$ , способ получения которых подробно рассмотрен в [занятии 1](#). Результаты вычислений для первой четверти координатной плоскости сведены в [табл. 7.3](#). Характеристики в третьей четверти расположены симметрично первой.

Таблица 7.3

$B_1, B_2, B_3,$ Тл	0	0,5	0,75	1	1,2	1,4	1,6
$\Phi_1, \Phi_3, Вб$	0	$10 \cdot 10^{-4}$	$15 \cdot 10^{-4}$	$20 \cdot 10^{-4}$	$24 \cdot 10^{-4}$	$28 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-4}$
$\Phi_2, Вб$	0	$15 \cdot 10^{-4}$	$22,5 \cdot 10^{-4}$	$30 \cdot 10^{-4}$	$36 \cdot 10^{-4}$	$42 \cdot 10^{-4}$	$48 \cdot 10^{-4}$
$H_1, H_2, H_3,$ А/м	0	100	200	400	600	1200	3600
$H_0, А/м$	0	$40 \cdot 10^4$	$60 \cdot 10^4$	$80 \cdot 10^4$	$96 \cdot 10^4$	$112 \cdot 10^4$	$128 \cdot 10^4$
$H_1 l_1; H_3 l_3, А$	0	16	32	64	96	192	576
$H_2 l_2, А$	0	7,5	15	30	45	90	270
$H_0 l_0, А$	0	200	300	400	480	560	640
$H_3 l_3 + H_0 l_0,$ А	0	216	332	464	576	752	1216

2. Рационально сделать расчет методом напряжения между двумя узлами. Условием для нахождения рабочей точки является уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

Для упрощения решения задачи уравнение представим в виде

$$\Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_2.$$

3. Оперировать функциями можно, если они заданы в зависимости от одного общего аргумента. Таким аргументом является магнитное напряжение между двумя узлами  $U_{M_{ab}}$ . Рассчитав изменение магнитного потенциала между точками  $b$  и  $a$  для всех трех ветвей (см. [рис. 7.8, а](#)), получим следующие уравнения:

$$U_{M_{ab}} = F_1 - U_{M_1} ; U_{M_{ab}} = -F_2 + U_{M_2} ; U_{M_{ab}} = -U_{M_3} - U_{M_0}.$$

4. На основании этих уравнений, пользуясь зависимостями  $\Phi_1(U_{M_1})$ ,  $\Phi_2(U_{M_2})$ , и  $\Phi_3(U_{M_3} + U_{M_0})$ , строим графики  $\Phi_1(U_{M_{ab}})$ ,  $\Phi_2(U_{M_{ab}})$  и  $\Phi_3(U_{M_{ab}})$

(рис. 7.9). График  $\Phi_1(U_{M_{ab}})$  строим, зеркально отобразив зависимость  $\Phi_1(U_{M_1})$  и сместив ее вправо от начала координат на величину МДС  $F_1$  (кривая 1). График  $\Phi_2(U_{M_{ab}})$  строим, сместив график  $\Phi_2(U_{M_2})$  влево от начала координат на величину МДС  $F_2$  (кривая 2). График  $\Phi_3(U_{M_{ab}})$  получается зеркальным отображением графика  $\Phi_3(U_{M_3} + U_{M_0})$  (кривая 3).

5. Складывая ординаты кривых 1 и 3, получаем кривую 4, являющуюся зависимостью  $(\Phi_1 + \Phi_3) = f(U_{M_{ab}})$ . Пересечение кривых 2 и 4 дает рабочую точку  $A$ . Опустив из точки  $A$  перпендикуляр на ось абсцисс, получим значение  $U_{M_{ab}} = -230$  А. При его пересечении с графиками 1, 2 и 3 получим значения магнитных потоков:  $\Phi_1 = 30,8 \cdot 10^{-4}$  Вб;  $\Phi_2 = 41,3 \cdot 10^{-4}$  Вб;  $\Phi_3 = 10,5 \cdot 10^{-4}$  Вб. Рабочая точка может быть расположена в любой четверти координатной плоскости.

В смешанной задаче по части значений МДС и потоков нужно вычислить остальные значения МДС и потоков. Задание одного из потоков или соотношения между двумя потоками упрощает решение по сравнению с обратной задачей.

Рассмотрим решение смешанной задачи на конкретной задаче.

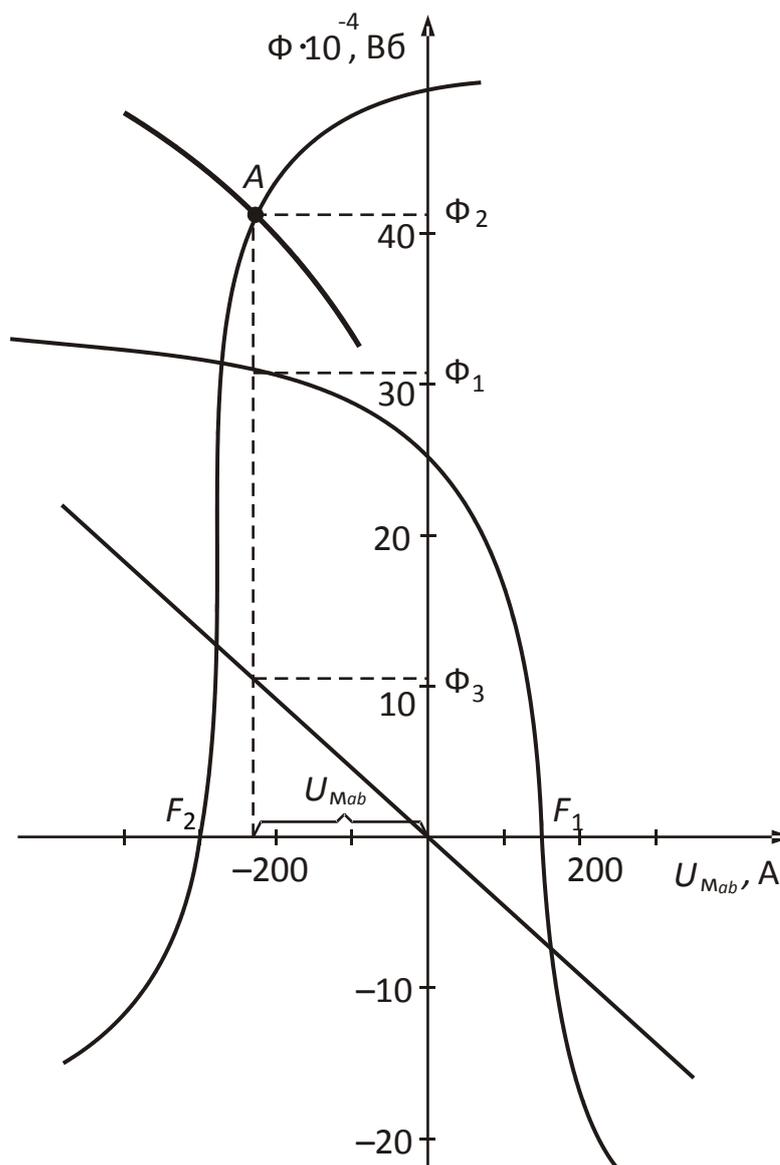


Рис. 7.8

### Задача 2

Для той же магнитной цепи, что и в задаче 1, вычислить МДС  $F_2$  и потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_3$ , если МДС  $F_1 = 400$  А, а магнитный поток  $\Phi_2 = 20 \cdot 10^{-4}$  Вб.

#### Решение

1. Воспользуемся полученными в задаче 1 вебер-амперными характеристиками  $\Phi_1(U_{M_1})$ ,  $\Phi_2(U_{M_2})$ ,  $\Phi_3(U_{M_3} + U_{M_0})$ .

2. Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа:  $\Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_2$ . Но  $\Phi_2 = 20 \cdot 10^{-4}$  Вб, поэтому уравнение примет вид

$$\Phi_1 + \Phi_3 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

3. Уравнения, связывающие магнитное напряжение между двумя узлами  $U_{M_{ab}}$  с магнитными напряжениями на элементах схемы замещения те же, что и в задаче 2:

$$\begin{aligned} U_{M_{ab}} &= F_1 - U_{M_1}; \\ U_{M_{ab}} &= -F_2 + U_{M_2}; \\ U_{M_{ab}} &= -U_{M_3} - U_{M_0}. \end{aligned}$$

4. На основании этих уравнений, пользуясь зависимостями  $\Phi_1(U_{M_1})$  и  $\Phi_3(U_{M_3} + U_{M_0})$ , строим графики  $\Phi_1(U_{M_{ab}})$  и  $\Phi_3(U_{M_{ab}})$  (соответственно кривые 1 и 2 на [рис. 7.9](#)).

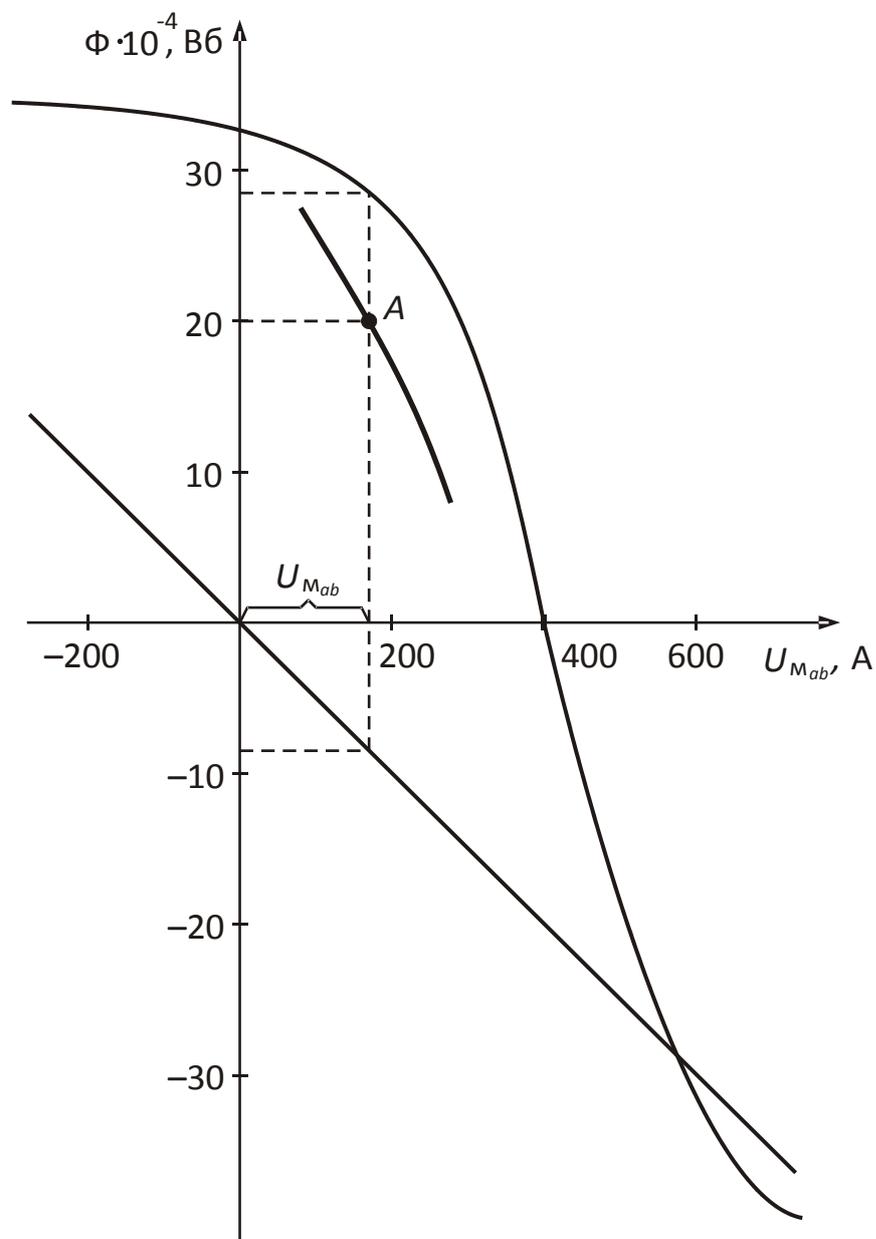


Рис. 7.9

5. Складывая ординаты кривых 1 и 2, получаем кривую 3, являющуюся зависимостью  $(\Phi_1 + \Phi_3) = f(U_{ab})$ , где  $(\Phi_1 + \Phi_3) = 20 \cdot 10^{-4}$  Вб. Точка А является рабочей. Опустив из точки А перпендикуляр на ось абсцисс, получим значение  $U_{M_{ab}} = 170$  А. При пересечении перпендикуляра с кривыми 1 и 2 получим значения потоков  $\Phi_1 = 28,8 \cdot 10^{-4}$  Вб,  $\Phi_3 = -8,5 \cdot 10^{-4}$  Вб. Знак минус показывает, что действительное направление магнитного потока  $\Phi_3$  противоположно выбранному.

6. Значение МДС  $F_2$  найдем из уравнения  $U_{M_{ab}} = -F_2 + U_{M_2}$  :  
 $F_2 = U_{M_2} - U_{M_{ab}}$ . При  $\Phi_2 = 20 \cdot 10^{-4}$  Вб магнитная индукция

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{20 \cdot 10^{-4}}{30 \cdot 10^{-4}} = 0,67 \text{ Тл.}$$

По основной кривой намагничивания (см. [рис. 7.2](#)) получим  $H_2 = 170$  А/м. Магнитное напряжение  $U_{M_2} = H_2 l_2 = 170 \cdot 0,075 = 12,75$  А.

Подставив в уравнение значения  $U_{M_{ab}}$  и  $U_{M_2}$ , вычислим МДС:

$$F_2 = U_{M_2} - U_{M_{ab}} = 12,75 - 170 = -157,25 \text{ А.}$$

Знак минус показывает, что действительное направление МДС противоположно выбранному.

# ГЛАВА 8

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Ознакомиться со схемами замещения индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником.
2. Ознакомиться с алгоритмом построения векторной диаграммы индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником.
3. Научиться рассчитывать параметры схем замещения по результатам опытов.

При расчетах, не требующих особо высокой точности, несинусоидальный режим заменяют синусоидальным. Кривую тока заменяют либо эквивалентной ей синусоидой с тем же действующим значением тока, либо первой гармоникой, пренебрегая высшими, полученными при разложении кривой тока в ряд Фурье. При этом происходит замена нелинейного элемента условно-нелинейным: ВАХ для мгновенных значений будет линейной, для действующих – нелинейной.

Синусоидальную величину можно заменить вращающимся вектором, которому соответствует комплексное число. Становятся возможными расчеты символическим методом, построение векторных диаграмм.

В схеме замещения идеальными элементами (рис. 8.1) учитывают явления, происходящие в реальной катушке.

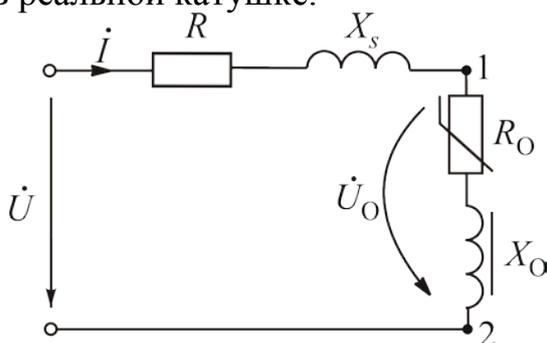


Рис. 8.1

Резистор сопротивлением  $R$  учитывает нагрев проводов катушки, сопротивлением  $R_0$  – нагрев сердечника.

Индуктивный элемент сопротивлением  $X_s$  учитывает ЭДС  $E_s$ , наведенную магнитным потоком рассеяния,  $X_0$  – ЭДС  $E_0$ , наведенную основным магнитным потоком.

Элементы схемы замещения, связанные с сердечником, являются нелинейными.

При некоторых расчетах более удобно использовать эквивалентную схему замещения с параллельным соединением элементов (рис. 8.2).

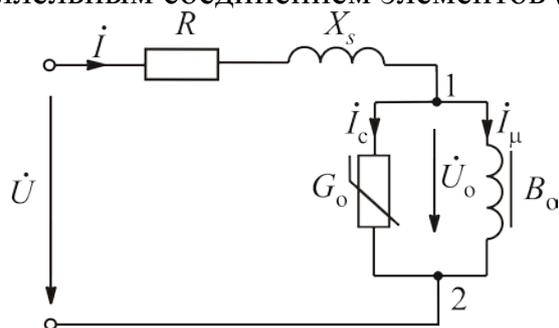


Рис. 8.2

Переход от одной схемы замещения к другой делают по формулам:

$$R_o = \frac{G_o}{Y_o^2}; \quad X_o = \frac{B_o}{Y_o^2}; \quad G_o = \frac{R_o}{Z_o^2}; \quad B_o = \frac{X_o}{Z_o^2},$$

где  $Y_o$  – полная проводимость участка между точками 1 и 2,  $Z_o$  – полное сопротивление этого участка.

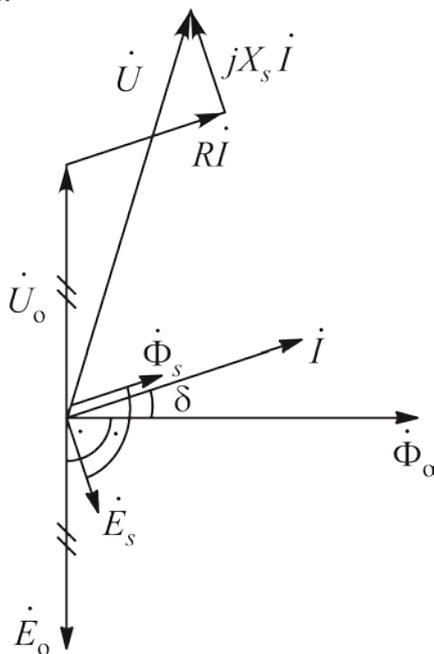


Рис. 8.3

Уравнение электрического состояния имеет вид

$$\dot{U} = \dot{U}_o + R\dot{i} + jX_s\dot{i}.$$

В схеме замещения с параллельным соединением элементов ток раскладывается на две составляющие: реактивную намагничивающую  $I_\mu$  и активную  $I_c$ , учитывающую потери в стали.

Построение векторной диаграммы начинают с вектора основного магнитного потока  $\dot{\Phi}_0$  (рис. 8.3). Наведенная им ЭДС  $E_0$  отстает от  $\Phi_0$  на угол  $90^\circ$ . Напряжение  $\dot{U}_0 = -\dot{E}_0$ . Ток опережает основной магнитный поток на угол магнитных потерь  $\delta$ . Магнитный поток рассеяния  $\Phi_s$  совпадает по фазе с током. Наведенная им ЭДС  $E_s$  отстает от  $\Phi_s$  на угол  $90^\circ$ .

Входное напряжение складывается из трех:  $\dot{U}_0$ ,  $R\dot{I}$  и  $jX_s\dot{I}$ . Вектор напряжения  $R\dot{I}$  строим из конца вектора  $\dot{U}_0$  параллельно вектору тока  $\dot{I}$ . Вектор напряжения  $jX_s\dot{I}$  опережает вектор тока на  $90^\circ$ .

### Задача 1

Определить параметры схем замещения нелинейной индуктивной катушки с последовательным и параллельным соединением элементов, если подключенные измерительные приборы показывают напряжение  $U = 200$  В, ток  $I = 5$  А, активная мощность  $P = 300$  Вт, частота сети  $f = 50$  Гц, число витков  $W = 600$ ,  $R = 6$  Ом,  $\hat{O}_m = 12 \cdot 10^{-4}$  Вб.

### Решение

1. Вычислим полное сопротивление цепи по закону Ома:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{200}{5} = 40 \text{ Ом.}$$

2. Найдем эквивалентное активное сопротивление из формулы активной мощности  $P = (R + R_0)I^2$ :

$$R + R_0 = \frac{P}{I^2} = \frac{300}{25} = 12 \text{ Ом.}$$

3. Сопротивление нелинейного резистивного элемента

$$R_0 = (R + R_0) - R = 12 - 6 = 6 \text{ Ом.}$$

4. Из суммарного треугольника сопротивлений вычислим эквивалентное индуктивное сопротивление:

$$X_s + X_0 = \sqrt{Z^2 - (R + R_0)^2} = 31,4 \text{ Ом.}$$

5. По формуле трансформаторной ЭДС определим напряжение  $U_0$  между точками 1 и 2 схемы замещения:

$$U_0 = E_0 = 4,44 f W \Phi_m = 4,44 \cdot 50 \cdot 600 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \approx 160 \text{ В.}$$

6. Найдем полное сопротивление  $Z_0$  между точками 1 и 2 схемы замещения по закону Ома:

$$Z_0 = \frac{U_0}{I} = \frac{160}{5} = 12 \text{ Ом.}$$

7. Из треугольника сопротивлений участка 1 и 2 вычислим индуктивное сопротивление нелинейного элемента  $X_0$ :

$$X_0 = \sqrt{Z_0^2 - R_0^2} = 31,4 \text{ Ом.}$$

8. Вычислим индуктивное сопротивление линейного элемента

$$X_s = (X_0 + X_s) - X_0 = 38,1 - 31,4 = 6,7 \text{ Ом.}$$

9. Вычислим проводимости  $G_0$  и  $B_0$  нелинейных элементов:

$$G_0 = \frac{R_0}{Z_0^2} = 0,0059 \text{ См; } B_0 = \frac{X_0}{Z_0^2} = 0,0307 \text{ См.}$$

### Задача 2

Определить потери в стали, угол  $\varphi$ , параметры схем замещения индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником, если  $U = 120 \text{ В}$ ,  $I = 6 \text{ А}$ ,  $P = 450 \text{ Вт}$ ,  $R = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_s = 10 \text{ Ом}$ .

#### Решение

1. Вычислим угол  $\varphi$  из формулы активной мощности  $P = UI \cos \varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = 0,625; \quad \varphi \approx 51^\circ.$$

2. Рассчитаем потери в стали. Активная мощность складывается из потерь на нагрев проводов (в меди  $P_m$ ) и потерь на нагрев сердечника (в стали  $P_{ст}$ ):  $P = P_m + P_{ст}$ . Потери в меди связаны с линейным резистивным элементом:  $P_m = R \cdot I^2 = 6 \cdot 36 = 216 \text{ Вт}$ . Тогда  $P_{ст} = P - P_m = 450 - 216 = 234 \text{ Вт}$ .

3. Вычислим активное сопротивление нелинейного резистивного элемента из формулы мощности  $P_{\text{ст}} = R_0 \cdot I^2$ :

$$R_0 = \frac{P_{\text{ст}}}{I^2} = \frac{234}{36} = 6,5 \text{ Ом.}$$

4. По закону Ома определим полное сопротивление схемы:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{6} = 20 \text{ Ом.}$$

5. Из суммарного треугольника сопротивлений найдем эквивалентное индуктивное сопротивление:

$$X_s + X_0 = \sqrt{Z^2 - (R + R_0)^2} = 15,6 \text{ Ом.}$$

Тогда  $X_0 = (X_s + X_0) - X_s = 15,6 - 10 = 5,6 \text{ Ом.}$

6. Вычислим проводимости  $G_0$  и  $B_0$  нелинейных элементов:

$$G_0 = \frac{R_0}{Z_0^2} = 0,088 \text{ См; } B_0 = \frac{X_0}{Z_0^2} = 0,076 \text{ См.}$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 3

Найти параметры схемы замещения нелинейной катушки  $R_1$ ,  $R_0$ ,  $X_s$  и  $X_0$ , если приборы показывают напряжение  $U_1 = 100 \text{ В}$ , ток  $I_1 = 5 \text{ А}$ ,  $\cos \varphi_1 = 0,7$ . При исследовании той же катушки, но без сердечника, приборы показывают  $U_2 = 100 \text{ В}$ ,  $I_2 = 10 \text{ А}$ ,  $\cos \varphi_2 = 0,9$ .

Ответ:  $R = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_s = 4,4 \text{ Ом}$ ,  $R_0 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_0 = 9,9 \text{ Ом}$ .

## ГЛАВА 9

# ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В предыдущих главах были рассмотрены цепи с сосредоточенными параметрами, в которых выделяют активные, индуктивные и емкостные элементы.

В цепях с распределенными параметрами энергии электрического и магнитного полей, а также необратимые преобразования энергии распределены вдоль длины цепи.

### Занятие 1

*Цели занятия:*

1. Научиться рассчитывать первичные параметры однородной линии.
2. Научиться вычислять вторичные параметры длинной линии.
3. Научиться определять волновые параметры линии.

Однородной называют линию, параметры которой равномерно распределены вдоль ее длины.

Параметры линии на единицу длины называют первичными. Их обозначают:  $R_0, G_0, C_0, L_0$ .

$$[R_0] \in \text{Ом/м}; [G_0] = \text{См/м}; [\varphi_0] = \text{Ф/м}; [i_0] = \text{Гн/м}.$$

Обычно их считают известными и постоянными.

Если первичные параметры не заданы, их можно вычислить по приведенным далее формулам для двухпроводной линии.

Погонная индуктивность, Гн/м,

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r} = 4 \cdot 10^{-7} \ln \frac{d}{r},$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  – магнитная постоянная, Гн/м,

$r$  – радиус проводов линии,

$d$  – расстояние между проводами.

Нужно отметить, что единицы измерения  $d$  и  $r$  должны быть одинаковыми.

Погонная емкость, Ф/м,

$$C_0 = \frac{27,8}{\ln \frac{d}{r}} \cdot \varepsilon_r \cdot 10^{-12},$$

где  $\varepsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость.

Погонное активное сопротивление для меди  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

$$R_{0\text{гн}} = \frac{8,32}{r_{\text{см}}} \sqrt{f} \cdot 10^6 \text{ Ом} \cdot \text{м/} = \frac{1,44}{r_{\text{мм}} \sqrt{\lambda_{\text{м}}}} \text{ Ом} \cdot \text{м/}$$

Погонная активная проводимость,  $\text{См/м}$ ,

$$G_0 = \omega C_0 \text{ tg } \delta,$$

где  $\delta$  – угол диэлектрических потерь.

Нужные для расчетов величины приведены в справочной литературе.

Вторичными параметрами линии считают коэффициент распространения электромагнитной волны  $\gamma$  и волновое сопротивление  $Z_c$ .

$$\text{Коэффициент распространения } \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0},$$

где  $\underline{Z}_0 = R_0 + jL_0\omega$  – комплексное продольное сопротивление на единицу длины линии;

$\underline{Y}_0 = G_0 + jC_0\omega$  – комплексная поперечная проводимость на единицу длины линии.

Как любое комплексное число, коэффициент распространения состоит из действительной и мнимой составляющих:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta,$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания, характеризующий степень уменьшения модуля;  
 $\beta$  – коэффициент фазы, характеризующий степень изменения аргумента.

$$[\alpha] = \text{Нп/м}, \quad [\beta] = \text{рад/м}.$$

Волновое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}.$$

Волновыми параметрами линии являются фазовая скорость  $v$  и длина волны  $\lambda$ .

Фазовая скорость – это скорость изменения фазы колебания, которая с течением времени и ростом координаты  $x$  остается неизменной. Ее определяют по формуле

$$v = \frac{\omega}{\beta}.$$

Если в воздушной линии пренебречь потерями, то максимальная фазовая скорость примерно равна скорости света:  $v \approx c = 3 \cdot 10^5$  км/с.

Длина волны  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$  – это кратчайшее расстояние между двумя точками, взятое в направлении распространения волны, фаза колебания которых отличается на  $2\pi$ .

В линии без потерь ( $R_0 = G_0 = 0$ ) коэффициент затухания  $\alpha = 0$ ;  
 $\gamma = \beta = \omega\sqrt{L_0C_0}$ ;  $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_c$ ;  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$ .

Если  $Z_c$ ,  $\alpha$  и  $v$  не зависят от частоты, в линии не будет искажений.  
 Для этого необходимо следующее соотношение параметров:  $\frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{G_0}$ .

При этом коэффициент затухания  $\alpha = \alpha_{\min} = \sqrt{R_0G_0}$ .  
 Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

### Задача 1

Рассчитать погонные параметры двухпроводной воздушной линии ( $\text{tg}\delta = 0$ ), составленной из медного провода диаметром 6 мм. Расстояние между проводами  $d = 200$  мм. Рабочая частота  $f = 100$  кГц.

#### Решение

##### Погонная индуктивность

$$L_0 = 4 \cdot 10^{-7} \ln \frac{d}{r} = 4 \cdot 10^{-7} \ln \frac{200}{3} = 1,68 \cdot 10^{-6} \quad /$$

##### Погонная емкость

$$C_0 = \frac{27,8\epsilon_r}{\ln \frac{d}{r}} \cdot 10^{-12} = \frac{27,8 \cdot 1}{\ln \frac{200}{3}} \cdot 10^{-12} = 6,64 \cdot 10^{-12} \quad /$$

##### Погонное сопротивление

$$R_{0\text{Гц}} = \frac{8,32}{r_{\text{см}}} \sqrt{f} \cdot 10^{-6} = \frac{8,32}{0,3} \sqrt{10^5} \cdot 10^{-6} = 8,76 \cdot 10^{-3} \quad /$$

##### Погонная проводимость

$$G_0 = \omega C_0 \operatorname{tg} \delta = \omega C_0 \cdot 0 = 0.$$

### Задача 2

Вычислить коэффициент распространения и волновые параметры линии при частоте  $f = 1200$  Гц, если  $R_0 = 12,4 \text{ Ом км}$ ,  $L_0 = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн км}$ ,  $G_0 = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ См км}$ ,  $C_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф км}$ .

#### Решение

Коэффициент распространения электромагнитной волны

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + jL_0\omega)(G_0 + jC_0\omega)} = \\ &= \sqrt{(12,4 + j \cdot 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 1200)(0,8 \cdot 10^{-6} + j5 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 1200)} = \\ &= \sqrt{(12,4 + j36,191)(0,8 \cdot 10^{-6} + j37,699 \cdot 10^{-6})} = \\ &= \sqrt{38,255 e^{j71,09^\circ} \cdot 0,0000377 e^{j88,78^\circ}} = 0,03798 e^{j79,93^\circ} = \\ &= (0,00664 + j0,0374) \text{ км}^{-1}. \end{aligned}$$

1. Коэффициент затухания  $\alpha = \operatorname{Re} \underline{\gamma} = 0,00664 \text{ Нп км} / 0,05774 \text{ дБ км} /$   
(1 дБ = 0,115 Нп).
2. Коэффициент фазы  $\beta = \operatorname{Im}(\underline{\gamma}) = 0,0374 \text{ км} /$  .
3. Фазовая скорость  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 1200}{0,0374} = 201497,326 \text{ км ф.}$
4. Длина волны  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{0,0374} = 167,9 \text{ км}.$

### Задача 3

Определить первичные параметры  $R_0, L_0, G_0, C_0$  линии с волновым сопротивлением  $\underline{Z}_c = 100e^{-j15^\circ} \text{ Ом}$  и коэффициентом распространения  $\underline{\gamma} = 10^{-3} e^{j45^\circ} \text{ км}^{-1}$  при циклической частоте  $\omega = 500 \text{ рад ф.}$

Решение

1. Волновое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}.$$

Коэффициент распространения  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}$ .

2. Умножив  $\underline{Z}_c$  на  $\underline{\gamma}$ , получим

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_c \cdot \underline{\gamma} = 100e^{-j15^\circ} \cdot 10^{-3} 0,1e^{j45^\circ} = 8,67 \angle 30^\circ = (5 - j0,67) \text{ Ом км.} /$$

Погонное сопротивление  $\underline{Z}_0 = R_0 + jL_0 \omega$ .

$$\text{Тогда } R_0 = 8,67 \cdot 10^2 \text{ Ом км/} \quad L_0 = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{500} = 10^{-4} \text{ Гн км/}.$$

3. Разделив  $\underline{\gamma}$  на  $\underline{Z}_c$ , получим

$$\underline{Y}_0 = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_c} = \frac{10^{-3} e^{j45^\circ}}{100e^{-j15^\circ}} = 10^{-5} e^{j60^\circ} = (8,67 \cdot 10^{-6} - j0,67 \cdot 10^{-6}) \text{ См км/} /$$

Погонная проводимость  $\underline{Y}_0 = G_0 + jC_0 \omega$ .

$$\text{Отсюда } G_0 = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{См}}{\text{км}}, \quad C_0 = \frac{8,67 \cdot 10^{-6}}{500} = 1,73 \cdot 10^{-8} \text{ км/}$$

**Задача 4**

Вычислить вторичные параметры и длину волны линии без потерь, если  $L_0 = 14,16 \cdot 10^{-3} \text{ Гн км/}$ ,  $G_0 = 0,95 \cdot 10^{-6} \text{ См км/}$ ,  $f = 1800 \text{ 1/с}$ .

Решение

1. Коэффициент затухания  $\alpha = 0$ . Коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \beta = \omega \sqrt{L_0 \cdot C_0} = 2\pi f \sqrt{L_0 \cdot C_0} = 2\pi \cdot 1800 \sqrt{14,16 \cdot 10^{-3} \cdot 3,4 \cdot 10^{-9}} = 0,07847 \text{ рад км.}$$

2. Волновое сопротивление



$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{14,16 \cdot 10^{-3}}{3,4 \cdot 10^{-9}}} = 2040,76 \text{ Ом.}$$

3. Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,07847} = 80,07 \text{ км.}$$

### Задача 5

Вычислить погонную емкость  $C_0$  линии с параметрами  $R_0 = 12,4 \text{ Ом/км}$ ,  $L_0 = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ км/Гн}$ ,  $G_0 = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ км/См}$  для передачи на максимальное расстояние сигналов без искажения с допустимым затуханием  $\alpha_1 = 10 \text{ дБ}$ . Определить это расстояние.

#### Решение

Условие линии без искажений:  $\frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{G_0}$ .

$$\text{Отсюда } C_0 = \frac{L_0 \cdot G_0}{R_0} = \frac{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-6}}{12,4} = 0,3097 \cdot 10^{-9} \text{ км/}$$

Коэффициент затухания будет минимальным:

$$\alpha_{\min} = \sqrt{R_0 \cdot G_0} = \sqrt{12,4 \cdot 0,8 \cdot 10^{-6}} = 3,15 \cdot 10^{-3} \quad /$$

Длина передачи сигнала

$$l = \frac{\alpha l}{\alpha_{\min}} = \frac{10 \cdot 0,115}{3,15 \cdot 10^{-3}} = \frac{1150}{3,15} = 365 \text{ км.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

### Задача 6

Вычислить вторичные и волновые параметры линии, если  $R_0 = 58 \text{ Ом/км}$ ,  $C_0 = 11,5 \cdot 10^{-9} \text{ км/См}$ ,  $L_0 = 4,24 \cdot 10^{-3} \text{ км/Гн}$ ,  $G_0 = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ км/См}$ ,  $f = 10000 \text{ Гц}$ .

Ответ:  $\underline{Z}_c = 614,259 \text{ Ом} e^{j6,09^\circ}$   $\underline{\gamma} = 0,048 + j0,441 \text{ км}^{-1}$   
 $v = 142403,6 \text{ км/с}$ ;  $\lambda = 14,24 \text{ км}$ .

### Задача 7

Определить первичные параметры линии, если  $f = 1800 \text{ Гц}$ ,  
 $\underline{Z}_c = 2240,944 \text{ Ом} e^{j16,29^\circ}$   $\underline{\gamma} = 0,086 e^{j72,29^\circ} \text{ км}^{-1}$   
 Ответ:  $R_0 = 108 \text{ Ом/км}$ ;  $L_0 = 14,16 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$ ;  $G_0 = 0,95 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$   
 $C_0 = 3,4 \cdot 10^{-9} \text{ км/Ф}$

### Задача 8

Определить значение  $G_0$ , при котором линия будет передавать сигналы без искажения, если  $R_0 = 58 \text{ Ом/км}$ ,  $C_0 = 11,5 \cdot 10^{-9} \text{ км/Ф}$ ,  
 $L_0 = 4,24 \cdot 10^{-3} \text{ км/Гн}$ .  
 Ответ:  $G_0 = 157,3 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$

### Задача 9

Вычислить коэффициент затухания, коэффициент фазы, фазовую скорость и длину волны линии при частоте  $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$  при следующих значениях первичных параметров:  $R_0 = 100 \text{ Ом/км}$ ;  $L_0 = 0,5 \text{ мГн/км}$ ,  
 $C_0 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ км/Ф}$   $G_0 = 10 \text{ См/км}$ .  
 Ответ:  $\alpha = 0,0352 \text{ Нп/км}$ ,  $\beta = 0,0568 \text{ рад/км}$ ,  $\lambda = 110,56 \text{ км}$ ,  
 $v = 176056 \text{ км/с}$ .

## Занятие 2

*Цели занятия:*

1. Научиться находить токи и напряжения в различных сечениях линии при заданных нагрузках.
2. Изучить особенности расчетов токов и напряжений в линии без потерь.
3. Научиться определять мощности в различных сечениях линии и КПД линии.

Напряжение и ток в любой точке линии, если задан режим работы на входе линии, можно определить из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \underline{Z}_c \dot{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x. \end{cases} \quad (1)$$

При отсчете расстояния  $x$  от нагрузки (конца линии) значения токов и напряжений вычисляют из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x. \end{cases} \quad (2)$$

Если  $x$  равно длине линии  $l$ , то  $\dot{U} = \dot{U}_1$ ,  $\dot{I} = \dot{I}_1$ . Система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} l; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l - \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l. \end{cases} \quad (3)$$

Для расчета гиперболических функций удобно воспользоваться формулами Эйлера:

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 0,5(e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l})$$

и

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} l = 0,5(e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}),$$

где  $e^{\underline{\gamma} l} = e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}$ ,  $e^{-\underline{\gamma} l} = \frac{1}{e^{\underline{\gamma} l}}$ .

Для линии без потерь  $\alpha = 0$ ,  $\underline{\gamma} = j\beta$ , поэтому уравнения с гиперболическими функциями переходят в уравнения с круговыми функциями от действительного аргумента:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \cos \beta x - j \dot{I}_1 \underline{Z}_c \sin \beta x;$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \sin \beta x;$$

(4)

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 \underline{Z}_c \sin \beta x;$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x.$$

Для расчета мощностей удобно пользоваться формулой комплексной мощности  $\underline{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$ .

Полная мощность является модулем комплексной мощности  $\underline{S}$ .

Активная мощность  $P = \text{Re}(\underline{S})$ , реактивная мощность  $Q = \text{Im}(\underline{S})$ .

Коэффициент полезного действия линии равен отношению активной мощности нагрузки (в конце линии) к активной мощности на входе линии:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

Рассмотрим ряд конкретных задач.

### Задача 1

Определить напряжение  $\dot{U}_2$ , ток  $\dot{I}_2$ , мощность  $P_2$  в нагрузке, а также КПД передачи энергии по линии длиной 500 км, если напряжение на входных зажимах линии  $U_1 = 220$  кВ, волновое сопротивление  $\underline{Z}_c = 308,8e^{-j8^\circ}$  Ом, сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_н = 2\underline{Z}_c$ , коэффициент распространения  $\underline{\gamma} = (0,1792 + j1,052) \cdot 10^{-3} \text{ 1/}$

### Решение

1. Напряжение на нагрузке для заданного режима  $\dot{U}_2 = \underline{Z}_н \dot{I}_2 = 2\underline{Z}_c \dot{I}_2$ . Тогда уравнения (3) примут вид:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 (\text{ch} \underline{\gamma} l + 0,5 \text{sh} \underline{\gamma} l);$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 (\text{ch} \underline{\gamma} l + 2 \text{sh} \underline{\gamma} l).$$

Отсюда

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\text{ch} \underline{\gamma} l + 0,5 \text{sh} \underline{\gamma} l}.$$

Расчет гиперболических функций:

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} l = 0,5(e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}),$$

$$e^{\underline{\gamma} l} = e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}, \quad e^{-\underline{\gamma} l} = \frac{1}{e^{\underline{\gamma} l}},$$

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 0,5(e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l}).$$

Подставив значения  $\underline{\gamma} = (0,1792 + j1,052) \cdot 10^{-3} \text{ 1/}$  и  $l = 500 \text{ км}$ , получим:

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} l = 0,869 + j0,045;$$

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 0,0776 + j0,504.$$

Подставив найденные значения в формулу для нахождения  $\dot{U}_2$ , получим:

$$\dot{U}_2 = \frac{220}{0,9078 + j0,297} = 230,3e^{-j18^\circ} \text{ кВ.}$$

$$\text{Ток } \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{2\underline{Z}_c} = \frac{230,3e^{-j18^\circ} \cdot 10^3}{2 \cdot 308,8e^{-j8^\circ}} = 372,94e^{-j10^\circ} \text{ А.}$$

## 2. Активная мощность нагрузки

$$P_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2^*) = \operatorname{Re}(230,3e^{-j18^\circ} \cdot 10^3 \times 372,94e^{j10^\circ}) = 85052 \text{ кВт.}$$

## 3. КПД линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

$$\text{Активная мощность на входе линии } P_1 = \operatorname{Re}(\dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^*).$$

$$\begin{aligned} \text{Ток } \dot{I}_1 &= \dot{I}_2(\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + 2\operatorname{sh} \underline{\gamma} l) = 372,94e^{-j10^\circ} (0,869 + j0,045 + 0,1552 + \\ &+ j1,008) = 547,8e^{j35,8^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } P_1 = \operatorname{Re}(220 \cdot 10^3 \cdot 547,8e^{-j35,8^\circ}) = 97746 \text{ кВт,}$$

$$\eta = \frac{85052}{97746} = 0,87 \text{ или } \eta = 87 \text{ \%}.$$

### Задача 2

Линия с параметрами  $G_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ км/}$ ,  $L_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ км/}$ ,  $R_0 = 40 \text{ Ом/км}$  и  $C_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ км/}$  длиной  $l = 200 \text{ км}$  работает на частоте  $\omega = 5000 \text{ }^{-1}$ . Определить мощности, потребляемые на входе и выходе линии, если к входным зажимам линии приложено напряжение  $\dot{U}_1 = 10 \text{ В}$ , а сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_н = 1000 e^{j30^\circ} \text{ Ом}$ .

### Решение

1. Вычислим волновые сопротивления  $\underline{Z}_c$ :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_c &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + jL_0\omega}{G_0 + jC_0\omega}} = \sqrt{\frac{40 + j8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-8} + j5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{40 + j40}{5 \cdot 10^{-8} + j25 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= \sqrt{\frac{40\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{2,5 \cdot 10^{-5} e^{j90^\circ}}} = 1504 e^{-j22,5^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

2. Вычислим коэффициент распространения  $\underline{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0 &= \sqrt{40\sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} e^{j90^\circ}} = 3,76 \cdot 10^{-2} e^{j67,5^\circ} = \\ &= (1,439 + j3,474) \text{ км}^{-2} \text{ 1/} \end{aligned}$$

3. Вычислим напряжение  $\dot{U}_2$  из системы уравнений (3):

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\text{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_н} \text{Sh} \underline{\gamma} l}.$$

Выполним вспомогательные расчеты:

$$\frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_H} = \frac{1504e^{-j22,5^\circ}}{1000e^{j30^\circ}} = 1,504e^{-j52,5^\circ};$$

$$\underline{\gamma}l = 2,878 + j6,948;$$

$$e^{\underline{\gamma}l} = e^{2,878} \cdot e^{j6,948^\circ} = 17,78e^{j38,09^\circ} = 13,99 + j10,98;$$

$$e^{-\underline{\gamma}l} = \frac{1}{e^{\underline{\gamma}l}} = 0,056e^{-j38,09^\circ} = 0,044 - j0,0345;$$

$$\text{sh}\underline{\gamma}l = 0,5(e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}) = 6,98 + j5,5 = 8,886e^{j38,23^\circ};$$

$$\text{ch}\underline{\gamma}l = 0,5(e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}) = 7,015 + j5,47 = 8,895e^{j37,94^\circ};$$

$$\text{ch}\underline{\gamma}l + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_H} \text{sh}\underline{\gamma}l = 19,95 + j2,17 = 20,07e^{j6,22^\circ}.$$

Подставив найденные значения, получим:

$$\dot{U}_2 = \frac{10}{20,07e^{j6,22^\circ}} = 0,498e^{-j6,22^\circ} \text{ В.}$$

Комплекс тока в нагрузке

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{0,498e^{-j6,22^\circ}}{1000e^{j30^\circ}} = 0,498 \cdot 10^{-3} e^{-j36,22^\circ} \text{ А.}$$

4. Ток

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh}\underline{\gamma}l = 0,498 \cdot 10^{-3} e^{-j36,22^\circ} \cdot 8,895e^{j37,94^\circ} + \\ &+ \frac{0,498e^{-j6,22^\circ}}{1504e^{-j22,5^\circ}} \cdot 8,886e^{j38,23^\circ} = 6,635 \cdot 10^{-3} e^{j22,38^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

5. Вычислим мощности, потребляемые на входе и выходе линии:

$$P_1 = \text{Re}\left(\dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^*\right) = \left(10 \cdot 6,635 \cdot 10^{-3} e^{-j22,38^\circ}\right) = 61,35 \cdot 10^{-3} \text{ Вт};$$

$$P_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_2 \cdot I_2^*) = \operatorname{Re}(0,498e^{-j6,22^\circ} \cdot 0,498 \cdot 10^{-3} e^{j36,22^\circ}) = 0,215 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 3

Рассчитать напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  в начале линии, комплексную мощность в начале и конце линии, КПД линии, если  $f = 1200$  Гц,  $l = 142$  км,  $R_0 = 12,4 \text{ Ом/км}$ ,  $C_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ км/}$ ,  $L_0 = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ км/}$ ,  $G_0 = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ км/}$ ,  $\dot{U}_2 = 28,2 \text{ В}$ ,  $\underline{Z}_H = 500e^{-j8,5} \text{ Ом}$ .

Ответ:  $\dot{U}_1 = 109,721e^{j60,011^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{I}_1 = 0,106e^{-j44,467^\circ} \text{ А}$ ;  $\underline{S}_1 = 11,205 - j3,116 \text{ ВА}$ ;  $\underline{S}_2 = 1,572 - j0,235 \text{ ВА}$ ;  $\eta = 14 \%$ .

### Задача 4

Определить напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  в начале линии, а также длину электромагнитной волны для задачи 3, приняв условие:  $R_0 = G_0 = 0$ ,  $\underline{Z}_H = 500 \text{ Ом}$ .

### Решение

1. Для линии без потерь волновое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{4,8 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-9}} = 979,796 \text{ Ом.}$$

2. Коэффициент распространения волны

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} = j\beta &= \omega \sqrt{L_0 \cdot C_0} = 2\pi f \sqrt{L_0 \cdot C_0} = \\ &= 7539,822 \sqrt{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-9}} \text{ рад/с} = 0,0369 \text{ /} \end{aligned}$$

3. Ток  $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{28,2}{500} = 0,0564 \text{ А}$ .

4. Вычислим напряжение  $\dot{U}_1$  из системы уравнений (4):

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta l + j \dot{I}_2 \underline{Z}_c \sin \beta l =$$

$$= 28,2 \cos(0,03693 \cdot 142) + j0,0564 \cdot 979,796 \cdot \sin(0,0369 \cdot 142) =$$

$$= 14,294 - j47,635 = 49,733e^{-j73,297^\circ} \text{ В.}$$

5. Вычислим входной ток  $\dot{I}_1$ :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta l = 0,0564e^{j8,5^\circ} \cos(0,0369 \cdot 142) +$$

$$+ j \frac{28,2}{979,796} \cdot \sin(0,0369 \cdot 142) = 0,0286 - j0,0248 = 0,0378e^{-j40,926^\circ} \text{ А.}$$

6. Длина электромагнитной волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 170,276 \text{ км.}$$

Следующую задачу решите самостоятельно.

### Задача 5

Определить напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  в начале линии без потерь, если  $f = 1800$  Гц,  $l = 47,1$  км,  $C_0 = 3,4 \cdot 10^{-9}$  км/л,  $L_0 = 14,16 \cdot 10^{-3}$  км/л,  $\dot{I}_2 = 6 \cdot e^{j16,15^\circ}$  мА,  $Z_H = 4000$  Ом.

Ответ:  $\dot{U}_1 = 21,4e^{-j146,3^\circ}$  В;  $\dot{I}_1 = 8,022e^{-j113,3^\circ}$  мА.

### Занятие 3

*Цели занятия:*

1. Научиться определять входное сопротивление линии в разных режимах.

2. Изучить особенности расчета линии без потерь.

Входное сопротивление линии равно отношению напряжения к току на входе линии:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

Введение понятия входного сопротивления позволяет заменить рассмотрение цепей с распределенными параметрами цепями с сосредоточенными параметрами.

В общем случае входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c \frac{\dot{U}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \text{sh}\underline{\gamma}l}{\dot{U}_2 \text{sh}\underline{\gamma}l + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c \text{th}\underline{\gamma}l}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_H \text{th}\underline{\gamma}l}.$$

При согласованной нагрузке ( $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$ ) входное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c$ .

Входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания ( $\underline{Z}_H = 0$ )

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c \text{th}\underline{\gamma}l.$$

Входное сопротивление линии в режиме холостого хода ( $\underline{Z}_H = \infty$ )

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c \text{ch}\underline{\gamma}l.$$

Входное сопротивление можно определить из режимов холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{ХХ}} \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{\text{КЗ}}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{\text{ХХ}}}.$$

В линии без потерь гиперболические функции заменяют круговыми тригонометрическими функциями.

Входное сопротивление имеет вид

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_H + j\underline{Z}_c \text{tg}\beta l}{\underline{Z}_c + j\underline{Z}_H \text{tg}\beta l}.$$

Напряжение и ток в разомкнутой линии без потерь определяют по следующим формулам:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos\beta x, \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} E\beta x, \end{cases}$$

где  $x$  – расстояние от конца линии до точки, в которой рассчитывают напряжение и ток.

Входное сопротивление линии без потерь в режиме холостого хода – реактивное:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = -j\underline{Z}_c \operatorname{ctg} \beta l.$$

Напряжение и ток закороченной на конце линии без потерь

$$\begin{cases} \dot{U} = j\underline{Z}_c \dot{I}_2 \sin \beta x, \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x. \end{cases}$$

Входное сопротивление закороченной на конце линии также реактивное:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = j\underline{Z}_c \operatorname{tg} \beta l.$$

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

### Задача 1

Определить вторичные параметры однородной линии длиной 200 км при частоте  $f = 800$  Гц, если входное сопротивление в режиме холостого хода  $\underline{Z}_{\text{ХХ}} = 750e^{-j26^\circ}$  Ом, а в режиме короткого замыкания –  $\underline{Z}_{\text{КЗ}} = 500$  Ом.

### Решение

Входное сопротивление в режиме короткого замыкания

$$\underline{Z}_{\text{КЗ}} = \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\gamma} l,$$

в режиме холостого хода  $-\underline{Z}_{\text{ХХ}} = \underline{Z}_c \operatorname{cth} \underline{\gamma} l = \frac{\underline{Z}_c}{\operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$

Перемножив эти выражения, получим

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{\text{ХХ}} \cdot \underline{Z}_{\text{КЗ}}} = \sqrt{750e^{-j26^\circ} \cdot 500} = 612,37e^{-j13^\circ} \text{ Ом.}$$

Поделив  $\underline{Z}_{\text{КЗ}}$  на  $\underline{Z}_{\text{ХХ}}$ , получим

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{КЗ}}}{\underline{Z}_{\text{ХХ}}}} = \sqrt{\frac{500}{750e^{-j26^\circ}}} = 0,8165e^{j13^\circ}.$$

Гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \frac{e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l}}{e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}} \cdot \frac{e^{\underline{\gamma} l}}{e^{\underline{\gamma} l}} = \frac{e^{2\underline{\gamma} l} - 1}{e^{2\underline{\gamma} l} + 1}.$$

Отсюда

$$e^{2\underline{\gamma} l} = \frac{1 + 0,7956 + j0,1837}{1 - 0,7956 - j0,1837} = 6,5684 e^{j(47,8^\circ + 360^\circ n)},$$

где  $n$  – целое число.

Так как  $e^{2\underline{\gamma} l} = e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l}$ , то  $e^{2\alpha l}$  – модуль комплексного числа, а  $2\beta l$  – его аргумент;

$$e^{2\alpha l} = 6,5684; \quad \alpha = \frac{\ln 6,5684}{2l} = \frac{1,882}{400} = 4,7057 \text{ мНп / км};$$

$$2\beta l = 47,8^\circ + 360^\circ n = (0,829 + 2\pi n) \text{ рад};$$

$$\beta = \frac{0,829 + 2\pi n}{2l}.$$

Чтобы найти число  $n$ , определим приближенно длину волны:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^5}{800} = 375 \text{ км}.$$

На расстоянии, равном длине волны, фаза изменяется на  $2\pi$  радиан. Поэтому на расстоянии  $2l$  длина волны  $\lambda$  укладывается следующее число раз:

$$n' = \frac{2l}{\lambda} = \frac{400}{375} = 1,067.$$

Принимаем целое число  $n = 1 < n'$ .

Отсюда

$$\beta = \frac{0,829 + 2\pi}{2l} = \frac{\text{рад}}{\text{км}} = 0,01778 \quad /$$

Коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = (4,7057 + j17,78) \cdot 10^{-3} = 18,38 \cdot 10^{-3} e^{j75,17^\circ} \text{ 1/}$$

## Задача 2

Определить ток в начале однородной линии в режиме холостого хода, если линия длиной 200 км с параметрами  $\underline{Z}_c = 400e^{-j5^\circ}$  Ом и  $\underline{\gamma} = 0,002e^{j80^\circ}$  1/км подключена к генератору с напряжением  $\dot{U}_1 = 10$  кВ.

*Решение*

Входное сопротивление линии в режиме холостого хода

$$\underline{Z}_{xx} = \underline{Z}_c \operatorname{cth} \underline{\gamma} l.$$

Определяем

$$\operatorname{cth} \underline{\gamma} l = \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l}{\operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = \frac{e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}}{e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l}};$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = 0,002e^{j80^\circ} = (0,348 + j1,97) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}.$$

$$\underline{\gamma} l = 0,0695 + j0,394 \text{ (}\beta l \text{ в радианах);}$$

$$e^{\underline{\gamma} l} = e^{0,0695} \cdot e^{j0,394} = 1,072e^{j0,394^\circ} = 0,99 + j0,411;$$

$$e^{-\underline{\gamma} l} = e^{-0,0695} e^{-j0,394} = 0,933e^{-j0,394^\circ} = 0,862 - j0,358;$$

$$\operatorname{cth} \underline{\gamma} l = \frac{1,852 + j0,053}{0,128 + j0,769} = 2,377e^{-j78,9^\circ}.$$

Тогда

$$\underline{Z}_{xx} = 400e^{-j5^\circ} \cdot 2,377e^{-j78,9^\circ} = 950,7e^{-j83,9^\circ} \text{ Ом.}$$

Ток в начале линии

$$\dot{I}_{1xx} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{xx}} = 10,52e^{j83,9^\circ} \text{ А.}$$

### Задача 3

В однородной линии задачи 2 найти ток в начале линии в режиме короткого замыкания нагрузки.

Решение

Входное сопротивление в режиме короткого замыкания

$$\underline{Z}_{\text{кз}} = \underline{Z}_c \operatorname{th} \gamma l = \frac{\underline{Z}_c}{\operatorname{cth} \gamma l} = \frac{400e^{-j5^\circ}}{2,377e^{-j78,9^\circ}} = 168,28e^{j73,9^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\text{Ток } \dot{i}_{\text{кз}} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{\text{кз}}} = \frac{10000}{168,28e^{j73,9^\circ}} = 59,45e^{-j73,9^\circ} \text{ А.}$$

Задача 4

Определить входное сопротивление короткозамкнутой на конце линии без потерь с параметрами  $L_0 = 0,2 \text{ мГн/км}$  и  $C_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ км/мФ}$  при длине

$$l_1 = \frac{1}{8} \lambda \text{ и } l_2 = \frac{1}{3} \lambda.$$

Решение

Входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь

$$\underline{Z}_{\text{кз}} = j\underline{Z}_c \operatorname{tg} \beta l.$$

Волновое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 200 \text{ Ом.}$$

$$\text{Длина волны } \lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \text{ отсюда } \beta l_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{8} \lambda = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} \beta l_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Тогда  $\underline{Z}_{\text{кз}_1} = j200 \text{ Ом}$ , следовательно, имеет индуктивный характер.

$$\text{Если } l_2 = \frac{\lambda}{3}, \text{ то } \beta l_2 = \frac{2}{3} \pi, \quad \operatorname{tg} \frac{2}{3} \pi = -1,732.$$

Отсюда  $\underline{Z}_{\text{кз}_2} = -j346 \text{ Ом}$ , т. е. имеет емкостный характер.

Задача 5

Однородная линия без потерь с параметрами задачи 4 находится в режиме холостого хода. Определить, при какой наименьшей длине линия будет эквивалентна идеальному конденсатору емкостью  $C = 20 \text{ мкФ}$  при частоте  $\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

*Решение*

Входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{XX}} = -j\underline{Z}_c \operatorname{ctg} \beta x.$$

Волновое сопротивление  $\underline{Z}_c = 200$  Ом, коэффициент фазы  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 3,16 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$ ,  $\underline{Z}_{\text{ВХ}} = -j \frac{1}{C\omega} = -j500$  Ом.

После подстановки получим

$$-j500 = -j200 \operatorname{ctg} \beta x;$$

$$\operatorname{ctg} \beta x = 2,5; \beta x_{\min} = 0,38 \text{ рад};$$

$$X_{\min} = \frac{0,38}{3,16} = 0,12 \text{ м.}$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

**Задача 6**

Определить, при какой наименьшей длине линия задачи 5 будет эквивалентна индуктивному элементу с индуктивностью  $L = 2$  мкГн.

Ответ:  $X_{\min} = 0,745$  м.

**Задача 7**

Определить входное сопротивление линии без потерь длиной  $l = 100$  м, если  $\underline{Z}_c = 200$  Ом;  $\underline{Z}_H = 100$  Ом и  $\beta = 22,9 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ .

Ответ:  $\underline{Z}_{\text{ВХ}} = 212e^{-j27^\circ}$  Ом.

**Задача 8**

Нагрузкой линии с параметрами предыдущей задачи служит идеальная индуктивная катушка сопротивлением  $\underline{Z}_H = j600$  Ом. Определить минимальное расстояние от конца линии, при котором входное сопротивление равно нулю.

Ответ:  $X_{\min} = 86,2$  м.

Задача 9

Линия без потерь длиной  $l = 100$  км соединяет генератор с активной нагрузкой сопротивлением  $R_H = 600$  Ом. Нагрузка потребляет мощность  $P_2 = 50$  Вт. При частоте  $10^6$  Гц линия имеет волновое сопротивление  $400$  Ом. Определить токи и напряжения в начале и в конце линии.

Ответ:  $I_2 = 0,29$  А;  $U_2 = 174$  В;  $I_1 = 0,4$  А;  $U_1 = 132$  В.

Задача 10

Определить, на каком расстоянии должна быть закорочена линия без потерь, чтобы она была эквивалентна индуктивному элементу с  $L = 10^{-5}$  Гн, если  $Z_C = 500$  Ом,  $\lambda = 60$  м,  $v_\phi = 3 \cdot 10^8$  м/с/

Ответ:  $l = 5,36$  м.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изучении дисциплины «Теоретические основы электротехники» студент приобретает знания в области качественных и количественных соотношений для электромагнитных явлений и процессов и намечает основные пути для решения задач, которые ставят специальные электротехнические дисциплины.

Качественные и количественные стороны исследуемых электромагнитных явлений и процессов находятся в неразрывной связи. Поэтому изучение данной дисциплины в высшей школе основывается на знаниях, полученных из курсов физики и математики, которые расширяются и развиваются в направлении методов анализа, расчета и экспериментального исследования явлений и процессов, наблюдающихся в электрических цепях и в электромагнитных полях.

В практикуме рассмотрены методы расчетов линейных электрических цепей при постоянных, синусоидальных и несинусоидальных воздействиях. Проведен анализ процессов как в однофазных, так и в трехфазных цепях, а также при наличии управляемых источников и операционных усилителей. Краткий теоретический материал сопровождается решением конкретных задач. Приведены аналогичные задачи для самостоятельного решения. После изучения каждого раздела даны задачи для самоконтроля с ответами.

Способные студенты могут решать большее количество задач с постепенным нарастанием степени их сложности. Слабые студенты при необходимости могут многократно возвращаться к изучению алгоритма решения типовой задачи. Самостоятельная работа будет успешной и эффективной при заинтересованности студентов изучаемым курсом.

В заключение отметим перспективы развития дисциплины и методики ее преподавания.

С расширением использования вычислительной техники создаются все новые методы расчетов электрических цепей, например методы расширенных узловых уравнений, переменных состояния и т. д.

Применение компьютера в процессе обучения позволяет создавать методические пособия на электронных носителях. В них возможно использование навигации, оперативно предоставляющей требуемые материалы, обращение за помощью в случае необходимости. Такие пособия удобно использовать при дистанционном обучении. Данный практикум окажет существенную помощь и преподавателям в организации учебного процесса. Его можно рекомендовать для всех существующих форм обучения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 620 с.
2. Довгун, В. П. Электротехника и основы электроники. Ч. 1. Анализ электронных цепей : учеб. пособие / В. П. Довгун. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2003. – 249 с.
3. Иванова, С. Г. Теоретические основы электротехники: расчет установившихся процессов в линейных электрических цепях : учеб. пособие / С. Г. Иванова. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2004. – 148 с.
4. Электротехника в упражнениях и задачах : метод. указания / сост. : Ю. С. Перфильев, В. П. Довгун ; КрПИ. – Красноярск, 1984. – 100 с.
5. Пакеты прикладных задач для контроля текущей успеваемости студентов по курсу ТОЭ / сост. И. А. Борисова ; ЧПИ. – Челябинск, 1982.